Corso di laurea in Matematica, a.a. 2002/03
Università di Roma "La Sapienza"

Note per il corso

Analisi Matematica I

Parte I: Completezza dei reali, Le serie numeriche

scritte ad otto mani da

P. D'Ancona, C. Mascia, V. Nesi & L. Orsina

CAPITOLO 1

Completezza dei reali

`Versione del 24 febbraio 2003`

1. La completezza

Nel corso di Calcolo I abbiamo incontrato l'assioma di completezza nella forma che ricordiamo.

Assioma 1.1.
1) Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, limitato superiormente. Allora esiste in $\mathbb{R}$ l'estremo superiore di E.

2) Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$, limitato inferiormente. Allora esiste in $\mathbb{R}$ l'estremo inferiore di E.

Questo importante concetto può essere introdotto in vari modi equivalenti. Si potrebbe dissertare a lungo su quale sia il migliore. In questo paragrafo useremo un approccio leggermente diverso da quello presentato a suo tempo ed appena ricordato. Il nuovo approccio sembra leggermente più astratto del precedente, ma permette di assaporare un altro modo in cui "nasce" l'esigenza della completezza. Successivamente mostreremo che i due punti di vista sono effettivamente equivalenti. L'utilità di conoscere entrambe le versioni è una valutazione che potrete fare a posteriori. Vi chiediamo di crederci almeno per qualche tempo.

Supponiamo di avere a nostra disposizione un insieme R. Attenzione abbiamo detto R e non $\mathbb{R}$. Quest'ultimo è l'oggetto che vorremmo definire. Dicevamo che abbiamo un insieme. Cosa sia un insieme non è dato sapere. Si potrebbe dire "una collezione di oggetti" ma la truffa si sarebbe spostata solo su altre parole non definite che quindi considereremo come "primitive". L'intraprendenza (o l'incoscienza) ci porta a saltare oltre.

Sebbene non sia chiaro ancora cosa siano gli oggetti in questione, ci proponiamo di compiere delle "operazioni". Ad esempio la somma. La somma è una operazione nel senso che richiediamo che ad ogni coppia di oggetti x e y (da ora in poi detti numeri) dell'insieme R la "somma" associ ancora un elemento di R ovvero un numero:

$$\begin{array}{ccccccc} s & : & R & \times & R & \longrightarrow & R \\ + & : & (x & , & y) & \longrightarrow & s(x,y) = x + y \end{array}.$$

Sembra che si sia solo giocato con le parole ma non è vero. La richiesta (forte) è che l'insieme R sia **chiuso** rispetto all'operazione di somma: sommando **due numeri** non si può in alcun modo uscire da R.

Per convincersi che la cosa sia interessante provate a chiedervi se l'affermazione continua a valere per un numero finito di operazioni di somma. Molti avranno risposto affermativamente. E per un numero arbitrario di operazioni di somma? La risposta, nell'insieme che avevamo denotato con $\mathbb{R}$ è negativa. Basta sommare infinite volte il numero uno. Quindi, per un insieme, essere chiuso rispetto ad una certa operazione è proprietà che merita considerazione.

La somma, come comunemente tutti noi l'abbiamo stampata nella mente, gode di molte proprietà interessanti. Ad esempio, estraendo dalla tasca monete di vario taglio, sommerete gli importi come capitano sicuri che l'ordine con cui effettuate le operazioni è del tutto irrilevante. State applicando (molte volte!) due importanti proprietà. Quella commutativa che afferma che

$$\forall x, y \in R \quad , \quad s(x, y) = s(y, x)$$

e quella, non meno importante, detta associativa

$$\forall x, y, z \in R \quad , \quad s[s(x, y), z] = s[x, s(y, z)]$$

Scritte nelle notazioni abituali entrambe risultano molto familari. Rispettivamente esse si scrivono:

$$\forall x, y \in R \quad , \quad x + y = y + x$$

$$\forall x, y, z \in R \quad , \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

Di tutto questo abbiamo parlato poco nel corso di Calcolo I. Si è assunto, giustamente, che anche in mancanza di formalizzazione, tutti noi "conosciamo" queste cose molto bene e sappiamo che queste verità sono "indimostrabili". Sono più che altro parte delle "regole del gioco". Ricordiamo altri due fondamentali requisiti sulla somma. L'esistenza dell'elemento neutro e dell'inverso. In formule

$$\exists \quad 0 \quad : \quad \forall x \in R \quad x + 0 = x$$

$$\forall x \in R \quad \exists x' \in R \quad : \quad x + x' = 0$$

L'elemento x' si denota, da che mondo è mondo, con $-x$.

L'ultima operazione non è indolore. Implica il salto logico di "accettare" i numeri "negativi". Ma siamo convinti che questo impatto sia stato superato da tempo da tutti noi.

Ci possiamo fermare qui? Possiamo contentarci della coppia

$$(R, s) \tag{1.1}$$

con le proprietà elencate finora? Se dicessimo di no, qualche algebrista in agguato potrebbe svergognarci! Ma se si vuole fare l'analisi infinitesimale allora, la risposta è no. Procediamo. Introduciamo il prodotto, che denotiamo con "p", con le sue relative proprietà. Questo porta ancora altri assiomi. Tutti molto intuitivi. Per il momento, per non stancare nè chi scrive, nè chi legge, non li elenchiamo.

Osserviamo che qui entreranno anche assiomi che mettono in relazione le proprietà della somma e quelle del prodotto. Ad esempio si chiederà

$$p[s(x,y),z] = s(p[x,z],p[y,z])$$

che nelle notazioni abituali si legge

$$(x+y)\,z = x\,z + y\,z$$

cosa sulla quale tutti noi siamo disposti a scommettere. Dopo questo ulteriore sforzo avremo a nostra disposizione la terna

$$(R,s,p)\,. \tag{1.2}$$

Vale il discorso di prima. Insaziabili, introduciamo un'ulteriore nozione: l'ordinamento. La possibilità di decidere sempre fra due numeri distinti quali sia il più grande e quale il più piccolo. Questa "relazione" si indica con $\leq$. Anche qui assiomi relativi al simbolo $\leq$ e alle sue relazioni con le due operazioni di somma e prodotto sono quelle solite.

> Dobbiamo tuttavia ammettere che la familiarità con le "regole del gioco" relative alle disequazioni, non sempre raggiunge il livello giusto per mettersi al riparo da errori.

Finalmente abbiamo raggiunto la agognata quaterna! (Sembra un'affermazione da giocatore del Lotto!) Abbiamo a disposizione quello che tecnicamente viene chiamato un **campo ordinato**, ovvero una quaterna

$$(R,s,p,\leq) \equiv (R,+,\cdot,\leq) \tag{1.3}$$

con la sfilza noiosa di "assiomi" cui abbiamo accennato e che hanno il pregio (che dovrebbe essere condiviso da tutti gli assiomi) di "essere evidenti". Evidenti qui si intende nel senso preciso che ciascuno di noi ha usato un numero talmente grande di volte tutte queste regole del gioco da considerarle "vere" e allo stesso tempo da comprendere, anche se non sempre razionalizzare pienamente, che esse si usano spessissimo e che, quindi, molti "teoremi" risulterebbero falsi se queste regole fossero cambiate.

Per secoli (in effetti millenni) si è pensato che R fosse $\mathbb{R}$. In altre parole che gli assiomi "evidenti" bastassero a descrivere $\mathbb{R}$. Direte giustamente: "ma se non abbiamo definito $\mathbb{R}$ di cosa stiamo parlando?" La domanda merita ampio consenso.

Per iniziare a rispondere partiamo dalla "fenomenologia". Cominciamo con l'osservare (a posteriori) che $\mathbb{Q}$ soddisfa tutti gli assiomi di cui (in parte) si è detto. D'altronde $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Quindi qualche problema ci deve essere. Per introdurre l'assioma di completezza il nostro punto di partenza sarà la quaterna di cui si è detto in cui, per amore di pignoleria, si puntualizzerà che $R \neq \emptyset$.

Adesso procediamo con un esempio che, oltre ad offrire il pretesto per introdurre le “classi separate”, sembra istruttivo di per sé. È un esempio volutamente informale. L’obbiettivo è di far scontrare il lettore con i propri (eventuali) pregiudizi su quello che è evidente. In altre parole l’esempio vorrebbe portare un contributo all’idea che la “completezza” è un altro assioma “evidente” quanto quelli sulla somma.

Si parte. Supponiamo di voler “calcolare” con metodi del tutto elementari l’Area di un sottoinsieme limitato E del piano. Da ora in poi battezziamo

$$s := \mathrm{Area}(E)\,.$$

Cominciamo a stabilire alcune “evidenti” regole del gioco.

Regola 1. L’Area di un rettangolo coordinato (ovvero con i lati paralleli agli assi coordinati), vale il prodotto delle lunghezze della base e dell’altezza.

Regola 2. Se R_1 ed R_2 sono rettangoli che si intersecano al più in un segmento, allora

$$\mathrm{Area}(R_1 \cup R_2) = \mathrm{Area}(R_1) + \mathrm{Area}(R_2)$$

Regola 3. Siano E_1 ed E_2 due insiemi di cui sappiamo calcolare l’area con $E_1 \subseteq E_2$. Allora

$$\mathrm{Area}(E_1) \le \mathrm{Area}(E_2).$$

Meglio essere franchi. Queste regole fanno acqua. Ma non stiamo a sottilizzare.

Nella speranza di calcolare l’Area di E procederemo per successive approssimazioni. Ad esempio, per approssimare l’Area di E dal basso, cominciamo con l’osservare che $\mathrm{Area}(E) \ge 0$. Abbiamo trovato un primo numero $a_0 = 0$ con la proprietà

$$a_0 \le s\,.$$

Procediamo a cercare una migliore approssimazione. Sistemiamo un rettangolo R_1 in maniera che sia contenuto in E. Scegliamo $a_1 = \mathrm{Area}(R_1)$ ed osserviamo preliminarmente che siamo stati fortunati (o se preferite astuti). Il numero a_1 lo sappiamo calcolare perchè R è un rettangolo! (Per la Regola 1). Inoltre usando la Regola 3, si ha che

$$a_0 \le a_1 \le s$$

La strategia si va delinenando. Facciamo ancora un passo. Scegliamo un nuovo rettangolo R_2 interamente contenuto in E e che non intersechi R_1. Allora $R_1 \subset (R_1 \cup R_2) \subset E$. Definiamo

$$a_2 = \mathrm{Area}(R_1 \cup R_2)\,.$$

Ancora una volta è bene sottolineare che sappiamo calcolare questo numero grazie alle Regole 1 e 2. Usando ripetutamente la Regola 3 insieme alla 1 e alla 2 otteniamo

$$a_0 \le a_1 \le a_2 \le s\,.$$

Continuando, senza mai stancarci, è facile trovare una sfilza di approssimazioni dal basso

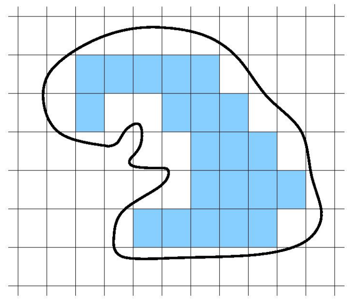

Figura 1. La regione E e una sua approssimazione dall'interno.

per il valore dell'Area (Figura 1).

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_N \leq \cdots \leq s\,.$$

Definiamo l'insieme (sottoinsieme di R) di tutte queste approssimazioni

$$A \equiv \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}\,.$$

Analogamente, poiché E è limitato per ipotesi, esso è anche contenuto in un rettangolo R^0 e quindi, posto $b_0 = \text{Area}(R^0)$, per la Regola 3

$$s \leq b_0\,.$$

Adesso "togliamo" un rettangolo posto in R^0 che sia esterno ad E. Con un po' di immaginazione, si vede che $R^0 \backslash R^1$, pur non essendo un rettangolo è unione di tanti rettangoli con le proprietà giuste e quindi la sua Area è calcolabile.

