Endomorfismi nilpotenti, diagrammi di Young e basi di Jordan

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ e sia $\nu\colon V \to V$ un suo endomorfismo. L'applicazione ν si dice *nilpotente* se esiste un intero positivo N tale che $\nu^N = 0$. Se ν è nilpotente, si chiama indice di nilpotenza di ν il minimo intero e per cui $\nu^e = 0$:

$$e = \inf\{N \in \mathbb{N} \text{ tali che } \nu^N = 0\}.$$

Anche se molte delle considerazioni che faremo valgono per spazi vettoriali arbitrari, supponiamo da qui in avanti che V abbia dimensione finita uguale ad n. Consideriamo i sottospazi $\ker \nu^i$ per $i = 0, \dots, e$. Si ha, chiaramente $\ker \nu^0 = \ker \mathrm{Id} = \{0\}$ e $\ker \nu^e = \ker 0 = V$. Inoltre, per ogni i, si ha

$$\ker \nu^i \subseteq \ker \nu^{i+1}.$$

Infatti, se $v \in \ker \nu^i$, si ha $\nu^{i+1}(v) = \nu(\nu^i(v)) = \nu(0) = 0$ e dunque $v \in \ker \nu^{i+1}$. Abbiamo dunque una bandiera (incompleta, perché ad ogni passo le dimensioni non aumentano necessariamente di 1) di sottospazi

$$\{0\} = \ker \nu^0 \subseteq \ker \nu \subseteq \ker \nu^2 \subseteq \cdots \subseteq \ker \nu^{e-1} \subseteq \ker \nu^e = V.$$

Chiaramente, per ogni $k \geq e$ si ha $\ker \nu^k = \ker \nu^e = V$. Da questo segue in particolare che $\ker \nu^e = \ker \nu^{e+1}$ e dunque l'insieme $\{k \in \mathbb{N}$ tali che $\ker \nu^k = \ker \nu^{k+1}$ è non vuoto. Sia k_0 il minimo di questo insieme. Per quanto abbiamo appena detto $k_0 \leq e$. Sia ora $v \in \ker \nu^{k_0+2}$ questo significa che $\nu^{k_0+2}(v) = 0$, ovvero che $\nu^{k_0+1}(\nu(v)) = 0$. In altre parole $\nu(v) \in \ker \nu^{k_0+1}$. Ma per definizione di k_0 si ha $\ker \nu^{k_0+1} = \ker \nu^{k_0}$ e dunque $\nu(v) \in \ker \nu^{k_0}$ ovvero $v \in \ker \nu^{k_0+1}$. Questo ci dice che $\ker \nu^{k_0+2} \subseteq \ker \nu^{k_0+1}$. D'altronde $\ker \nu^{k_0+1} \subseteq \ker \nu^{k_0+2}$ e quindi $\ker \nu^{k_0+2} = \ker \nu^{k_0+1} = \ker \nu^{k_0}$. Da qui si prova induttivamente che $\ker \nu^{k_0+h} = \ker \nu^{k_0}$ per ogni $h \geq 0$. In particolare, $\ker \nu^{k_0+e} = \ker \nu^{k_0}$. Poiché $k_0 + e \geq e$ vale anche $\ker \nu^{k_0+e} = V$ e dunque troviamo $\ker \nu^{k_0} = V$, ovvero $\nu^{k_0} = 0$. Per definizione di e questo ci dice che $k_0 = e$. Ne segue che per ogni $k < e$ vale $\dim(\ker \nu^k) < \dim(\ker \nu^{k+1})$ e dunque $\dim(\ker \nu^{k+1}) \geq \dim(\ker \nu^{k+1}) + 1$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned}
n = \dim V = \dim \ker \nu^e &= \big(\dim \ker \nu^e - \dim \ker \nu^{e-1}\big) + \dim \ker \nu^{e-1} \\
&= \big(\dim \ker \nu^e - \dim \ker \nu^{e-1}\big) + \big(\dim \ker \nu^{e-1} - \dim \ker \nu^{e-2}\big) + \dim \ker \nu^{e-2} \\
&= \big(\dim \ker \nu^e - \dim \ker \nu^{e-1}\big) + \big(\dim \ker \nu^{e-1} - \dim \ker \nu^{e-2}\big) + \\
&\qquad + \cdots + \big(\dim \ker \nu - \dim \ker \nu^0\big) + \dim \ker \nu^0 \\
&\geq \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{e \text{ volte}} + 0 \\
&= e
\end{aligned}$$

In altre parole, l'indice di nilpotenza e è mnore o uguale alla dimensione n dello spazio V.

