Analisi Matematica I – Prova scritta del 10/09/2012 ☐

COGNOME: ______________ NOME: ______________

CANALE: ☐ A-Di (Leoni) ☐ Dl-Pa (Garroni) ☐ Pb-Z (Pacella)

Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio n. 1 – (6 punti) Stabilire se esiste, e eventualmente calcolare, il limite delle successioni

$$(i)\, z_n = \frac{\cos n + i \sin n}{(3+4i)^n} \qquad (ii)\, x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^3}{x_n+3}}\,,\ x_0 = 1$$

Soluzione: (i) La successione tende a 0, essendo $|z_n| = 5^{-n}$.

(ii) La successione x_n è positiva per definizione. La funzione generatrice $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$ è crescente su $(0, +\infty)$, quindi x_n è monotona. Osservando che $f(x) < x$ per $x > 0$ e $f(0) = 0$, si conclude che x_n è decrescente e infinitesima.

Esercizio n. 2 – (6 punti) Data la funzione integrale

$$F(x) = \int_{-1}^{x} e^{\frac{t+2}{t(t-1)}}\, dt$$

stabilire se è uniformemente continua in $[-1, 0)$ e in $(-\infty, -1]$.

Soluzione: F è continua in $(-\infty, 0)$. La funzione integranda diverge esponenzialmente per $t \to 0^-$, ossia è asintoticamente equivalente a $\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}$; quindi $\lim_{x\to 0^-} F(x) = +\infty$ e F non è uniformemente continua in $[-1, 0)$. La funzione integranda è inoltre limitata in $(-\infty, -1]$; quindi F è lipschitziana e dunque uniformemente continua in $(-\infty, -1]$.

Esercizio n. 3 – (5 punti) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione

$$f_n(x) = \frac{\ln x - x^{n+1}}{x^n}\,.$$

Soluzione: Le funzioni $f_n(x)$ sono definite in $(0, +\infty)$, ma convergono puntualmente solo in $[1, +\infty)$ e si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = -x\,, \qquad x \ge 1.$$

Essendo

$$\sup_{x\ge 1} |f_n(x) + x| = \sup_{x\ge 1} \left|\frac{\ln x}{x^n}\right| = \max_{x\ge 1} \frac{\ln x}{x^n} = \frac{1}{en} \to 0$$

la convergenza è uniforme.

Esercizio n. 4 – (5 punti) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(2^n - 1)x^{3n}\,.$$

Soluzione: Usando il criterio della radice si ha

$$\sqrt[n]{n2^n(1 - \frac{1}{2^n})} \to 2$$

Quindi il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(2^n - 1)y^n$$

è $\frac{1}{2}$. Per $|y| = \frac{1}{2}$ la serie non converge perchè il termine generico non è infinitesimo. In termini della variabile x si ha quindi che la serie di partenza converge puntualmente in $(-1/\sqrt[3]{2}, 1/\sqrt[3]{2})$ e totalmente, e quindi uniformemente, in tutti i compatti contenuti in $(-1/\sqrt[3]{2}, 1/\sqrt[3]{2})$.

Esercizio n. 5 – (6 punti) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + (x-1)y = x\mathrm{e}^{(x-1)} \\ y(0) = 2\,. \end{cases}$$

Soluzione: Applicando la formula di risoluzione delle equazioni lineari del primo ordine si ha

$$\begin{aligned} y(x) &= C\mathrm{e}^{-\int(x-1)\,dx} + \mathrm{e}^{-\int(x-1)\,dx}\int x\mathrm{e}^{(x-1)}\mathrm{e}^{\int(x-1)\,dx}\,dx \\ &= C\mathrm{e}^{x-\frac{x^2}{2}} + \mathrm{e}^{x-\frac{x^2}{2}}\int x\mathrm{e}^{(x-1)}\frac{x^2}{2} - x\,dx = C\mathrm{e}^{x-\frac{x^2}{2}} + \mathrm{e}^{(x-1)} \end{aligned}$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene $C = 2 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Esercizio n. 6 – (4 punti) Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiamo la successione di funzioni

$$f_n(x) = f(x+n)\,.$$

Provare che se $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ esiste finito, allora la successione di funzioni f_n converge uniformemente in $[a, +\infty)$, per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Soluzione: Sia $l = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha quindi che

$$f_n(x) = f(x+n) \to l\,,$$

ossia f_n converge puntualmente alla funzione costante l. Fissato $a \in \mathbb{R}$, per definizione di limite all'infinite si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che se $x > M$ allora $|f(x) - l| < \varepsilon$. Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che se $a + n > M$ e quindi per ogni $x \in [a, +\infty)$ si ha

$$|f_n(x) - l| < \varepsilon\,,$$

ossia la convergenza uniforme alla funzione costante uguale a l.