Usando la Regola 3 si conclude che

$$b_1 = \text{Area}(R^0 \backslash R^1) = \text{Area}(R^0) - \text{Area}(R^1) \leq b_0\,.$$

A questo punto si procede a migliorare ulteriormente l'approssimazione continuando a togliere "mattonelle". In questo modo si produce un nuovo insieme di approssimazioni per eccesso per l'Area di E (Figura 2):

$$B \equiv \{b_i\}_{i\in\mathbb{N}} \quad , \quad s \leq \cdots \leq b_N \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0\,.$$

Notiamo esplicitamente che la coppia di insiemi (A, B) gode delle seguenti proprietà: ciascuno dei due è un sottoinsieme non vuoto del campo ordinato $(R, +, \cdot, \leq)$ dal quale eravamo partiti; inoltre

$$\forall a \in A \quad , \quad \forall b \in B \quad \text{risulta} \quad a \leq b\,.$$

Siamo pronti per la definizione che volevamo introdurre.

Definizione 1.2. *Sia dato un campo ordinato $(R, +, \cdot, \leq)$. Una coppia ordinata di sottoinsiemi di R (A, B) che goda delle seguenti proprietà:*

$$A \neq \emptyset \quad , \quad B \neq \emptyset \tag{1.4}$$

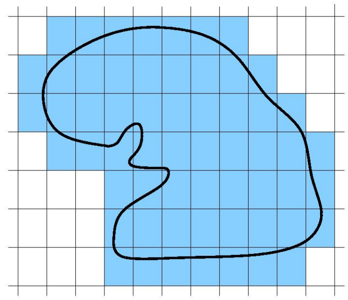

FIGURA 2. La regione E e una sua approssimazione dall'esterno.

$$\forall a \in A \quad , \quad \forall b \in B \qquad a \leq b \,, \tag{1.5}$$

si dice una **coppia di classi separate** *(CCS).*

Tempo di esempi.

ESEMPIO 1.3. Gli insiemi

$$A = [0,1] \quad , \quad B = [3,4]$$

formano, palesemente, una CCS. Lo stesso vale per gli insiemi

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n+1} \right\}, \qquad B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ -\frac{1}{n+1} \right\}$$

Viceversa gli insiemi $A = [0,2]$ e $B = [1,3]$ non costituiscono una CCS.

OSSERVAZIONE 1.4. Attenzione al fatto che una lettura frettolosa della definizione di CCS potrebbe trarre in inganno. Facciamo un esempio. Supponiamo di lavorare soltanto con i naturali. La domanda seguente è priva di senso: nell'insieme $\mathbb{N}$ gli insiemi $A = \{0\}$ e $B = \mathbb{N} \backslash \{0\}$ sono un coppia di classi separate? Il motivo dell'insensatezza risiede nel fatto che $\mathbb{N}$ non è un campo ordinato (ad esempio in $\mathbb{N}$ non tutti gli elementi ammettono inverso pertanto $\mathbb{N}$ non è un campo pur essendo ordinato).

Allo stesso modo l'insieme A dei punti del piano a distanza uno dall'origine e quello B dei punti a distanza uno da $(9,0)$ rappresentano due dischi che non si intersecano. Ma non sono una coppia di classi separate in quanto, come vedremo, $\mathbb{R}^2$ non è un campo ordinato.

Nell'esempio $A = [0,1]$, $B = [3,4]$ appare evidente che spesso qualcosa si possa interporre fra le classi separate. In altre parole, in questo particolare caso esiste un numero s (ad esempio il numero "due") tale che

$$\forall a \in A \quad , \quad \forall b \in B \qquad a \leq s \leq b \,. \tag{1.6}$$

Ritorniamo al nostro esempio della ricerca dell'Area di E. Avevamo già verificato che la nostra costruzione di "approssimanti" aveva esibito una coppia di classi separate secondo la Definizione 1.2. Inoltre aveva suggerito naturalmente che s, ovvero l'Area di E, dovesse soddisfare la proprietà (1.6).

Esprimiamo questo fatto aiutandoci ancora con una definizione cruciale.

Definizione 1.5. *Sia* (A, B) *una CCS. L'insieme*

$$S \equiv \{s \in R \quad : \quad \forall a \in A \quad , \quad \forall b \in B \qquad a \leq s \leq b\} \tag{1.7}$$

si dice **insieme degli elementi separatori della CCS**.

Il primo caso nell'Esempio 1.3 mostra che S può essere grande e contenere ad esempio un intervallo. Infatti in quel caso ci aspettiamo $S = (1, 3)$. Nel secondo caso invece ci aspettiamo $S = \{0\}$.

Ritorniamo alla questione dell'area di E. La situazione era la seguente. Da un lato $\text{Area}(E) \in S$ per costruzione. Cioè l'Area di E è un elemento di S, l'insieme degli elementi separatori della CCS. Apparentemente il problema sembra essere che non è "evidente" che ce ne sia uno solo di tali elementi e che quindi ci possa essere (orrore!) un'ambiguità nella scelta di questo numero per una possibile abbondanza di candidati.

A ben guardare la situazione è decisamente peggiore di come l'abbiamo descritta. Infatti chi ci assicura che ci sia **almeno** un elemento separatore? Se volete, chi ci assicura che ci sia almeno un candidato disponibile a sobbarcarsi il compito di essere chiamato "Area(E)"? La tragedia si è abbattuta su di noi.

Fermiamoci a considerare il nostro dramma. Come mai ci eravamo mostrati così sicuri dell'esistenza dell'area di E? Certamente una certa evidenza geometrica. Oppure i lettori più critici avrebbero potuto precisare il ragionamento nel seguente modo. L'insieme A è non vuoto e superiormente limitato, B è non vuoto e inferiormente limitato e quindi si sarebbe potuto affermare che esistono

$$\sup A \quad \text{e} \quad \inf B\,.$$

Per chi non aveva fatto questo pensiero, non resta che ammettere che avevamo assunto che "Area(E)" esistesse in quanto "evidente". Per la seconda categoria di lettori che, invece, aveva ragionato inferendo l'esistenza di $\sup A$, notiamo che in quel caso si era usata la completezza in una delle sue tante guise e più precisamente, nella forma dell'Assioma 1.1. Poiché quest'ultimo non è stato ancora assunto nella nostra costruzione, il secondo procedimento non sarebbe stato leggittimo. Quindi rimangono due inquietanti domande.

La prima. Esiste almeno un candidato ad essere "Area(E)"?

La seconda. Ammesso che ne esista uno, siamo sicuri che sia unico?

La risposta è che a entrambe le domande è negativa. Questo famoso insieme S potrebbe essere vuoto (ed anche contenere troppi elementi ma questa è un'altra storia). Come si esce da questo vicolo buio?

Chiediamo (ovvero imponiamo la nuova regola) che ogni coppia di classi separate abbia **almeno** un elemento separatore o, se preferite, chiediamo che

$$S \neq \emptyset \,.$$

OSSERVAZIONE 1.6. Il rimedio a questa ingiustizia è legato alla questione che sollevavamo qualche pagina addietro in cui si diceva che R è chiuso rispetto alla somma. Ritorneremo su questo nella sezione seguente

DEFINIZIONE 1.7. *Sia R un campo ordinato. Supponiamo che, per ogni scelta di CCS, l'insieme S degli elementi separatori sia non vuoto. Allora il campo ordinato si dice* **completo***.*

Dimostreremo che tale proprietà è equivalente a quella che ogni sottoinsieme di R, non vuoto e superiormente limitato, abbia un estremo superiore. Controlleremo pure che, in un modo che preciseremo più avanti, questo assioma è equivalente a richiedere che R sia chiuso rispetto ad una certa operazione ... ma ... non diciamo altro per il momento. Concludiamo il discorso sulle classi separate tirando le fila del discorso.

OSSERVAZIONE 1.8. In un certo senso, che non preciseremo, un campo ordinato e completo è unico.

Quindi, a partire da un campo ordinato $(R, +, \cdot, \leq)$, l'imposizione della completezza, di fatto, *definisce* un oggetto ben preciso che indicheremo con $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$.

DEFINIZIONE 1.9. *Ogni campo ordinato e completo è denotato con* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$*.*

In pratica, vista l'unicità dichiarata nella precedente osservazione, questa definizione non è ambigua.

OSSERVAZIONE 1.10. Ci si potrebbe domandare se, a partire da questa definizione, sia possibile definire $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. La risposta è affermativa ed interessante. La omettiamo rimandando, per un trattamento esauriente, ai tanti testi che affrontano l'argomento.

1.1. Versioni equivalenti della completezza. Come precedentemente annunciato, la nostra definizione di completezza è del tutto equivalente a quella già introdotta nel primo capitolo mediante l'Assioma 1.1.

DEFINIZIONE 1.11. *Un campo ordinato R si dice* **completo** *se ogni suo sottoinsieme non vuoto e superiormente limitato ammette in R un estremo superiore.*

TEOREMA 1.12. *La Definizione 1.7 è equivalente alla Definizione 1.11.*

Dimostrazione del Teorema 1.12. Prima parte. Assumendo che ogni coppia di classi separate ammetta un elemento separatore, si vuole dimostrare che ogni insieme non vuoto, superiormente limitato, ammette estremo superiore.

Sia A un insieme non vuoto, superiormente limitato e sia M_A l'insieme dei suoi maggioranti di cui ricordiamo la definizione

$$M_A = \{x \in \mathbb{R} \quad : \quad \forall a \in A \quad , \quad x \geq a\} .$$

Verifichiamo preliminarmente che (A, M_A) è una CCS. Dobbiamo quindi verificare (1.4) e (1.5). Intanto A è non vuoto per ipotesi, mentre $M_A \neq \emptyset$ per via del fatto che A è superiormente limitato. Questo garantisce (1.4).

Ogni elemento di A è minore o uguale ad ogni elemento di B per costruzione. Quindi vale (1.5). Allora, per ipotesi, esiste $s \in S$. Resta da verificare che s è l'estremo superiore di A. In altre parole, per definizione di estremo superiore, si deve verificare che $s = \min B$. Quindi le seguenti due cose:

$$\forall b \in B , \quad s \leq b \qquad \text{e} \qquad s \in B .$$

La seconda affermazione è equivalente a

$$\forall a \in A \quad a \leq s .$$

Pertanto si deve avere

$$\forall a \in A \quad , \quad \forall b \in B \qquad a \leq s \leq b .$$

che segue dalla definizione di elemento separatore (1.7).

Seconda parte. Adesso verifichiamo l'implicazione inversa. Si vuole controllare che se ogni insieme non vuoto superiormente limitato ammette estremo superiore, allora ogni CCS ammette almeno un elemento separatore.

Sia (A, B) una CCS. Allora A è un insieme non vuoto e superiormente limitato (ogni elemento di B infatti è un maggiorante per A). Quindi, per ipotesi, A ammette un estremo superiore s_A. Si vuole controllare che s_A risulta essere un elemento separatore della CCS (A, B), ovvero si vuole verificare (1.6).

Intanto, per definizione di estremo superiore, si ha

$$\forall a \in A \quad a \leq s_A .$$

Resta da verificare che

$$\forall b \in B \quad s_A \leq b .$$

Per le proprietà dell'estremo inferiore e superiore si ha

$$\sup A = s_A \leq \inf B \leq b \quad , \quad \forall b \in B .$$

Questo completa la dimostrazione dell'equivalenza delle due formulazioni. ∎

Osservazione 1.13. Nell'Assioma 1.1 avevamo richiesto anche l'esistenza dell'estremo inferiore per insiemi non vuoti ed inferiormente limitati, ma è facile vedere che, in effetti, l'Assioma 1.1 potrebbe essere alleggerito richiedendo soltanto la 1) oppure soltanto la 2).

Osservazione 1.14. Un raffinamento dell'argomento precedente porta a concludere che data una CCS, (A, B) il suo insieme degli elementi separatori si caratterizza come segue

$$S \equiv [\sup A, \inf B] .$$

Esempio 1.15. Consideriamo una funzione non negativa e **limitata**, $f : [a, b] \to [0, +\infty)$. Riconsiderate il meccanismo mediante il quale si era definita l'integrabilità (vedi Calcolo I, Cap.7). Si producevano funzioni costanti a tratti di cui si sapeva calcolare l'integrale (questa era una delle regole analoga alla Regola 1 della nostra costruzione dell'area). In questo modo si producevano due insiemi numerici che avevamo denotato con $\underline{\mathcal{A}}(S_f; P)$ e $\overline{\mathcal{A}}(S_f; P)$. Essi approssimavano il valore desiderato rispettivamente dal basso e dall'alto. È chiaro che definendo

$$A \equiv \{\underline{\mathcal{A}}(S_f; P) \, : \, P \text{ partizione di } [a, b]\} \quad \text{e} \quad B \equiv \{\overline{\mathcal{A}}(S_f; P) \, : \, P \text{ partizione di } [a, b]\} ,$$

si deduce che A e B sono una CCS.