Osserviamo inoltre che l'applicazione ν, ristretta al sottospazio $\ker \nu^i$, manda il sottospazio $\ker \nu^i$ in $\ker \nu^{i-1}$. Infatti, se $v \in \ker \nu^i$, si ha $\nu^{i-1}(\nu((v)) = \nu^i(v) = 0$ e dunque $\nu(v) \in \ker \nu^{i-1}$. Applichiamo il teorema di omomorfismo all'applicazione

$$\nu\colon \ker \nu^2 \to \ker \nu.$$

Il nucleo di quest'applicazione è $\ker \nu \cap \ker \nu^2 = \ker \nu$. Dunque il teorema di omomorfismo ci dice che ν induce un'applicazione iniettiva

$$\nu\colon \ker \nu^2 / \ker \nu \hookrightarrow \ker \nu.$$

In particolare,

$$\dim(\ker \nu^2 / \ker \nu) \leq \dim(\ker \nu).$$

Ripetiamo ora lo stesso ragionamento per l'applicazione indotta da ν (composta con la proiezione sul quoziente)

$$\nu\colon \ker \nu^3 \to \ker \nu^2 / \ker \nu.$$

Il nucleo di questa applicazione è costituito da quei vettori $v \in \ker \nu^3$ tali che $\nu(v) \in \ker \nu$. Ma questo significa $\nu(\nu(v)) = 0$ ovvero $v \in \ker \nu^2$. Ne segue che il nucleo dell'applicazione indotta $\nu\colon \ker \nu^3 \to \ker \nu^2 / \ker \nu$ è $\ker \nu^3 \cap \ker \nu^2 = \ker \nu^2$ e dunque, di nuovo dal teorema di omomorfismo, ν induce un'applicazione iniettiva

$$\nu\colon \ker \nu^3 / \ker \nu^2 \hookrightarrow \ker \nu^2 / \ker \nu.$$

In particolare,

$$\dim(\ker \nu^3 / \ker \nu^2) \leq \dim(\ker \nu^2 / \ker \nu).$$

A questo punto è chiaro come andare avanti: consideriamo l'applicazione indotta da ν

$$\nu\colon \ker \nu^{i+1} \to \ker \nu^i / \ker \nu^{i-1}.$$

Il nucleo di questa applicazione è costituito da quei vettori $v \in \ker \nu^{i+1}$ tali che $\nu(v) \in \ker \nu^{i-1}$, ovvero tali che $\nu^{i-1}(\nu(v)) = 0$. Questo significa $v \in \ker \nu^i$ e dunque il nucleo dell'applicazione indotta $\nu\colon \ker \nu^{i+1} \to \ker \nu^i / \ker \nu^{i-1}$ è $\ker \nu^{i+1} \cap \ker \nu^i = \ker \nu^i$ e dunque, sempre dal teorema di omomorfismo, ν induce un'applicazione iniettiva

$$\nu\colon \ker \nu^{i+1} / \ker \nu^i \hookrightarrow \ker \nu^i / \ker \nu^{i-1}.$$

In particolare,

$$\dim(\ker \nu^{i+1} / \ker \nu^i) \leq \dim(\ker \nu^i / \ker \nu^{i-1}).$$

Raccogliamo questi dati come segue: poniamo

$$n_i = \dim(\ker \nu^i / \ker \nu^{i-1}) = \dim \ker \nu^i - \dim \ker \nu^{i-1}.$$

