Analisi Matematica I – Prova scritta del 10/07/2012 ☐

COGNOME: ______________________ NOME: ______________________

CANALE: ☐ A-Di (Leoni) ☐ Dl-Pa (Garroni) ☐ Pb-Z (Pacella)

Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio n. 1 – (6 punti) Determinare i punti limite delle successioni

$$(i) \quad (x_n, y_n) = \left((-1)^n, \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) \qquad\qquad (ii) \quad \begin{cases} x_{n+1} = e^{x_n} - 1 - e^{-1} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Soluzione:

(i) La successione è data dall'unione delle tre sottosuccessioni costanti $(x_{2k}, y_{2k}) \equiv (1,0)$, $(x_{4k+1}, y_{4k+1}) \equiv (-1,1)$ e $(x_{4k+3}, y_{4k+3}) \equiv (-1,-1)$. Pertanto, tutti e soli i suoi punti limite sono $(1,0)$, $(-1,1)$ e $(-1,-1)$.

(ii) La funzione generatrice $f(x) = e^x - 1 - e^{-1}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$ e sempre crescente. Quindi la successione $\{x_n\}$ è ben definita e monotona, e avrà al più un punto limite. Poichè $x_1 = -e^{-1} < 0 = x_0$, $\{x_n\}$ risulta decrescente e convergente al primo punto fisso di f a sinistra di 0, non potendo divergere a $-\infty$ perchè $\lim_{x\to-\infty} f(x) > -\infty$. Poichè i punti fissi di f sono -1 e un certo $x_0 > 0$, si ha $\lim_{n\to\infty} x_n = -1$.

Esercizio n. 2 – (6 punti) Data la funzione integrale

$$F(x) = \int_4^x \frac{t^2+1}{t+2t^2} \arctan\left(\frac{1}{t}\right) dt\,, \qquad x \in (0, +\infty)\,.$$

Stabilire se la funzione è uniformemente continua in $(0, 2]$ e in $[4, +\infty)$.

Soluzione: Osserviamo che la funzione F è ben definita in $(0, +\infty)$, perchè la funzione integranda $f(x) = \frac{x^2+1}{x+2x^2} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ è continua per $x \neq 0$ e $x \neq -2$, e quindi in particolare in $(0, +\infty)$. L'integranda f è asintoticamente equivalente in $x = 0$, alla funzione $\frac{1}{x}$, infatti

$$x\frac{x^2+1}{x+2x^2} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \to \frac{\pi}{2} \qquad \text{per } x \to 0^+\,.$$

Di conseguenza f non è integrabile in senso improprio in 0. In particolare il limite $\lim_{x\to0^+} F(x) = +\infty$. da questo si deduce che F non è uniformemente continua in $(0, 2]$. In $[4, +\infty)$ la funzione f è limitata (infatti tende a zero all'infinito ed è continua) e quindi la funzione integrale è Lipschitziana, quindi uniformemente continua.

Esercizio n. 3 – (5 punti) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione

$$f_n(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n^2}}$$

in $\mathbb{R}$ e nei suoi sottoinsiemi.

Soluzione: Il limite puntuale di f_n è zero. La funzione f_n è pari, $f_n \leq 1$ e tende a 1 per x che tende a $+\infty$, quindi

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| = 1\,.$$

Si deduce che la successione non converge a zero uniformemente in $\mathbb{R}$. Inoltre la funzione f_n è crescente in $[0, +\infty)$ quindi in ogni intervallo $[a, b]$ di $\mathbb{R}$ si ha

$$\sup_{[a,b]} |f_n(x)| = \max\{1 - \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{n^2}}, 1 - \mathrm{e}^{-\frac{b^2}{n^2}}\} \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty$$

da cui si deduce la convergenza uniforme in tutti i compatti di $\mathbb{R}$.

Esercizio n. 4 – (5 punti) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(\sqrt{n}+1)x^n}{3^n + n^2}\,.$$

Detta $f(x)$ la somma della serie esprimere $\int_0^1 f(x)\,dx$ come somma di una serie numerica.

Soluzione: Usando il criterio del rapporto si ha

$$\frac{\log(\sqrt{n+1}+1)}{3^{(n+1)}+(n+1)^2}\cdot\frac{3^n+n^2}{\log(\sqrt{n}+1)}\to\frac{1}{3}\,.$$

Quindi il raggio di convergenza della serie di potenze è 3. Nei punti $x=\pm 3$ la serie non converge perche' la successione che determina la serie non è infinitesima. Pertanto c'è convergenza puntuale in $(-3,3)$ e totale (e quindi uniforme) in ogni intervallo $[a,b]\subset(-3,3)$.

Si può quindi applicare il teorema di integrazione per serie nell'intervallo $[0,1]$ e ottenere

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\frac{\log(\sqrt{n}+1)x^n}{3^n+n^2}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(\sqrt{n}+1)}{(3^n+n^2)(n+1)}$$

Esercizio n. 5 – (6 punti) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$2y''+y=2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$$

e la soluzione soddisfacente le condizioni iniziali

$$y(0)=y'(0)=0\,.$$

Soluzione: L'integrale generale è della forma

$$y(x)=C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+\bar{y}(x)\,,$$

dove $\bar{y}(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione completa (non omogenenea). Poichè il termine noto è in risonanza con l'equazione omogenea, la soluzione particolare è della forma

$$\bar{y}(x)=Ax\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+Bx\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\,.$$

Derivando e sostituendo nell'equazione si ottiene $B=0$ e $A=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, per cui l'integrale generale è:

$$y(x)=C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{x}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\,.$$

Poinchè

$$y'(x)=-\frac{C_1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{C_2}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$$

imponendo le condizioni iniziali si ricava $C_1=0$ e $C_2=1$ per cui la soluzione del problema di Cauchy è

$$\tilde{y}(x)=\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{x}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\,.$$

Esercizio n. 6 – (4 punti) Data una successione di funzioni $f_n:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, dimostrare che

$$f_n\to f\ \text{ uniformemente in } (0,+\infty)\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

Dimostrare con un controesempio che in generale la conclusione non sussiste se la convergenza delle $\{f_n\}$ non è uniforme.

Soluzione: Per ogni $\epsilon>0$ esiste un indice $\bar{n}\in\mathbb{N}$ tale che $|f_{\bar{n}}(x)-f(x)|<\epsilon$ per ogni $x\in(0,+\infty)$. Inoltre, per ipotesi, in corrispondenza di ϵ e $\bar{n}$ esiste $M>0$ tale che $|f_{\bar{n}}(x)|<\epsilon$ per ogni $x\geq M$. Quindi, per ogni $x\geq M$, si ha

$$|f(x)|\leq|f(x)-f_{\bar{n}}(x)|+|f_{\bar{n}}(x)|<2\epsilon$$

La tesi è in generale falsa se non si assume la convergenza uniforme. Ad esempio le funzioni

$$f_n(x)=\begin{cases}1 & \text{se } 0<x<n\\ 0 & \text{se } x\geq n\end{cases}$$

sono ovviamente infinitesime per $x\to+\infty$ e convergono puntualmente a $f(x)\equiv 1$.