La proprietà di monotonia dell'integrale sulla classe delle funzioni costanti a tratti rappresentava l'analogo della Regola 3 nella costruzione dell'area.

In ogni caso, l'integrale di f, se esiste deve essere un elemento separatore della CCS. La completezza garantisce l'esistenza di un candidato. In questo linguaggio l'integrabilità della funzione f è equivalente alla richiesta che S sia composto da un unico elemento. In questo caso tale unico elemento sarà battezzato integrale di f.

A prescindere dalla completezza, come sappiamo, S può contenere addirittura un intervallo. Questo accade, ad esempio, se la funzione f è quella di Dirichlet.

Osservazione 1.16. Vale la pena di osservare che il discorso sull'Area di E anche se privo di molti dettagli fa capire che la completezza è strumento indispensabile, ma non sufficiente per definire l'Area di oggetti complicati. Quello che serve, in aggiunta, è una condizione di **unicità** che ci consenta di concludere che S è composto **soltanto** da un elemento.

La nostra costruzione dell'area può effettivamente essere precisata. Si definiscono i seguenti due numeri: area interna$(E) = \sup A$ e area esterna$(E) = \inf B$. Tralasciando i (molti) dettagli, l'idea è che la completezza fornisce un candidato ad essere l'Area di E. La richiesta che S contenga un solo elemento è equivalente alla richiesta dell'**esistenza** dell'Area di E. Un bel teorema afferma che f, definita in $[a, b]$, non negativa e limitata è integrabile se e solo se esiste l'area del sottoinsieme del piano individuato dal sottografico di f. Ricordiamo che tale insieme è definito da

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad : \quad x \in [a, b] \quad , \quad 0 \le y \le f(x)\} .$$

1.2. Una veloce carrellata su $\mathbb{N}$. Seguire la via assiomatica ha, fra i suoi svantaggi, quello di dover precisare cose che sembrano talmente ovvie da non meritare perdite di tempo. Facciamo lo stesso una brevissima digressione. Per cominciare, diamo la definizione dei naturali che "parte" dal campo ordinato $(R, +, \cdot, \le)$.

Osserviamo preliminarmente che sono stati già introdotti "zero" e "uno", rispettivamente elemento neutro delle operazioni "somma" e "prodotto".

Consideriamo la classe di tutti gli insiemi che sono *induttivi*.

Definizione 1.17. *Dato un campo ordinato* $(R, +, \cdot, \leq)$, *un sottoinsieme* A *di* R *si dice* **induttivo** *se gode della seguente proprietà:*

$$\text{se} \quad x \in A \quad \text{allora} \quad x + 1 \in A\,. \tag{1.8}$$

Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di tutti gli insiemi induttivi che, in aggiunta, contengono lo zero. Poiché R contiene lo zero ed è induttivo, $R \in \mathcal{F}$, pertanto la famiglia $\mathcal{F}$ è non vuota.

Definizione 1.18. *L'***insieme dei naturali***, denotato con* $\mathbb{N}$*, è l'intersezione fra tutti gli insiemi che sono induttivi e contengono lo zero.*

Osservazione 1.19. Per verificare che la precedente sia una buona definizione si deve verificare che tale insieme $\mathbb{N}$, come ci si aspetta, contenga lo zero e sia induttivo. Questo lo saltiamo senz'altro ma è veramente semplice da verificare.

A questo punto, con questa nuova definizione di $\mathbb{N}$, si può verificare ad esempio il principio del buon ordinamento, il principio di induzione, etc. . Da ora in poi parleremo di $\mathbb{N}$ consapevoli che esso può essere riconosciuto come un sottoinsieme del nostro campo ordinato. Una volta definito $\mathbb{N}$ la definizione di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ è quella che tutti si aspettano. Inoltre le varie proprietà di $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ dimostrate a suo tempo si possono verificare nuovamente.

Forse vale la pena di fare una pausa ricreativa (gentilmente offerta da B. Russel). Facciamo osservare che l'errore logico che si era fatto nell'assumere l'esistenza dell'Area è oggetto di vari giochini matematici. Ad esempio il seguente.

Sia N_M il più grande intero, allora

$$N_M \geq (N_M)^2$$

in quanto $(N_M)^2$ è anch'esso intero. Quindi se $N_M \neq 0$,

$$N_M \geq (N_M)^2 \quad \Rightarrow \quad N_M(1 - N_M) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - N_M \geq 0 \quad \Rightarrow$$
$$N_M = 1 \quad \text{oppure} \quad N_M = 0 \quad \text{quindi} \quad N_M = 1\,.$$

Detto in altri termini, le condizioni necessarie, senza un'affermazione di esistenza, rischiano di essere paradossali.

1.3. $\mathbb{R}$ è Archimedeo. Archimede affermò la seguente cosa:

"Presi due segmenti qualsiasi di lunghezza rispettivamente s_1 ed s_2, esiste sempre un multiplo di s_2 che eccede s_1."

Detto in termini meno parolai, la frase è equivalente alla seguente:

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad , \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad : \quad n > a\,. \tag{1.9}$$

Osserviamo preliminarmente che leggere modifiche degli argomenti che portavano a concludere la non esistenza in $\mathbb{Q}$ dell'estremo superiore dell'insieme

$$E \equiv \{q \in \mathbb{Q} \quad : \quad q \geq 0 \quad \text{e} \quad q^2 \geq 2\}\,.$$

portano a concludere che nel campo ordinato $(R, +, \cdot, \leq)$ la coppia di insiemi

$$A \equiv \{q \in \mathbb{Q} \quad : \quad q < 0\} \cup \{q \in \mathbb{Q} \quad : \quad q \geq 0\,, q^2 < 2\}$$

e

$$B \equiv \{q \in \mathbb{Q} \quad : \quad q \geq 0 \quad \text{e} \quad q^2 > 2\}$$

formano una CCS per la quale l'insieme degli elementi separatori è vuoto. L'insieme dei razionali, dunque, è un esempio di campo ordinato $(R, +, \cdot, \leq)$ non completo. Ci si può chiedere se $\mathbb{Q}$ soddisfi la proprietà di Archimede. Se sorvolate sul fatto che non abbiamo definito $\mathbb{Q}$ in maniera rigorosa, e vi fidate che la "nuova" definizione accennata nella Sezione 1.2 porta a definire il "solito" familiare insieme dei razionali è facile verficare che in effetti $\mathbb{Q}$ è Archimedeo (ossia verifica la proprietà (1.9)).

Adesso poniamoci le seguenti due questioni.

Primo. $\mathbb{R}$ è Archimedeo?

Secondo. Se la risposta alla prima domanda è affermativa, come si dimostra?

La risposta alla prima domanda è rassicurante in quanto affermativa (Archimede aveva ragione). La risposta alla seconda fa gelare il sangue. Almeno a chi scrive. Il motivo è che la cosa è talmente evidente... Ahi! Quando le cose sembrano molto evidenti, ma sfugge la dimostrazione si viene indotti a pensare che forse siano evidenti nel senso degli assiomi, ovvero indimostrabili senza di essi. Questo è esattamente il caso.

Non tutti i campi ordinati $(R, +, \cdot, \leq)$ *sono Archimedei!*

In altre parole esistono mostri orribili che, pur essendo campi ordinati, non soddisfano la proprietà di Archimede!!

La buona notizia invece è la seguente: la completezza del campo ordinato $(R, +, \cdot, \leq)$ implica la proprietà di l'Archimede. In altre parole si ha il seguente utilissimo risultato.

TEOREMA 1.20. *Il campo ordinato completo* $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ *è Archimedeo.*

Dimostrazione. Se, per assurdo, la proprietà di Archimede non valesse, allora $\mathbb{N}$ sarebbe (non vuoto e) superiormente limitato. Quindi esisterebbe un naturale che ne è il suo estremo superiore N_M (arieccolo!). Quindi $N_M - 1 \in \mathbb{N}$ e $N_M - 1 < N_M$. Quindi esiste $(N_M = \sup \mathbb{N})$ $n \in N$ tale che $n > N_M - 1$. Poichè allora $n+1 \in \mathbb{N}$ (qui i motivi cambiano a seconda della definizione di $\mathbb{N}$ ma la proprietà è comunque vera), si ha $n_1 = n+1 > N_M$. Quindi $n_1 \in \mathbb{N}$ e $n_1 > \sup \mathbb{N}$. Una palese contraddizione. ∎

ESERCIZIO 1.21. Definite la funzione parte intera di x. Notato niente? Avete assaporato l'uso della completezza?!?

1.4. La completezza alla Cauchy. Entrambe le formulazioni che abbiamo proposto hanno il vantaggio della semplicità. Il loro svantaggio è che sono tipiche della retta reale. Non avrebbe senso applicare quelle ricette nel piano reale (o complesso). Il motivo risiede nel fatto che entrambe usano la nozione di ordinamento. Si può dimostrare che è impossibile mettere un "ordinamento" con le buone proprietà nel piano reale o complesso che sia. Un modo diverso (più sofisticato in una certa misura) ma molto fecondo di introdurre la completezza è quello di usare, nella definizione, la nozione di "distanza".

Prima di passare a definizioni formali, osserviamo il seguente fatto importante. Supponiamo che a_n sia una successione di numeri reali convergente al numero reale a. Allora accade certamente che, da un certo indice in poi, tutti gli elementi della successioni sono vicini ad a **e quindi fra di loro**. Scritto in maniera leggermente meno fumosa accade che

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall m, l \in \mathbb{N} \quad : \quad l, m \geq n_0 \quad , \quad |a_l - a_m| \leq \epsilon \, . \tag{1.10}$$

Infatti se a_n converge ad a si ha

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \tilde{n} \in \mathbb{N} \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad n \geq n^0 \quad , \quad |a_n - a| \leq \frac{\epsilon}{2} \, .$$

Scegliamo dunque $\bar{n} = \tilde{n}$. Allora la dimostrazione di (1.10) è una immediata conseguenza della disuguaglianza triangolare:

$$|a_l - a_m| = |a_l - a + a - a_m| \leq |a_l - a| + |a_m - a| \, .$$

Quindi la convergenza implica la "vicinanza" di tutti gli elementi della successione con la sola eccezione di un numero finito di indici. Se preferite "da un certo indice in poi".

Definizione 1.22. *Una successione che verifichi (1.10) si dice* **fondamentale** *o* **di Cauchy**.

In questo linguaggio abbiamo appena verificato che ogni successione convergente è di Cauchy. Cerchiamo di essere più precisi. La successione poteva essere presa in R piuttosto che in $\mathbb{R}$? La risposta è affermativa. Abbiamo usato la disuguaglianza triangolare, la nozione di "distanza" fra a_l e a_m definita in maniera naturale dalla lunghezza del segmento che congiunge le rappresentazioni di a_l e a_m sulla retta reale.

Notiamo però che è possibile esibire una successione di razionali che, pur essendo fondamentale, non converge in $\mathbb{Q}$. Basta prendere delle approssimazioni per difetto e per eccesso di "radice di due" mediante razionali. In alternativa si potrebbe considerare la successione $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$. Quindi in un campo ordinato $(R, +, \cdot, \leq)$ le successioni fondamentali non sempre convergono. Vi sono successioni che pur essendo formate da punti vicini fra loro hanno la tendenza a "scappare all'esterno" dell'insieme ambiente. Questo fenomeno dice che l'insieme ambiente, in un certo senso, non è chiuso rispetto all'operazione di passare al limite nei suoi elementi.

Per comprendere il fenomeno, si dimentichi per il momento la richiesta di essere un campo ordinato. Un esempio particolarmente semplice si ha se si prende come insieme ambiente l'insieme $X \equiv (0,1]$. In questo caso la successione fondamentale $\{\frac{1}{n}\}$ non converge in X e se ne scappa all'esterno di esso nel senso che, vista come successione in $\mathbb{R}$, essa converge a zero. Questa spiacevole fisiologia può essere curata (se considerata una patologia). Il modo per farlo si chiama il *completamento* (di uno spazio metrico). Non vogliamo, per il momento, spiegare cosa sia uno spazio metrico. Contentiamoci di affermare (lo verificheremo prima della fine del corso) che oltre ad R (in particolare $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$), anche il piano reale e complesso possono essere pensati come spazi metrici (cioè insiemi in cui sia possibile definire una "distanza" che goda delle proprietà che tutti si aspettano). Questo aspetto avvicina gli spazi a più dimensioni al nostro amatissimo $\mathbb{R}$.