Quanto abbiamo appena dimostrato ci dice che

$$n_1 \geq n_2 \geq n_3 \cdots .$$

Inoltre $n_k = 0$ per $k \geq e+1$ in quanto, per quanto osservato in precedenza, se $k \geq e+1$ si ha $n_k = \dim\ker\nu^k - \dim\ker\nu^{k-1} = \dim V - \dim V = 0$. Infine, osserviamo che $n_e > 0$. Infatti, se fosse $n_e = 0$ si avrebbe

$$V = \ker\nu^e = \ker\nu^{e-1},$$

ovvero $\nu^{e-1} = 0$, contraddicendo la minimalità di e. Abbiamo dunque

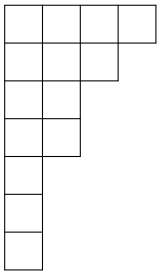
$$\begin{aligned}
&n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_{e-1} \geq n_e,\\
&n_e > 0,\\
&n_k = 0 \text{ per } k > e.
\end{aligned}$$

Osserviamo poi che

$$\begin{aligned}
n_1 + n_2 + \cdots + n_e &= \dim\ker\nu + (\dim\ker\nu^2 - \dim\ker\nu) +\\
&+ (\dim\ker\nu^3 - \dim\ker\nu^2)\cdots + (\dim\ker\nu^e - \dim\ker\nu^{e-1})\\
&= \dim\ker\nu^e = n.
\end{aligned}$$

Vale a dire, la somma di tutte le dimensioni n_i è uguale alla dimensione n dello spazio V.

Un modo estremamente comodo ed elegante di rappresentare questi dati è mediante un *diagramma di Young*. Un esempio vale più di mille parole: se $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7) = (4, 3, 2, 2, 1, 1, 1)$ il diagramma di Young corrispondente è



La prima riga del diagramma ha 4 quadretti, la seconda ne ha 3, la terza e la quarta ne hanno 2, la quinta, la sesta e la settima ne hanno 1. La forma a scaletta del digramma di Young riproduce la disuguaglianza $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_7 \geq 1$. Inoltre questo diagramma ha in totale 14 quadretti, quindi stiamo considerando un endomorfismo nilpotente di uno spazio di dimensione 14. Guardiamo alle colonne del diagramma di Young. Ci sono 4 colonne; la prima è di 7 quadretti, la seconda di 4, la terza di 2 e l'ultima di 1 solo quadretto. Questo ci dice che in una base opportuna (*base di Jordan*) l'applicazione lineare ν è rappresentata da una matrice diagonale a blocchi, con 4 blocchi sulla diagonale, il primo 7×7, il secondo 4×4, il terzo 2×2 e l'ultimo 1×1. Ognuno di questi blocchi è un

blocco di Jordan ovvero una matrice con tutti 1 nella sopradiagonale e tutti 0 altrove. Se indichiamo con J_k il blocco di Jordan di ordine k si ha

$$J_1 = (0); \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad J_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \dots$$

In una base di Jordan, dunque, l'applicazione ν del nostro esempio è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} J_7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Rimane da vedere come ottenere esplicitamente una base di Jordan per ν. Per prima cosa numeriamo le caselle del diagramma di Young, partendo dalla casella in alto a sinistra e scendendo in verticale; quando la prima colonna è terminata ricominciamo dalla seconda colonne, e così via. Otteniamo la seguente numerazione:

1	8	12	14
2	9	13	
3	10		
4	11		
5			
6			
7			

A questo punto guardiamo il diagramma dal basso. La prima cosa che incontrimao è una casella numerata "7". Dobbiamo allora determinare per primo

il settimo vettore della base di Jordan; chiameremo questo vettore e_7. La settima riga del diagramma contiene un solo quadretto; questo significa che $\dim(\ker \nu^7 / \ker \nu^6) = 1$. Come e_7 prendiamo un qualunque vettore tale che $[e_7]$ sia una base di $\ker \nu^7 / \ker \nu^6$. Al solito, per ottenere una base di un quoziente $\ker \nu^7 / \ker \nu^6$ basta prendere una base di $\ker \nu^6$ e completarla ad una base di $\ker \nu^7$; le classi dei vettori aggiunti per completare la base di $\ker \nu^6$ costituiscono una base di $\ker \nu^7 / \ker \nu^6$. Tuttavia, poiché in quasto caso lo spazio $\ker \nu^7 / \ker \nu^6$ ha dimensione 1 (è un caso, avremmo potuto tranquillamente considerare un diagramma di Young nel quale l'ultima riga contenesse 2 quadretti, oppure un qualunque altro numero di quadretti), possiamo prendere una scorciatioia: una base di uno spazio di dimensione 1 è un qualunque vettore non nullo di quello spazio, e $[e_7] = 0$ significa esattamente $e_7 \in \ker \nu^6$. Dunque, come vettore e_7 possiamo prendere un qualunque vettore di $\ker \nu^7$ che non stia in $\ker \nu^6$ (questo trucco funziona solamente per quozienti di dimensione 1: se avessimo avuto $\dim(\ker \nu^7 / \ker \nu^6) = 2$, ad esempio, non avremmo potuto semplicemente prendere due vettori a caso di $\ker \nu^7$ che non fossero in $\ker \nu^6$, perché potrebbe verificarsi l'eventualità che una combinazione lineare non banale dei vettori scelti così a caso stia in $\ker \nu^6$ e dunque le classi dei due vettori scelti sarebbero linearmente dipendenti nel quoziente). Tutta l'analisi sugli operatori indotti tra i quozienti

$$\nu \colon \ker \nu^{i+1} / \ker \nu^i \hookrightarrow \ker \nu^i / \ker \nu^{i-1}$$

ci dice, al livello di diagramma di Young, che ν manda la $(i+1)$-esima riga iniettivamente nelle i-esima. Definiamo allora ricorsivamente (seguendo la numerazione delle caselle del diagramma)

$$e_6 = \nu(e_7); \qquad e_5 = \nu(e_6); \qquad e_4 = \nu(e_5); \qquad e_3 = \nu(e_4);$$

$$e_2 = \nu(e_3); \qquad e_1 = \nu(e_2).$$

I vettori $e_1, \dots, e_7$ sono linearmente indipendenti (perché? dimostratelo). A questo punto la prima colonna è esaurita. Riprendendo a guardare il diagramma dal basso, la prima casella "vuota" (ovvero cui non è ancora stato associato un vettore e_i) che incontriamo è la casella numero 11. Si trova sulla quarta riga: dunque dobbiamo trovare un vettore e_{11} tale che $[e_{11}]$ completi $[e_4]$ ad una base di $\ker \nu^4 / \ker \nu^3$. A questo punto definiamo ricorsivamente i vettori e_{10}, e_9, e_8 come

$$e_{10} = \nu(e_{11}); \qquad e_9 = \nu(e_{10}); \qquad e_8 = \nu(e_9).$$

Per costruzione, i vettori $e_1, \dots e_11$ sono linearmente indipendenti (dimostratelo). Adesso dereminiamo un vettore e_{13} tale che $[e_{13}]$ completi $\{[e_2], [e_9]\}$ ad una base di $\ker \nu^2 / \ker \nu$. Definiamo e_{12} come

$$e_{12} = \nu(e_{13})$$

ed infine determiniamo un vettore e_{14} che completi $\{e_1, e_8, e_{12}\}$ ad una base di $\ker \nu$. I 14 vettori $e_1, \dots, e_{14}$ sono linearmente indipendenti (dimostratelo)

dunque sono unabase dello spazio del quale ν è un endomorfismo (come abbiamo osservato in precedenza, infatti, si tratta di uno spazio di dimensione 14). E, per come sono stati costruiti i vettori e_i, è evidente che essi costituiscono una base di Jordan per ν.

Esercizio. Sia $V = \mathbb{C}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti complessi di grado minore o uguale a tre. Si consideri l'applicazione lineare

$$\frac{d}{dx} \colon \mathbb{C}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{C}[x]_{\leq 3}.$$

Dimostrare che si tratta di un'applicazione nilpotente, e determinarne il diagramma di Young; determinare inoltre una base di Jordan per d/dx. Cosa succede per $V = \mathbb{C}[x]_{\leq n}$?