Nel caso in cui si accetti, come noi abbiamo fatto, la Definizione 1.7 oppure la 1.11 come la definizione "primitiva" di completezza, la definizione "alla Cauchy" diventa un teorema, talvolta chiamato *criterio di Cauchy* (ma di criteri che portano il nome di questo eccelso matematico ne esistono vari).

Teorema 1.23. *Se la successione $\{a_n\}$ è fondamentale in $\mathbb{R}$, allora converge.*

Esempio 1.24. La successione

$$a_n = (-1)^n$$

non è fondamentale in $\mathbb{R}$. Infatti comunque si scelga n_0 si possono trovare due indici (ad esempio $l = n_0 + 1$ e $m = n_0 + 2$) per i quali $|a_l - a_m| = 2$. Pertanto la scelta $\epsilon = 1$ manda in rovina la speranza che la successione sia fondamentale.

Dimostrazione del Teorema 1.23. Cominciamo con l'osservare che la successione, essendo di Cauchy, è pure limitata. Infatti fissato $\epsilon = 1$, ad esempio, sia n_0 il corrispondente indice nella definizione (1.10). Allora si ha che per ogni indice l maggiore di n_0, $|a_l - a_{n_0}| \leq 1$. Pertanto per ogni $l > n_0$, si ha $|a_l| \leq |a_{n_0}| + 1$. Quindi una stima, rozza ma sufficiente, è

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad |a_n| \leq \max(M, |a_{n_0}| + 1) \quad \text{con} \quad M = \max_{0 \leq i \leq n_0} |a_i| \,.$$

A questo punto invochiamo Bolzano-Weierstrass. Esiste una sottosuccessione convergente a_{n_k} che converge ad un numero reale A. Quindi, fissato $\epsilon > 0$, esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall k \geq k_0 \quad |a_{n_k} - A| < \epsilon \,.$$

Infine per concludere che l'intera successione converge, triangoliamo: comunque si scelga $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$|a_n - A| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - A| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A| \,.$$

Fissato $\epsilon > 0$ scegliamo $n > n_0$ e k tale che simultaneamente $k > k_0$ e $k > n_0$ (ovvero $k > \max(k_0, n_0)$). Questo assicura in particolare (le sottosuccessioni sono funzioni strettamente crescenti!) che $n_k > n_0$. A questo punto ci spariamo sia la condizione di convergenza della sottosuccessione, che la condizione di vicinanza di Cauchy ed il gioco è fatto. ■

A questo punto spieghiamo l'idea della costruzione-definizione alla Cauchy. Supponiamo di aver riconosciuto $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ come sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Consideriamo una successione di razionali e supponiamo che sia di Cauchy.

Abbiamo sottolineato che potrebbe non convergere in $\mathbb{Q}$. Si era detto nel primo paragrafo delle note di Calcolo I che, il problema risiede nel fatto che "$\mathbb{Q}$ è bucato". Uno dei buchi è in "$\sqrt{2}$". La cura proposta da Cauchy è di "riempire i buchi". Per fare questo si pensa alle successioni di razionali che sono di Cauchy come ad un nuovo elemento (numero) che si aggiunge alla lista di quelli esistenti. Un modo tanto semplice non funziona principalmente a causa del fatto che ci sono tante successioni di Cauchy che cercano di convergere allo stesso nuovo elemento. Questa ambiguità si cura in un modo molto astratto introducendo "classi di equivalenza" di successioni. Quello che vale la pena di dire sono almeno tre cose.
Primo. Questo procedimento porta ad una nuova definizione di $\mathbb{R}$ che risulta equivalente alle precedenti.
Secondo. Il procedimento porta ad uno spazio in cui le successioni sono convergenti se e solo se sono di Cauchy.

Terzo. Questo approccio, al contrario di tutti gli altri finora introdotti, funziona ad esempio nel piano. Si prende una successione di "coppie ordinate di numeri" come (a_n, b_n) con a_n e b_n razionali. Si dice che la successione è fondamentale se, per ogni $\epsilon > 0$, da un certo indice in poi tutti i punti del piano di coordinate (a_n, b_n) si trovano in un disco di raggio ϵ. Si "riempiono i buchi" e si trova, in questo caso $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, un insieme con tante belle proprietà comuni ad $\mathbb{R}$, che ha perso l'ordinamento (messaggi di cordoglio si susseguono da tutto il pianeta) e nel quale le successioni sono convergenti se e solo se sono di Cauchy.

CAPITOLO 2

Le serie numeriche

1. Definizioni ed esempi.

Non tutte le successioni "immaginabili" sono suscettibili di una definizione "comoda", ovvero di una forma analitica che permetta, dato n, di calcolare esplicitamente l'n-simo elemento della successione, come ad esempio $a_n = n$, o $a_n = \sin(n) - n^2$. In alcuni casi, si pensi ad esempio alla successione "$a_n = n$-simo numero primo", non c'è espressione analitica esplicita del valore, il che vuol dire che, per studiare le proprietà della successione, è necessario usare altre tecniche. Ad esempio, una volta dimostrato che esistono infiniti numeri primi, la successione "$a_n = n$-simo numero primo" diverge (dato che è monotona strettamente crescente).

Un altro caso — molto importante — di famiglia di successioni per le quali è talvolta necessario conoscere il comportamento al limite senza conoscere gli elementi della successione in maniera analitica, è quello delle cosiddette *serie numeriche*.

Definizione 1.1. Sia a_k una successione di numeri reali. Definiamo **serie numerica** (o **serie**) **associata** ad a_k, o **serie di termine generico** a_k, la successione S_n il cui termine generico è dato da

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \,.$$

Se la successione S_n converge ad un numero reale S, la serie si dice **convergente**; se il limite di S_n non è finito la serie si dice **divergente**, mentre si dice **indeterminata** se S_n non ha limite (finito o infinito che sia). Nel caso in cui la successione S_n converga ad S si scrive

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \,,$$

e S si definisce la **somma della serie**.

Esempio 1.2. Sia $a_k = 1$ per ogni k in $\mathbb{N}$. La serie S_n associata ad a_k è evidentemente

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1 \,. \tag{1.1}$$

Pertanto, la serie diverge. Sia $a_k = k$ per ogni k in $\mathbb{N}$. La serie S_n associata ad a_k è allora

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \,.$$

Anche in questo caso, la serie diverge. Sia $a_k = 2^k$ per ogni k in $\mathbb{N}$. Ricordando la formula che dà la somma della serie geometrica, la serie (divergente) S_n associata ad a_k è allora

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1\,.$$

Se, invece, $a_k = 2^{-k}$ per ogni k in $\mathbb{N}$, la serie associata S_n è

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}\,,$$

che tende a 2 per n tendente ad infinito; in questo caso, la serie converge. In generale, se $q \neq 1$, e se $a_k = q^k$ per ogni k in $\mathbb{N}$, la serie S_n associata ad a_k è data da

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\,. \tag{1.2}$$

Si ha, evidentemente, che S_n diverge se $q \geq 1$ (se $q = 1$ abbiamo la prima serie studiata in questo esempio), converge a $\frac{1}{1-q}$ se $-1 < q < 1$, mentre è indeterminata se $q \leq -1$.

Esempio 1.3. Un caso particolare della serie associata ad una progressione geometrica è il caso $q = -1$. Se scriviamo i primi termini della successione S_n definita da

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\,,$$

troviamo $S_0 = 1$, $S_1 = 0$, $S_2 = 1$, $S_3 = 0$, e così via, con i valori 0 e 1 che si alternano. Al giorno d'oggi — forti del concetto rigoroso di limite — sappiamo che una successione fatta in questo modo non converge, ma quando in passato si presentò questo esempio, ed il concetto di somma di una serie come limite di una successione non era ancora ben codificato, furono parecchie le dispute attorno al "risultato corretto":

1) se $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$, allora $S = 0$; infatti

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0\,;$$

2) se $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$, allora $S = 1$; infatti

$$S = 1 - (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots = 1\,;$$

3) se $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$, allora $S = \frac{1}{2}$; infatti

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots = 1 - S \implies 2S = 1 \implies S = \frac{1}{2}\,.$$

In altre parole, dal momento che la successione delle somme parziali non è convergente (secondo il concetto di convergenza oggi adottato), non è possibile usare l'associatività della somma e sperare di ottenere sempre lo stesso risultato (o di ottenerne uno che sia "migliore" degli altri). Volendo, si potrebbe "dimostrare" che S assume un qualsiasi valore in $\mathbb{Z}$, riordinando opportunamente i termini.

Se, invece, la serie converge “bene”[1], si ottiene lo stesso risultato S qualsiasi sia la “regola” scelta per sommare i vari termini della successione. Ad esempio, se $-1 < q < 1$ abbiamo

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}\,,$$

ma anche

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k+1}\,.$$

Infatti

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - q^{2n+2}}{1 - q^2} = \frac{1}{1 - q^2}\,,$$

e

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k} = q \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k = \lim_{n \to +\infty} q\, \frac{1 - q^{2n+2}}{1 - q^2} = \frac{q}{1 - q^2}\,,$$

e si ha

$$\frac{1}{1 - q^2} + \frac{q}{1 - q^2} = \frac{1 + q}{1 - q^2} = \frac{1}{1 - q}\,.$$

Lo stesso risultato si otterrebbe sommando prima sui multipli di 3, poi sui multipli di 3 più 1, ed infine sui multipli di 3 più 2, o sommando in una maniera “qualsiasi” (purché corretta — ovvero senza ripetere i termini).

Si noti che nel caso $-1 < q < 0$ (quando cioè i termini della serie sono a segno alterno), spezzando la somma sugli indici pari e dispari si ottengono due serie a termini di segno costante, ed entrambe convergenti.

Nell’esempio precedente abbiamo visto un caso nel quale il metodo scelto per il calcolo delle somme parziali di una serie modificava il risultato finale, ed un esempio nel quale la somma della serie era indipendente dal metodo scelto; nel primo caso si perdeva una delle proprietà “naturali” della somma, l’associatività, mentre nel secondo era conservata. In definitiva, in alcuni casi la somma della serie si comporta come (e quindi è) una vera e propria somma, mentre in altri no. Quale sia la condizione giusta da imporre sulla serie affinché il suo comportamente sia quello di una “somma” vedremo in seguito (primo indizio: non è la richiesta che la serie converga).

Esercizio 1.4. Supponiamo di avere a disposizione un numero infinito di mattoni tutti uguali, omogenei e di lunghezza unitaria. Poggiamo il primo mattone a terra, perfettamente in piano; successivamente sistemiamo un secondo mattone esattamente sotto il primo. Spostiamo ora il secondo mattone verso destra, facendolo scorrere finché il sistema resta in equilibrio. È chiaro che possiamo spostarlo verso destra esattamente di mezza unità. Mettiamo ora un terzo mattone sotto il secondo, e facciamolo scorrere verso destra finché il sistema resta in equilibrio. Quanto possiamo spostarlo? Possiamo arrivare fino

[1]In un senso che sarà precisato in seguito.

al punto in cui l'estremo sinistro del terzo mattone si trova esattamente sotto il baricentro del sistema composto dai primi due mattoni. Adesso mettiamo un quarto mattone, e ripetiamo l'operazione; e così via. Dopo n mattoni, dove si trova l'estremo destro x_n dell'n-simo mattone se l'estremo sinistro del primo mattone è nell'origine?

Risposta 1.4: Come detto, l'estremo sinistro dell'n-simo mattone deve coincidere con il baricentro del sistema formato dai primi $n-1$ mattoni. Dove si trova quest'ultimo? Il baricentro del primo mattone, b_1, si trova nel punto $\frac{1}{2}$. Mettendo il secondo mattone e spostandolo verso destra finché il suo estremo destro non si trova sotto b_1, il baricentro del sistema dei primi 2 mattoni è dato da

$$b_2 = \frac{1}{2}\left[1 \cdot b_1 + \left(b_1 + \frac{1}{2}\right)\right],$$

ovvero, per $n = 2$,

$$\frac{1}{\text{peso degli } n \text{ mattoni}},$$

per la somma tra

$$(\text{peso dei primi } n-1 \text{ mattoni}) \cdot (\text{baricentro dei primi } n-1 \text{ mattoni}),$$

e

$$(\text{peso di un mattone}) \cdot (\text{baricentro dell'}n\text{-simo mattone}).$$

Generalizzando, la formula per il calcolo di b_n è

$$b_n = \frac{1}{n}\left[(n-1) \cdot b_{n-1} + \left(b_{n-1} + \frac{1}{2}\right)\right] = b_{n-1} + \frac{1}{2n}.$$

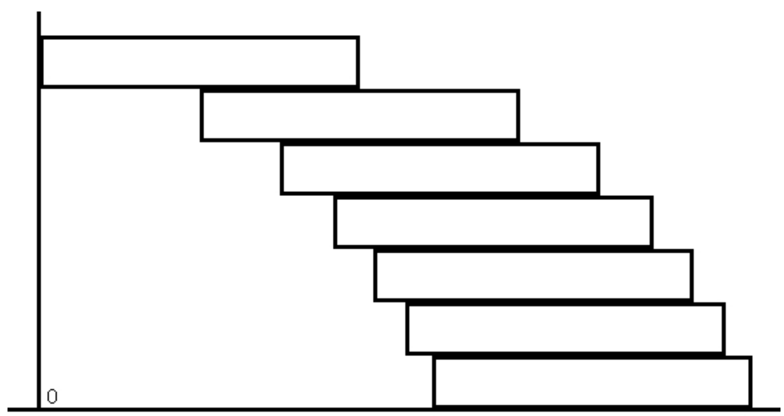

Figura 1.

Ovviamente, l'estremo destro dell'n-simo mattone si trova in $b_{n-1} + 1$, cosicché

$$x_n = b_{n-1} + 1 = b_{n-2} + \frac{1}{2(n-1)} + 1 = b_{n-3} + \frac{1}{2(n-2)} + \frac{1}{2(n-1)} + 1 = \ldots = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k},$$

da cui

$$x_n = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Una volta svolto l'esercizio precedente, ci troviamo davanti al problema di calcolare esplicitamente x_n. Dalla definizione di serie, è chiaro che x_n è esattamente il termine $(n-1)$-simo della serie associata alla successione a_k che vale $\frac{1}{2k}$ per ogni $k \geq 1$, e $a_0 = 1$, ma non abbiamo alcuna idea di quanto valga realmente x_n. Quello che possiamo però chiederci è cosa succede alla successione x_n quando n tende all'infinito. Converge? Diverge?

Per semplicità, consideriamo solo

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,,$$

che è la cosiddetta **serie armonica**. Iniziamo ad osservare che la successione S_n è monotona strettamente crescente. Infatti $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{n+1} > S_n$. Pertanto S_n ammette limite, finito o più infinito che sia. Inoltre, tale limite coincide con quello di una qualsiasi sottosuccessione estratta da S_n. Consideriamo allora la sottosuccessione corrispondente a 2^k, ovvero la sottosuccessione S_{2^k}, con $k \geq 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1\,, \\
S_2 &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)\,, \\
S_4 &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right]\,, \\
&\ldots \\
S_{2^k} &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] + \ldots + \left\{\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right\}.
\end{aligned}$$

Notiamo che nelle parentesi tonde c'è un solo termine, uguale a $\frac{1}{2}$, nelle parentesi quadre ci sono due termini, entrambi maggiori di $\frac{1}{4}$, mentre nelle parentesi graffe ci sono esattamente 2^{k-1} termini, tutti maggiori di $\frac{1}{2^k}$. Pertanto,

$$\begin{aligned}
S_{2^k} &\geq 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] + \ldots + \left\{\frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right\} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k}{2}\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, S_{2^k} diverge a più infinito, e quindi S_n diverge a più infinito. Con calcoli analoghi, raggruppando diversamente i termini, si può dimostrare che S_{2^k-1} è minore di $1+k$. Questo significa che S_n è compresa tra $c_1 \log_2(n)$ e $c_2 \log_2(n)$, con c_1 e c_2 costanti opportune. Che l'andamento di S_n fosse di tipo logaritmico (il che vuol dire che diverge sì, ma molto lentamente) lo si poteva dedurre anche dall'immagine della "scala" che definisce S_n.

Per rafforzare questa convinzione, ecco una seconda dimostrazione del fatto che la serie S_n diverge. Consideriamo la restrizione della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ all'intervallo $[k, k+1]$ con $k > 0$; su tale intervallo la funzione è continua, dunque integrabile; inoltre, essendo decrescente, si ha

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}\,.$$

Integrando,

$$\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{dx}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{k} = \frac{1}{k}\,.$$

Ricordando che $\ln(x)$ è una primitiva di $f(x)$, si ha allora

$$\frac{1}{k} \geq \ln(x)|_{x=k}^{x=k+1} = \ln(k+1) - \ln(k)\,.$$

Pertanto,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln(k)] = \ln(n+1)\,.$$

Dal momento che $\ln(n+1)$ diverge, anche S_n diverge (e con andamento logaritmico).

Come conseguenza del fatto che S_n diverge, accumulando un numero sufficientemente elevato di mattoni è possibile allontanarsi indefinitamente dal primo mattone, a patto però di salire molti gradini: infatti, per spostarsi di 5 unità (ovvero $x_n > 5$), servono 1675 mattoni, essendo

$$x_{1674} = 4.999944100215333\,, \qquad x_{1675} = 5.000242785997889\,.$$

Appare dunque evidente la necessità di usare del cemento per "incollare" i gradini di una scala, in modo da poter arrivare da qualche parte in tempo finito...

Ricapitolando, è possibile che alcune serie (in realtà, la maggior parte di esse) non abbiano un'espressione esplicita in termini analitici del termine generico, ed è quindi necessario ricorrere ad altri strumenti per dimostrarne la convergenza (o la divergenza); nel caso della serie associata alla successione $\frac{1}{k}$, abbiamo concluso che la serie divergeva osservando 1) che ammetteva limite essendo monotona crescente e 2) calcolando tale limite per mezzo di stime su una sottosuccessione (che ha, comunque, lo stesso limite della successione di partenza).

2. Serie a termini positivi

Nell'esempio della serie armonica abbiamo usato il fatto che, essendo la successione a_k non negativa, la successione S_n era monotona crescente, e pertanto ammetteva sempre limite. Questo è, ovviamente, un fatto generale.

TEOREMA 2.1. *Sia a_k una successione di numeri reali per la quale esiste k_0 in $\mathbb{N}$ tale che $a_k \geq 0$ per ogni $k \geq k_0$. Allora la serie di termine generico a_k ammette limite (finito, o più infinito).*

Dimostrazione. Se $n \geq k_0$, allora $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$. Pertanto, S_n è monotona crescente per $n \geq k_0$ e quindi ammette limite. ■

Notiamo *en passant* che la condizione di segno su a_k è richiesta da un certo punto in poi: come già per le successioni, modificando un numero finito degli a_k non cambia la convergenza della serie associata (anche se, e diversamente da quanto accade per il limite di una successione, cambia ovviamente il valore della somma della serie).

Esistono delle ipotesi sulla successione a_k che "garantiscano" la convergenza della serie associata? Ahimé, no. Esiste però una condizione che deve essere necessariamente verificata se la serie è convergente.

TEOREMA 2.2. *Sia a_k una successione di numeri reali tale che la serie associata S_n sia convergente. Allora a_k tende a zero.*

Dimostrazione. Sia S la somma della serie, ovvero il limite di S_n. Siccome la sottosuccessione S_{n+1} converge anch'essa ad S, e si ha $S_{n+1} - S_n = a_n$, ne segue che a_n tende a zero come differenza tra due successioni che hanno lo stesso limite finito. ■

Come conseguenza del teorema precedente, se la successione a_k **non** tende a zero, la serie associata non può convergere. Se la successione a_k è non negativa e non tende a zero, allora la serie associata non può che divergere positivamente. Si osservi che la condizione di convergenza a zero di a_k è una condizione necessaria, ma non sufficiente: ad esempio, la serie armonica ha il termine generico tendente a zero, ma non è convergente.

Dal momento che in generale non è possibile calcolare esplicitamente il valore di S_n, l'unica cosa che si può dire di una serie e se essa converga o meno. A tal proposito sono utili i seguenti teoremi.

TEOREMA 2.3 (Criterio del confronto). *Siano a_k e b_k due successioni di numeri reali, con $0 \leq a_k \leq b_k$ per ogni k in $\mathbb{N}$. Se la serie associata ad a_k diverge, la serie associata a b_k diverge; se la serie associata a b_k converge, la serie associata ad a_k converge.*

Dimostrazione. È sufficiente osservare che le serie associate ad a_k e b_k ammettono limite (essendo a termini non negativi), e che la successione delle somme parziali associata ad a_k è maggiorata dalla successione delle somme parziali associata a b_k. Per ottenere la tesi, basta allora applicare i teoremi di confronto tra successioni. ■

Al solito, per ottenere la tesi del precedente teorema è sufficiente che la condizione $0 \leq a_k \leq b_k$ sia soddisfatta per ogni $k \geq k_0$.

TEOREMA 2.4 (Criterio del confronto asintotico). *Siano a_k e b_k due successioni di numeri reali non negativi, e supponiamo che $b_k \neq 0$ per k sufficientemente grande, e che*

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{a_k}{b_k} = L \,,$$

con L numero reale maggiore di zero. Allora le serie associate ad a_k e b_k o convergono entrambe, o divergono entrambe.

Dimostrazione. Se $\frac{a_k}{b_k}$ converge ad $0 < L < +\infty$, allora

$$\frac{L}{2} \leq \frac{a_k}{b_k} \leq \frac{3L}{2} \,,$$

per ogni k sufficientemente grande. Pertanto (ricordando che b_k è non negativa),

$$\frac{L}{2}\, b_k \leq a_k \leq \frac{3L}{2}\, b_k \,.$$

Per ottenere la tesi, è sufficiente applicare il teorema precedente, osservando che la serie di termine generico $\frac{L}{2}\,b_k$ (o $\frac{3L}{2}\,b_k$) ha lo stesso comportamento della serie di termine generico b_k. ∎

Se il limite vale 0, o infinito, il teorema precedente è vero "solo a metà".

Teorema 2.5 (Criterio del confronto asintotico – 2). *Siano a_k e b_k due successioni di numeri reali non negativi, e supponiamo che*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = 0\,.$$

Se la serie associata ad a_k diverge, diverge anche la serie associata a b_k; se quest'ultima converge, converge anche la serie associata ad a_k. Se, invece

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = +\infty\,,$$

i ruoli di a_k e b_k sono scambiati.

Dimostrazione. Se $\frac{a_k}{b_k}$ tende a zero, allora per k sufficientemente grande si ha $0 \le a_k \le b_k$, e si può applicare il Teorema 2.3. Se $\frac{a_k}{b_k}$ diverge, allora per k sufficientemente grande si ha $a_k \ge b_k \ge 0$, e si può applicare il Teorema 2.3. ∎

I teoremi precedenti sono utili nel caso in cui si sappia "confrontare", o "confrontare asintoticamente" una serie con un'altra, della quale si conosce il comportamento; sfortunatamente, di serie "note" ne abbiamo a disposizione — per ora — solo un paio: le serie geometriche, e la serie armonica. I prossimi risultati danno dei criteri di convergenza per una sola serie, e ci forniranno quindi molti più esempi.

Teorema 2.6 (Criterio della radice). *Sia a_k una successione di numeri non negativi e sia*

$$L = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k}\,.$$

Se $0 \le L < 1$, la serie di termine generico a_k converge, se $L > 1$ la serie diverge. Se $L = 1$ la serie può sia convergere che divergere.

Dimostrazione. Consideriamo il caso $0 \le L < 1$; sia $\varepsilon > 0$ tale che $L + \varepsilon < 1$ (ad esempio, $L = \frac{1-L}{2}$). Dal momento che la radice k-sima di a_k converge a L, esiste k_ε in $\mathbb{N}$ tale che

$$0 \le \sqrt[k]{a_k} \le L + \varepsilon\,, \qquad \forall k \ge k_\varepsilon\,,$$

e quindi

$$0 \le a_k \le (L+\varepsilon)^k\,, \qquad \forall k \ge k_\varepsilon\,.$$

Siccome la serie di termine generico $(L+\varepsilon)^k$ converge (essendo $L + \varepsilon < 1$), il fatto che la serie di termine generico a_k converga segue dal criterio del confronto.