La forma di Jordan di un endomorfismo qualsiasi.
Fin qui abbiamo considerato endomorfismi niplotenti. Per un endomorfimo qualsiasi $\varphi\colon V \to V$ abbiamo un'analoga forma normale di Jordan: scriviamo V come somma diretta dei suoi autospazi generalizzati

$$V = \bigoplus_{\lambda} V_\lambda^\infty$$

I sottospazi $V_\lambda^\infty = \ker(\varphi - \lambda\mathrm{Id})^N$, per N abbastanza grande (basta $N \geq e_\lambda$, dove e_λ è la molteplicità della radice λ nel polinomio minimo di φ) sono φ-stabili, ovvero $\varphi(V_\lambda^\infty) \subseteq V_\lambda^\infty$. In particolare, per ogni λ, possiamo considerare gli operatori

$$\nu_\lambda = (\varphi - \lambda\mathrm{Id})\big|_{V_\lambda^\infty} \colon V_\lambda^\infty \to V_\lambda^\infty.$$

Si tratta evidentemente di operatori nilpotenti, e per ognuno di essi possiamo ripetere la costruzone vista sopra. Notiamo inoltre che

$$\ker(\nu_\lambda^i) = \ker((\varphi - \lambda\mathrm{Id})^i),$$

dove $\varphi - \lambda\mathrm{Id}$ è visto come operatore da V in V (convincetevene). Dunque per determinare le dimensioni dei sottospazi $\ker(\nu_\lambda^i)$ (e dunque il diagramma di Young corrispondente all'autovalore λ) e per determinare una base di Jordan per ν_λ è sufficiente lavorare direttamente con l'operatore $\varphi - \lambda\mathrm{Id}$ (non ristretto al sottospazio V_λ^∞).

Qual è la matrice che rappresenta φ rispetto ad una base di Jordan? dato che tutti i sottospazi V_λ^∞ sono φ-invarianti, sarà una matrice diagonale a blocchi. Ci basta dunque capire qual è la matrice che rappresenta $\varphi\big|_{V_\lambda^\infty}$. Abbiamo

$$\varphi\big|_{V_\lambda^\infty} = \lambda\mathrm{Id}\big|_{V_\lambda^\infty} + \nu_\lambda,$$

e sappiamo che in una base di Jordan l'applicazione ν_λ è rappresentata da una matrice diagonale a blocchi, con sulla diagonale blocchi di Jordan J_k. D'altronde in qualsiasi base l'applicazione $\lambda\mathrm{Id}$ è rappresentata dall matrice diagonale con tutti λ sulla diagonale. Ne segue che in una base di Jordan, l'applicazione φ è rappresentata da una matrice diagonale a blocchi, con sulla diagonale blocchi di Jordan $J_k(\lambda)$ dove

$$J_1(\lambda) = (\lambda); \qquad J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}; \qquad J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix};$$

$$J_4(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \qquad J_5(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \qquad \dots$$

Esempio. Sia $\varphi\colon \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ l'applicazione lineare rappresentata (rispetto alla base canonica di $\mathbb{C}^5$) dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determiniamo una base di Jordan di φ. per prima cosa scriviamo $\mathbb{C}^5$ come somma diretta di autospazi generalizzati. Il polinomio caratteristico di φ è $p_\varphi(x) = -(x-3)(x-2)^4$, dunque

$$\mathbb{C}^5 = V_3^\infty \oplus V_2^\infty$$

La molteplicità algebrica dell'autovalore 3 è 1, dunque $V_3^\infty = V_3$. Per quanto riguarda l'autovalore 2, si vede immediatamente che l'applicazione $\varphi - 2\mathrm{Id}$ ha rango 3 e dunque $\dim V_2 = 2 < 4 = \dim V_2^\infty$. L'applicazione φ non è dunque diagonalizzabile. Per determinare una base di Jordan di φ basta determinare basi di Jordan per le applicazioni nilpotenti

$$\nu_3 = (\varphi - 3\mathrm{Id})\big|_{V_3^\infty} : V_3^\infty \to V_3^\infty$$

$$\nu_2 = (\varphi - 2\mathrm{Id})\big|_{V_2^\infty} : V_2^\infty \to V_2^\infty$$