Se, invece, $L > 1$, scegliendo $\varepsilon = \frac{L-1}{2} > 0$, esiste k_ε in $\mathbb{N}$ tale che

$$a_k \ge (L-\varepsilon)^k = \left(\frac{L+1}{2}\right)^k > 1\,, \qquad \forall k \ge k_\varepsilon\,.$$

Pertanto a_k non tende a zero, e dunque la serie associata diverge. ∎

Osservazione 2.7. Osserviamo che per la dimostrazione non abbiamo usato il fatto che la radice k-sima di a_k converge a L, ma solo il fatto che la radice k-sima di a_k è definitivamente minore di un numero (fissato) strettamente minore di 1 (ovvero, definitivamente maggiore di un numero strettamente maggiore di 1). In altre parole, *se esiste $L < 1$ tale che $\sqrt[k]{a_k} \leq L$ per ogni $k \geq k_0$, la serie converge, mentre diverge se esiste $L > 1$ tale che $\sqrt[k]{a_k} \geq L$ per ogni $k \geq k_0$.*

Teorema 2.8 (Criterio del rapporto). *Sia a_k una successione di numeri positivi e sia*

$$L = \lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}\,.$$

Se $0 \leq L < 1$, la serie di termine generico a_k converge, se $L > 1$ la serie diverge. Se $L = 1$ la serie può sia convergere che divergere.

Dimostrazione. Sia $0 \leq L < 1$ e sia $\varepsilon > 0$ tale che $L + \varepsilon < 1$. Per ipotesi, esiste k_ε in $\mathbb{N}$ tale che

$$0 \leq \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq L + \varepsilon\,, \qquad \forall k \geq k_\varepsilon\,.$$

Sia $k > k_\varepsilon$; allora (essendo $a_k > 0$),

$$0 \leq a_{k+1} \leq (L+\varepsilon)\, a_k \leq (L+\varepsilon)^2\, a_{k-1} \leq \ldots \leq (L+\varepsilon)^{k-k_\varepsilon+1}\, a_{k_\varepsilon}\,.$$

Dal momento che la serie di termine generico $(L+\varepsilon)^{k-k_\varepsilon+1}$ converge, anche la serie di termine generico a_k converge per il criterio del confronto.

Se $L > 1$ la tesi segue come nel teorema precedente, mostrando che la successione a_k non tende a zero. ∎

Osservazione 2.9. Come già per il criterio della radice, anche in questo caso, *se esiste $L < 1$ tale che $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq L$ per ogni $k \geq k_0$, la serie converge, mentre diverge se esiste $L > 1$ tale che $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq L$ per ogni $k \geq k_0$.*

Osservazione 2.10. Il criterio della radice ed il criterio del rapporto sembrano apparentemente intercambiabili. In realtà, il criterio della radice è "migliore" del criterio del rapporto; consideriamo ad esempio la successione

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2^k} & \text{se } k \text{ è pari,} \\[2ex] \dfrac{1}{3^k} & \text{se } k \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Per questa successione, la radice k-sima di a_k è minore o uguale a $\frac{1}{2}$ (e quindi la serie converge per l'Osservazione 2.7), ma il rapporto fra a_{k+1} e a_k non è limitato (dimostrarlo!).

Se prendiamo in considerazione la serie di termine generico $\frac{1}{k}$, vale a dire la serie armonica, sia il criterio della radice che il criterio del rapporto danno come risultato 1 — un caso non coperto da entrambi i teoremi. Se, infatti, andiamo a rivedere la dimostrazione del fatto che la serie armonica diverge, notiamo che abbiamo usato un'idea diversa. Tale idea è alla base del prossimo criterio di convergenza per serie a termini positivi.

Teorema 2.11 (Criterio di Cauchy). *Sia a_k una successione* **decrescente** *e tendente a zero. Allora la serie di termine generico a_k, e la serie di termine generico $2^k\, a_{2^k}$ o convergono entrambe, o divergono entrambe.*

Dimostrazione. Ricordiamo che, essendo $a_k \geq 0$, la serie è a termini positivi e quindi la successione delle somme parziali ha limite (finito o infinito); inoltre, tale limite coincide con il limite di una qualunque sottosuccessione. Si ha, ricordando che a_k è decrescente

$$\begin{aligned} S_{2^k-1} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \ldots + a_{2^{k-1}} + \ldots + a_{2^k-1} \\ &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + a_8 + \ldots + (a_{2^{k-1}} + \ldots + a_{2^k-1}) \\ &\leq 1\, a_1 + 2\, a_2 + 4\, a_4 + \ldots + 2^{k-1}\, a_{2^{k-1}} = \sum_{n=0}^{k-1} 2^n\, a_{2^n}\,. \end{aligned}$$

Pertanto, se S_n diverge, allora S_{2^k-1} diverge e quindi $\sum_{n=0}^{k-1} 2^n\, a_{2^n}$ diverge, mentre se $\sum_{n=0}^{k-1} 2^n\, a_{2^n}$ converge, S_{2^k-1} converge e quindi anche S_n. Abbiamo così dimostrato metà teorema. Per l'altra metà, sempre usando la decrescenza di a_k,

$$\begin{aligned} S_{2^k} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \ldots + a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k} \\ &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \ldots + (a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}) \\ &\geq a_1 + 1\, a_2 + 2\, a_4 + \ldots + 2^{k-1}\, a_{2^k} = a_1 + \sum_{n=0}^{k} 2^{n-1}\, a_{2^n} = a_1 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{k} 2^n\, a_{2^n}\,. \end{aligned}$$

Ripetendo il ragionamento precedente, se S_n converge, allora $\sum_{n=0}^{k} 2^n\, a_{2^n}$ converge, mentre se $\sum_{n=0}^{k} 2^n\, a_{2^n}$ diverge, anche S_n è divergente. ∎

Osservazione 2.12. La richiesta che a_k convergesse a zero non è stata usata nella dimostrazione. D'altra parte, se a_k non tende a zero, la serie diverge...

Esempio 2.13. Il precedente criterio permette di aggiungere alla non ricchissima lista di serie "note" un'altra categoria fondamentale: le cosiddette **serie armoniche generalizzate**. Se, infatti, $\alpha > 0$, e consideriamo la serie di termine generico $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$, abbiamo che la serie converge se e solo se $\alpha > 1$. Infatti, essendo a_k decrescente, la serie converge se e solo se converge la serie

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k\, a_{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=0}^{n} (2^{1-\alpha})^k\,.$$

L'ultima serie è una serie geometrica, che converge se e solo se $2^{1-\alpha} < 1$, cioè se e solo se $\alpha > 1$. Si noti che sia il criterio della radice che quello del rapporto non si possono applicare (per nessun valore di α!) essendo $L = 1$.

Infine, ricordando la seconda dimostrazione della divergenza della serie armonica, dimostriamo un criterio che lega fra loro la convergenza di una serie a termini positivi e la limitatezza dell'integrale di una funzione.

Teorema 2.14 (Criterio integrale). *Sia a_k una successione* **decrescente** *e tendente a zero. Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione monotona decrescente tale che $f(k) = a_k$ per ogni $k \geq 1$. Allora la serie di termine generico a_k è convergente se e solo se esiste finito*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_1^n f(x)\, dx\,. \tag{2.1}$$

Osservazione 2.15. Osserviamo che il limite in (2.1) esiste sempre, finito o no. Infatti la funzione f, essendo monotona decrescente, è integrabile tra 1 e n per ogni n. Inoltre, siccome f è non negativa (il limite a più infinito di f è il limite della successione a_k), l'integrale tra 1 e $n+1$ è maggiore dell'integrale tra 1 e n, cosicché la successione

$$\int_1^n f(x)\, dx\,,$$

è monotona crescente.

Dimostrazione. Dal momento che f è decrescente, se x è in $[k, k+1]$ si ha

$$a_{k+1} = f(k+1) \leq f(x) \leq f(k) = a_k\,,$$

e, integrando,

$$a_{k+1} = \int_k^{k+1} a_{k+1}\, dx \leq \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leq \int_k^{k+1} a_k\, dx = a_k\,,$$

cosicché, sommando per k da 1 a $n-1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} a_k\,.$$

Pertanto,

$$S_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)\, dx \leq S_{n-1}\,,$$

e quindi la tesi. ■

Esercizio 2.16. Studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k + \cos(k\pi)}{k^2}\,, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+2}{k^3}\,, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{2}{k^2}\right)\,, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{k}} - 1\right)^2\,.$$

Esercizio 2.17. Studiare la convergenza delle seguenti serie (per l'ultima ($\frown$), specificare per quali $\alpha > 0$ converge):

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{3^k + 1}\,, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k!}{k^k}\,, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k\, k!}{k^k}\,, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^k\, k!}{k^k}\,. \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^k\, k!}{k^k}\right)^\alpha\,.$$

Esercizio 2.18. Studiare, al variare di $\alpha > 0$, la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k\,\ln^{\alpha}(k)}\,, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}(k)\right)^{\alpha}\,, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k^{\alpha}}\right)\left(1-\cos\left(\frac{1}{k}\right)\right)^{\alpha}\,.$$

Esercizio 2.19. Studiare, al variare di $x \geq 0$, la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{k}\,x^k\,, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k^2}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{k}\,, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^k}{k!}\,x^k\,.$$

3. Serie a segni alterni

Rivisitiamo un ben noto paradosso dovuto a Zenone e che recitava all'incirca così "Nessuna freccia lanciata da Achille raggiungerà mai il bersaglio".

"Dimostrazione." Sia D la distanza fra il lanciatore (Achille) ed il bersaglio (Ettore). Supponiamo per semplicità che la freccia, supposta puntiforme, viaggi a velocità costante v. Per semplificare ulteriormente, secegliamo unità di misura in cui $D = 2$ e $v = 1$.

Prima di procedere soffermiamoci sul piacere che si prova nel fare tutte le ipotesi che fanno comodo. Qualche voce, meno amante dell'armonia matematica, potrebbe suggerire che a furia di semplificare ... Ad esempio, il celeberrimo fisico R. Feynman a proposito di un certo modello matematico in cui si facevano numerose ipotesi sul comportamento dell'acqua, sosteneva che si trattava dello studio della "dry water".

Alcuni colleghi suggerivano che un altro modello poteva funzionare nell'ipotesi di "cavallo sferico".

Ma ritorniamo senz'altro a Zenone. Allora, sia $T_1 = T$ il tempo impiegato dalla freccia a percorrere la quantità di spazio $D/2$. La freccia di Achille è a metà strada. Per percorrere il tratto che resta essa deve, in particolare percorrere la prima metà di esso. Impiegherà per fare questo, un tempo T_2 che è la metà di T_1. Dopodiché gli resta ancora da percorrere un tratto lungo $D/4$. Per percorrerlo, deve prima percorrerne la metà. Impiegherà un tempo T_3, la metà di T_2. A questo punto, inesorabile, è già passato un tempo

$$T_1 + T_2 + T_3 = T + \frac{1}{2}\,(T) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\,(T)\right]\,.$$

A questo punto, diceva Zenone, è manifesto che, considerato che ogni volta posso dividere lo spazio che resta da percorrere in due parti uguali e per ogni tale frazione di spazio è necessario un tempo (magari piccolo) ma strettamente positivo per percorrerlo, il tempo totale che la freccia impiegherà a raggiungere il bersaglio è infinito. Ettore è salvo. Scroscio di applausi.

La notizia della morte di Ettore giunge inattesa a turbare la nostra certezza. Vero è che essa avvenne per altri motivi (una lancia invece di una freccia), ma avendo appreso finora soltanto il nome dell'assassino, veniamo colti da improvviso dubbio. In effetti, traducendo la questione in linguaggio moderno, si potrebbe dire che Zenone si era posto il seguente problema. Supponiamo di sommare infiniti numeri positivi. Non sarà per caso ovvio che il risultato è "più infinito"? Lo sforzo fatto nelle precedenti pagine ha mostrato l'esatto contrario. Anzi, la somma proposta non solo converge (è finita) ma addirittura si calcola facilmente. Infatti si tratta di una serie geometrica.

Questo ricorda un altro interessante aneddoto. Apparentemente l'idea è dovuta a R. Feynman che così intervistò il grande J. Von Neumann.

Test attitudinale. Un signore alquanto cocciuto parte con velocità costante ed uguale ad uno in direzione di un enorme parete verticale posta a distanza due. In simultanea una mosca, appoggiata sul naso del signore al momemto della partenza, parte con velocità doppia nella stessa direzione e pertanto raggiunge prima del signore il suddetto muro. Arrivato al muro si volta, emette un suono simile a pernacchia DeFilippiana rivolta al signore, e torna indietro sempre con velocità due ma questa volta diretta verso il signore. Ad un certo punto raggiunge nuovamente il naso del signore il quale si trova ancora distante dal muro. La mosca si volta (questa volta non emette il suono anzidetto essendo a distanza tale da temere ritorsioni) e procede ancora verso il muro e così via. Ahimè dopo un certo tempo la mosca muore schiacciata dal naso del signore (questa volta è lui ad emettere quel famoso suono).

La domanda è la seguente. Quanto cammino ha percorso la mosca prima di morire?

Riprendiamo il discorso da dove lo avevamo lasciato. La grande conquista intellettuale del dopo Zenone è il fatto che la "somma" di infiniti addendi positivi può "non divergere". Questa elettrizzante novità ha fatto sperare che molte delle operazioni che si conoscevano per la somma ordinaria continuassero a valere per quelle con infiniti addendi.

Come accennato nello scorso paragrafo questa aspettativa si mostra esagerata. Va sottolineato quale sia il tipo di problema. Nel caso di una somma di un numero finito di addendi

$$A_N \equiv \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_N\}$$

il simbolo

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_N\,,$$

potrebbe essere tranquillamente sostituito con il simbolo

$$\sum_{a_i \in A_N} a_i\,.$$

Il secondo simbolo è ambiguo in quanto non si prescrive "in che ordine" sommare i vari addendi. Eppure i modi per sommare N addendi sono tanti (vi ricordate quanti?). Ma non importa. Vale infatti una notevole proprietà. Per enunciarla in modo che se ne possa capire direttamente l'analogo quando sono presenti infiniti addendi, conviene ricordare la seguente definizione

Definizione 3.1. *Sia $J_N = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$. Ogni applicazione biunivoca*

$$\begin{array}{ccccc} \sigma & : & \{0,1,2,\dots,N-1\} & \rightarrow & \{0,1,2,\dots,N-1\} \\ \sigma & : & i & \rightarrow & \sigma_i \end{array}\,,$$

si dice una **permutazione** *degli N elementi dati.*

Osservazione 3.2. La permutazione è l'operazione che corrisponde all'idea di ribattezzare gli elementi di J_N.

Esercizio 3.3. Scrivere tutte le 24 permutazioni di $\{1, 2, 3, 4\}$.

Esercizio 3.4. Vale la seguente proprietà. Comunque si scelgano due permutazioni σ e η si ha

$$\sum_{i=0}^{N-1} a_{\sigma_i} = \sum_{i=0}^{N-1} a_{\eta_i} \,. \tag{3.1}$$

In particolare è ben definita la notazione

$$S := \sum_{i \in J_N} a_i \tag{3.2}$$

ed inoltre si ha

$$S = \sum_{i=0}^{N} a_i \,. \tag{3.3}$$

L'unica difficoltà consiste nel comprendere veramente le affermazioni fatte.

La (3.1), dice che sommare lo stesso insieme finito di addendi in due modi distinti produce lo stesso risultato. Questa è una conseguenza dei due assiomi della somma che abbiamo enunciato nella precedente sezione su $\mathbb{R}$. Contare le candeline sulla torta viene fatto generalmente da persone diverse con modalità diverse. Il fatto che si giunga a risultati diversi dipende allora soltanto dal fatto che qualcuno ha sbagliato a contare.

La (3.2) conclude come corollario della (3.1) che la somma degli N addendi dati **è indipendente** dalla ricetta di calcolo che quindi non deve essere specificata. La (3.3) a questo punto diviene un comodo **procedimento di calcolo**. Visto che posso scegliere una permutazione a mio piacere, scelgo l'identità che lascia tutto invariato. Sommo il secondo elemento al primo poi il terzo al risultato precedentemente ottenuto. Commutando e permutando il risultato non cambia.

Bene. La Somma con la "S" maiuscola soddisfa questa proprietà indipendentemente dal segno degli addendi che si sommano. Usando la metafora presente a proposito di $\mathbb{R}$, se dalla tasca, oltre ad estrarre monete, si estraessero cambiali (monete "negative") il risultato finale ci fornirebbe il nostro bilancio economico indipendentemente dall'ordine di estrazione.

Per somme con infiniti addendi questo, in generale, è falso.

In particolare supponete di estrarre dalla tasca un numero infinito di monete e/o cambiali. Alla fine della conta supponiamo che otteniate dieci miliardi di euro. Rimettete il tutto in tasca e correte a comprare una Ferrari. Al momento di pagare cominciate ad estrarre monete e/o cambiali nell'ordine che capita. C'è il rischio che venga fuori che avete un debito! Che fareste a quel punto? Vi disperate? Oppure...?

Quel che segue tenta di mettere ordine in questo mondo. Cominciamo con alcuni risultati preliminari.

La **parte positiva** di un numero indica il numero stesso se è positivo, altrimenti è zero. Mentre la **parte negativa** indica l'opposto del numero se esso è negativo ed altrimenti è zero. In simboli, la parte positiva e la parte negativa di a si indicano, rispettivamente, con a_+ e a_-:

$$a^+ = \max(a, 0) \quad , \quad a^- = \max(-a, 0)\,. \tag{3.4}$$

Notiamo che

$$0 \le a^+ \le |a| \quad , \quad 0 \le a^- \le |a|\,. \tag{3.5}$$

A dispetto del nome quindi, la parte positiva e la parte negativa di un numero sono entrambi non negativi. Due regole molto utili sono le seguenti:

$$a^+ + a^- = |a| \quad , \quad a^+ - a^- = a\,. \tag{3.6}$$

Sia ora $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Associamo a questa successione altre due $\{a_n^+\}$ e $\{a_n^-\}$. Definiamo adesso $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ e le corrispondenti $S_n^+ = \sum_{i=0}^{n} a_i^+$ e $S_n^- = \sum_{i=0}^{n} a_i^-$. Si controlla (siamo ancora nel caso di un numero finito di termini) che

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad S_n = S_n^+ - S_n^- \quad , \quad |S_n| = S_n^+ + S_n^-\,.$$

Questo fatto ha importanti conseguenze.

Definiamo $T_n = |S_n|$ e supponiamo pure che la successione $\{T_n\}$ converga ad un reale t. Si tratta di una serie a termini positivi. Quindi conosciamo vari modi per controllare se converge. Cosa possiamo dedurne? Usando (3.5) e i teoremi di confronto, deduciamo che entrambe le serie

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i^+ \quad , \quad \sum_{i=0}^{+\infty} a_i^-$$

convergono. La prima sarà battezzata **serie delle parti positive** o **parte positiva della serie**. In effetti, se siamo nelle ipotesi dette la parte postiva della serie coincide con la serie delle parti positive (uno scioglilingua non male). La seconda serie ovviamente si chiamerà **serie delle parti negative** o **parte negativa della serie**.

A questo punto usiamo un fatto molto importante: la linearità. Se

$$\sum b_n = b \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \sum c_n = c \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \sum (b_n + c_n) = b + c$$

come segue immediatamente dalle proprietà dei limiti.

Facciamo vedere adesso che se $\sum_{i=0}^{+\infty} |a_i|$ converge in $\mathbb{R}$, allora anche $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ converge in $\mathbb{R}$ (in generale ad un numero diverso). Infatti, per il confronto, esistono due reali s^+ ed s^- tali che

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i^+ = s^+ \quad , \quad \sum_{i=0}^{+\infty} a_i^- = s^-\,.$$

Per la proprietà di linearità

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i^+ - \sum_{i=0}^{+\infty} a_i^- = s^+ - s^- \,.$$

Questo risultato è di grande importanza. Per riassumerlo conviene introdurre la seguente nozione.

Definizione 3.5. *Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Se la serie numerica $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} |a_i|$ converge, si dice che la serie*

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$$

converge **assolutamente**.

Il termine "assolutamente" quindi, va proprio interpretato nel senso della convergenza della serie dei valori assoluti. Non nel senso filosofico-mistico della parola "assoluto" (come nella frase "essere più realista del re", il termine realista va inteso come "a favore del re").

Osservazione 3.6. Per il confronto, la convergenza assoluta implica la convergenza della parte positiva e della parte negativa. Poiché il viceversa è una conseguenza della linearità, deduciamo un importante corollario

Proposizione 3.7. La convergenza assoluta è equivalente alla simultanea convergenza della parte positiva e della parte negativa.

Definizione 3.8. *Per distinguerala dalla convergenza assoluta, la convergenza di una serie nel senso della Definizione 1.1 d'ora in poi si dirà* **convergenza semplice**.

Teorema 3.9. *La convergenza assoluta implica la convergenza semplice.*

La dimostrazione? Ve la siete persa? È già passata.

Esercizio 3.10. Provate da soli a riprodurre la dimostrazione.

Ci si può domandare se esistono serie convergenti che non siano assolutamente convergenti. Se dicessi "no", provocherei la vostra ira. Per il momento fidatevi della seguente informazione. La serie

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i} \,,$$

è convergente. Preso questo per buono, osserviamo che, in questo caso, la assoluta convergenza equivale alla convergenza della serie armonica:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^i}{i} \right| = \sum_{i=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{i} \right| = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} \,,$$

che risulta falsa.

Vediamo ora di capire come si comportano le serie assolutamente convergenti rispetto all'operazione di sommare i termini in ordine diverso da quello prescritto. La prima cosa da fare è di definire l'analogo delle permutazioni per un insieme che, questa volta, non è finito, ma solo numerabile del tipo $\{a_n\}$.

DEFINIZIONE 3.11. *Ogni applicazione biunivoca*

$$\begin{array}{lcccc} P & : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ P & : & i & \to & P_i \end{array}$$

di $\mathbb{N}$ *in sé stesso, si dice* **riordinamento**.

Ovviamente i riordinamenti sono infiniti. Vorremo stabilire una analogia con le (3.1), (3.2) e (3.3). Ebbene vale un teorema-capolavoro, un vero gioiello dell'analisi: il *teorema dei riordinamenti di Riemann.* In sostanza ci sono due aspetti del teorema. Consideriamo la parte "in positivo". Essa afferma che valgono esattamenti quegli analoghi per le serie assolutamente convergenti.

TEOREMA 3.12. *(Teorema di Riemann – Parte I) Sia $\sum_i a_i$ una serie assolutamente convergente. Comunque si scelgano due riordinamenti r ed p si ha*

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_{r_i} = \sum_{i=0}^{+\infty} a_{p_i}\,. \tag{3.7}$$

In particolare è ben definita la notazione

$$S := \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i \tag{3.8}$$

ed inoltre si ha

$$S = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i\,. \tag{3.9}$$

Valgono le osservazioni fatte nel caso di un numero finito di addendi. La (3.7) dice che l'ordine in cui sommo gli addendi è irrilevante. La somma è indipendente dalla ricetta assegnata per sommare. La (3.8) dice che quindi la somma di infiniti termini è ben posta in quanto non dipende da nient'altro che l'insieme degli addendi. Infine la (3.9) ci offre una regola di calcolo concreta. Sommare il secondo termine al primo, poi il terzo al risultato precedentemente ottenuto e via dicendo.

ESEMPIO 3.13. Sia

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & \text{se} \quad n \quad \text{è pari} \\[2ex] \dfrac{1}{3^n} & \text{se} \quad n \quad \text{è dispari} \end{cases} \,.$$

Si calcoli la somma della serie associata. Che la serie sia (assolutamente) convergente segue dal criterio del confronto: $0 \le a_n \le \frac{1}{2^n} = b_n$. E la serie di termine generico b_n converge. Sommare la serie sembra un incubo. Invochiamo il Teorema di Riemann.

Abbiamo già tutti gli assi. Ma bariamo pure. Sommiamo prima su tutti i pari e poi su tutti i dispari.

ESERCIZIO 3.14. Dire dove si è barato? Si può fissare il buco?

Accenno della dimostrazione del Teorema 3.12. Intanto assumiamo che la serie sia a termini positivi (altrimenti si considera prima la parte positiva e poi quella negativa invocando la linearità per incollare il tutto).