e per far questo basta studiare i nuclei degli operatori $(\varphi - 3\mathrm{Id})^i$ e $(\varphi - 2\mathrm{Id})^i$ su $\mathbb{C}^5$. Cominciamo a studiare gli operatori $(\varphi - 3\mathrm{Id})^i$. Dobbiamo determinarne i nuclei fino a quando non troviamo $\dim(\ker(\varphi - 3\mathrm{Id})^i) = \dim V_3^\infty$. Poichè $V_3^\infty = V_3 = \ker(\varphi - 3\mathrm{Id})$, abbiamo bisogno di un solo passo. Si ha

$$\ker(\varphi - 3\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque $\dim\ker(\varphi - 3\mathrm{Id}) = 1$ e la prima riga del diagramma di Young corrispondente è

$$\square$$

Abbiamo 1 quadratino, ed abbiamo finito in quanto $\dim V_3^\infty = 1$; questo conferma che avessimo bisogno di un solo passo. Il blocco di Jordan corripondente a $\varphi - 3\mathrm{Id}$ ristretto a V_3^∞ è dunque

$$J_1 = (0).$$

Ne segue che il blocco di Jordan corripondente a φ su V_3^∞ è

$$3\mathrm{Id} + J_1 = (3)$$

Una base di Jordan per V_3^∞ è semplicemente una base per V_3, e dunque è data dal vettore $(0,0,1,0,0)$.

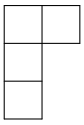
Passiamo al sottospazio V_2^∞. Il nucleo di $\varphi - 2\mathrm{Id}$ è

$$\ker(\varphi - 2\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque $\dim \ker(\varphi - 2\mathrm{Id}) = 2$ e la prima riga del diagramma di Young corrispondente è

Abbiamo 2 quadratini, per cui ce ne servono altri 2 in quanto $\dim V_2^\infty = 4$. I diagrammi di Young possibili per $\varphi - 2\mathrm{Id}$ sono pertanto

oppure



Per decidere quale tra questi due basta calcolare $\dim(\ker(\varphi - 2\mathrm{Id})^2)$. Si ha

$$\ker(\varphi - 2\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque $\dim(\ker(\varphi - 2\mathrm{Id})^2) = 4$ e il diagramma di Young di $\varphi - 2\mathrm{Id}$ è

Abbiamo due colonne, ognuna di 2 quadretti; abbiamo dunque due blocchi di Jordan J_2. La forma di Jordan di $\varphi - 2\mathrm{Id}$ ristretta a V_2^∞ è pertanto

$$\begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ne segue che la forma di Jordan di φ ristretta a V_2^∞ è

$$2\mathrm{Id} + \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Per trovare una base di Jordan per φ ristretta a V_2^∞ numeriamo i quadretti del diagramma di Young:

1	3
2	4

Dobbiamo riempire per prime le caselline 2 e 4, ovvero dobbiamo determinare una base $[e_2]$, $[e_4]$ dello spazio $\ker(\varphi - 2\mathrm{Id})^2 / \ker(\varphi - 2\mathrm{Id})$. Al solito, per determinare una base di un quoziente basta completare una base dello spazio per cui si quozienta ad una base dello spazio ambiente. Una base di $\ker(\varphi - 2\mathrm{Id})$ è data dai due vettori $(0, 1, -2, 0, 0)$ e $(0, 1, 0, -1, 0)$. La si può completare ad una base di $\ker(\varphi - 2\mathrm{Id})^2$ aggiungendo i vettori $e_2 = (1, 0, -3, 0, 0)$ ed $e_4 = (0, 0, -3, 0, 1)$. A questo punto abbiamo finito: definiamo e_1 ed e_3 come

$$e_1 = \nu_2(e_2) = (\varphi - 2\mathrm{Id})(e_2) = (0, 1, -2, 0, 0)$$

$$e_3 = \nu_2(e_4) = (\varphi - 2\mathrm{Id})(e_4) = (0, 0, -2, 1, 0)$$

La base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di V_2^∞ così determinata è una base di Jordan per φ. Unendola alla base di V_3^∞ trovata in precedenza otteniamo una base di Jordan per l'endomorfismo φ di $\mathbb{C}^5$. Come verifica, calcoliamo la matrice che esprime φ in questa nuova base mediante il coniugio con la matrice P del cambio di base. Si ha

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$