Prendiamo, senza perdita di generalità (perché?), r l'identità. Si ipotizza che

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = A \in \mathbb{R}$$

e si vuole dimostrare che

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_{R_i} = A\,.$$

Definiamo

$$S_N = \sum_{i=0}^{N} a_i \quad , \quad S_N^R = \sum_{i=0}^{N} a_{R_i}\,.$$

Intanto la successione $\{S_N^R\}$ è limitata (da A) e monotona crescente. Pertanto ammette estremo superiore $A^R \in \mathbb{R}$. Poiché $S_N^R \leq A$, anche $A^R \leq A$. Resta da dimostrare la disuguaglianza opposta. Rovesciamo l'argomento. La prima serie è un riordinamento della seconda (il bello delle applicazioni biunivoche). Si ha quindi che $S^N \leq A^R$ da cui segue $A \leq A^R$. Questo completa la dimostrazione. ∎

Il risultato che abbiamo visto è di fondamentale importanza. Esso ispira tutta la moderna teoria dell'integrazione. Anche lì si tratta di sommare infinite quantità. Ed anche lì l'unico concetto di somma (integrale) che sia intrinseco, ovvero non dipendente dalla ricetta sul modo come sommare i pezzi richiede che certe proprietà valgano simultaneamente sia per la parte positiva che per la parte negativa della funzione.

Il risultato finale che vogliamo enunciare ci dice, in sostanza, che se la convergenza della serie è semplice, ma non assoluta, può succedere di tutto... ma proprio tutto tutto!

Cerchiamo prima di capire dove sta il cuore del problema.

ESERCIZIO 3.15. Se una serie di termine generico $\{a_n\}$, converge semplicemente, ma non assolutamente, allora divergono a più infinito sia la parte positiva che quella negativa della serie data, ovvero

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i^+ = +\infty \quad , \quad \sum_{i=0}^{+\infty} a_i^- = +\infty\,. \tag{3.10}$$

Soluzione. Per ipotesi,

$$\sum_{i=0}^{+\infty}(a_i^+ - a_i^-) = S \in \mathbb{R} \quad , \quad \sum_{i=0}^{+\infty}(a_i^+ + a_i^-) = +\infty\,.$$

Supponiamo per assurdo che almeno una delle due fra la parte positiva e quella negativa non diverga. Ad esempio supponiamo che

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i^+ = S^+ \in \mathbb{R}\,.$$

Allora, usando la linearità valida, per serie semplicemente convergenti, si ha

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i^- = \sum_{i=0}^{+\infty}[a_i^+ - (a_i^+ - a_i^-)] = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i^+ - \sum_{i=0}^{+\infty}(a_i^+ - a_i^-) = S^+ - S \in \mathbb{R}\,.$$

Quindi anche la parte negativa è convergente. Usando la linearità ancora una volta ne deduciamo la convergenza di

$$\sum_{i=0}^{+\infty}(a_i^+ + a_i^-) = \sum_{i=0}^{+\infty} |a_i|\,,$$

ovvero la convergenza assoluta. Contraddizione!!

A questo punto si comincia a delineare il tema al cuore del problema della somma di infiniti termini. Infatti, in termini qualitativi le cose vanno esattamente come segue.

Caso facile. Se sia la parte positiva che quella negativa di una serie sono convergenti ad un numero reale

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i^+ = S^+ \in \mathbb{R} \quad , \quad \sum_{i=0}^{+\infty} a_i^- = S^- \in \mathbb{R}\,,$$

allora la serie converge assolutamente e si ha

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |a_i| = \sum_{i=0}^{+\infty}(a_i^+ + a_i^-) = S^+ + S^- \quad , \quad \sum_{i=0}^{+\infty} a_i = \sum_{i=0}^{+\infty}(a_i^+ - a_i^-) = S^+ - S^-\,,$$

Caso abbordabile. La parte positiva diverge e quella negativa converge o viceversa.

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i^+ = +\infty \quad , \quad \sum_{i=0}^{+\infty} a_i^- = S^- \in \mathbb{R}\,,$$

allora la serie non converge assolutamente e si ha

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |a_i| = \sum_{i=0}^{+\infty}(a_i^+ + a_i^-) = +\infty + S^- = +\infty \quad ,$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = \sum_{i=0}^{+\infty}(a_i^+ - a_i^-) = +\infty - S^- = +\infty\,,$$

il caso speculare viene lasciato alla vostra immaginazione.

Caso tragico. Sia la parte positiva che quella negativa divergono.

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i^+ = +\infty \quad , \quad \sum_{i=0}^{+\infty} a_i^- = +\infty \,,$$

allora interviene Riemann con il suo secondo teorema.

Osservazione 3.16. In definitiva, l'indeterminazione (insolubile) nasce dal fatto che si vorrebbe sommare

$$+\infty \quad - \quad (+\infty)$$

e questa operazione, almeno in questo ambito è veramente proibita. La prova viene dal prossimo risultato.

Teorema 3.17. *(Teorema di Riemann – II Parte) Supponiamo che la serie $\sum a_i$ converga semplicemente, ma non assolutamente.*
a) Comunque si scelga un numero reale λ, esiste un riordinamento r^λ tale che

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_{r_i^\lambda} = \lambda \,. \tag{3.11}$$

b) Esistono un riordinamento $\overline{r}$ ed un riordinamento $\underline{r}$ tale che

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_{\overline{r}_i} = +\infty \quad , \quad \sum_{i=0}^{+\infty} a_{\underline{r}_i} = -\infty \,. \tag{3.12}$$

c) Esiste un riordinamento $\hat{r}$ tale che la successione

$$S_{\hat{r}}^N = \sum_{i=0}^{N} a_{\hat{r}_i} \quad \text{non converge} \,. \tag{3.13}$$

Altro che legge di Murphy! Qui può succedere veramente di tutto. Se riordiniamo, il risultato può essere: a) qualunque numero reale da noi scelto a priori; b) "infinito" con il segno scelto da noi a piacere; infine c) la non convergenza della serie.

Quindi il concetto buono di somma è andato a farsi friggere nel peggiore dei modi.

MORALE

Se una serie converge semplicemente ma non assolutamente, rinunciamo al concetto di "Somma". Possiamo introdurre una pseudo-somma che, accanto all'insieme degli addendi, prescriva un modo preciso di sommarli. Sull'utilità di questo concetto si potrebbe dissertare. Si potrebbe argomentare che tale concetto è effettivamente utile in certi contesti (l'analisi armonica ad esempio fa un uso smodato del concetto sostanzialmente equivalente di "valore principale").

Quello che invece va sottolineato adesso è che risulta necessario tenere totalmente distinti il concetto di somma con la "S" maiuscola (indipendente dal riordinamento) e quella meno robusta della somma con ricetta sull'ordine in cui si somma.

3.1. Il criterio di Leibniz e le serie semplicemente convergenti. Concludiamo con due risultati. Il primo è una "chicca". Si chiama *criterio di Leibniz*. Si occupa di capire come fare a garantire la convergenza semplice quando quella assoluta non si verifica.

TEOREMA 3.18. *Sia a_n una successione monotona decrescente a zero. Allora la serie*

$$\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i a_i$$

converge.

Tralasciamo la dimostrazione.

Usando il criterio anzidetto si ha che la serie

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i}$$

è convergente. Non converge invece assolutamente (la serie armonica è divergente).

Adesso vorremmo dare un'idea della dimostrazione della parte "in negativo" del teorema di Riemann (Teorema 3.17) limitandomi ad accennare come si possa verificare (o almeno come ci si possa convincere del fatto che) esiste un riordinamento "esplosivo", ovvero che fa divergere la serie.

Accenno di dimostrazione del Teorema 3.17. Prima una dimostrazione con "buco" che però fa capire l'idea.

Sommo prima **tutti** i termini positivi (quelli di indice pari). Chiaramente ottengo $+\infty$. (Perché?) A questo punto sommo tutti i termini negativi (quelli di indice dispari). Li sommo uno alla volta, ovviamente quindi rimango bloccato a $+\infty$. Il gioco è fatto.

Ho barato anche questa volta, allo stesso modo che nell'Esempio 3.13. "Prendere prima tutti i pari" non corrisponde ad un riordinamento, ma piuttosto, in un certo senso, a prendere una successione di riordinamenti. Per fissare la dimostrazione facciamo nel seguente modo. Pensiamo ad un gioco. Noi vorremmo divergere (e se questo è necessario megliofarlo a più infinito piuttosto che a meno infinito). La parte negativa gioca contro di noi. Scriviamo un po' dei termini della serie nell'ordine dato

$$a_0 = 1\,, a_1 = -\frac{1}{2}\,, a_2 = \frac{1}{3}\,, a_3 = -\frac{1}{4}\,, \ldots$$

Nell'ordine dato il primo numero è "uno". Bene. Scegliamo come primo indice lo zero.

Il secondo numero della lista gioca contro. Democraticamente lasciamo che si esprima e scegliamo il secondo indice uguale ad uno. Piombiamo in basso al valore "un mezzo".

Adesso, spazientiti da questa interferenza, ci prendiamo un bel po' di elementi positivi. Quanti? Abbastanza da superare la quota "due". Lo possiamo fare? Certamente si. Il motivo, cruciale, risiede nel fatto che la somma degli addendi corrispondenti a tutti gli indici pari diverge!

Inoltre, poiché la cardinalità dei pari è numerabile (ce ne sono infiniti insomma) rimangono infiniti indici da cui attingere la prossima volta. Notiamo che, sebbene si sia sottratto dal "paniere" degli indici pari (quelli che contribuiscono con termini positivi) "molti" termini, sommandoli tutti si ottiene ancora una serie divergente (perché abbiamo tolto soltanto un numero finito di termini da una serie divergente).

Appena si sia superato quota "due" si lascia giocare l'avversario che contribuirà con un modesto, ma fastidioso, a_3 ovvero "meno un quarto". Irritati, riprendiamo in mano il gioco. Possiamo scegliere dal nostro "paniere" di indici pari tanti indici quanti ce ne servono. Ne prendiamo abbastanza da superare la quota "tre". Lasciamo nel paniere ancora un numero infinito di indici. Notiamo di nuovo che sommando su tutti gli indici pari rimasti gli addendi relativi, si ottiene (ancora una volta) una serie divergente. A questo punto lasciamo giocare l'avversario che ci fa scendere di "un sesto". Subito lo blocchiamo, saliamo sopra "quattro" eccetera. Questo riordinamento è uno dei tanti che fa divergere la serie. ■

Esercizio 3.19. Provate a pensare alla vostra strategia per riordinare in modo da far convergere la riordinata a zero.

Finiamo con un aneddoto molto pertinente.

L'Hotel di Hilbert

Il celeberrimo matematico Hilbert possedeva un albergo con un numero numerabile di stanze.

Un giorno di alta stagione l'albergo era pieno. Tutte le stanze erano occupate. In quel frangente, si presenta un signore dall'aspetto trasandato e chiede una camera al portiere. Gli viene risposto che l'albergo è pieno. Il signore chiede allora di parlare con il proprietario. Hilbert scende subito e proclama sicuro: "Nessun problema. Attenda un attimo". Chiede al cliente della stanza numero uno di spostarsi nella due, a quello della due di spostarsi nella tre e via dicendo. A questo punto tutti i vecchi clienti hanno una stanza ma, in aggiunta, la stanza "uno" è libera. Il trasandato signore (un matematico anche lui probabilmente) soddisfatto ringrazia e prende posto nella sua stanza.

Si succedono piccole comitive che chiedono ospitalità. Il portiere, discepolo di Hilbert, ha capito molto bene l'antifona. Fa un certo numero di telefonate ai clienti i quali vengono spostati in camere successive ed il problema è risolto. Il portiere è soddisfatto di non aver dovuto chiamare Hilbert.

Purtroppo si verifica un evento inatteso. Viene a chiedere ospitalità per i suoi clienti, l'autista di un super-bus. Alla domanda del portiere: "quanti posti a sedere ci sono nel super-bus?", l'autista, imperturbabile risponde: "una infinità numerabile. Altrimenti non sarebbe un super-bus!" (La pubblicità serve sempre.) "Ed inoltre sono tutti occupati!"

A questo punto il portiere chiama Hilbert. Il grande Hilbert non si scompone. "Attenda un'infinità numerabile di attimi" (Sarà forse il famigerato "attimino"?). Dispone che il cliente nella stanza "uno" si sposti nella "due". Il cliente nella "due" vada nella "quattro", quello nella "tre" si sposti nella "sei" ... eccetera. L'autista, in visibilio, ringrazia.

Fuori di metafora: gli insiemi con cardinalità infinita hanno la sorprendente proprietà di poter essere messi in corrispondenza **biunivoca** con un sottoinsieme **proprio** di se stessi! Anzi, a ben guardare, questa è la **definizione** di insieme con cardinalità non finita.

P.S. Il povero Hilbert nulla potè quando arrivarono i $\mathbb{R}$eali.