Analisi Matematica I – Prova scritta del 19/06/2012 ☐

COGNOME: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| NOME: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

CANALE: ☐ A-Di (Leoni) ☐ Dl-Pa (Garroni) ☐ Pb-Z (Pacella)

PROVA ORALE: ☐ questo appello ☐ prossimo appello

ESONERO DA RECUPERARE: ☐ Primo (Esercizi 1, 2 e 3) ☐ Secondo (Esercizi 4, 5 e 6)

Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio n. 1 – (6 punti) Stabilire se esiste il limite, ed eventualmente calcolarlo, delle successioni

$$\text{a)} \qquad z_n = \left(2 - i\sin\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{10} + \frac{i}{2}\right)^n \qquad\qquad \text{b)} \qquad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}\log(1+a_n^3), \\ a_1 = 3\,. \end{cases}$$

Soluzione: a) La successione z_n tende a zero perchè il primo fattore tende a 2, mentre il secondo tende a zero, poichè è la potenza n-esima di un numero complesso con modulo minore di 1.
b) La successione tende a zero. Infatti la funzione $f(x) = \frac{1}{3}\log(1+x^3)$ è crescente e poichè $a_2 < a_1$, la successione $\{a_n\}$ è monotona decrescente. Essendo limitata inferiormente da zero, non può divergere a $-\infty$ e quindi converge. Il limite è la soluzione dell'equazione $g(x) = x - \frac{1}{3}\log(1+x^3) = 0$ per $x \in [0,3]$. Si vede facilmente che l'unica soluzione è $x = 0$, visto che in $(0,3)$ si ha che $g'(x) > 0$

Esercizio n. 2 – (6 punti) Data la funzione integrale

$$F(x) = \int_2^x \frac{\log\left(1+\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t^2-1}}\,dt\,, \qquad x \in (1,+\infty)$$

a) Stabilire se è possibile estendere F per continuità in $x = 1$;
b) Stabilire se la funzione F ammette un asintoto per $x \to +\infty$;
c) Studiare la monotonia di F.

Soluzione: a) La funzione integranda $f(x) = \frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2-1}}$ è integrbile in senso improprio in $(2,+\infty)$. Infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2-1}}x^2 = 1$$

e quindi f è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{x^2}$. In conclusione F ha un asintoto orizzontale a $+\infty$.
b) La funzione f è anche integrabile in senso improprio in $(1,2)$, infatti, poichè

$$\lim_{x\to1^+} \frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2-1}}\sqrt{x-1} = \frac{\log 2}{\sqrt{2}}\,,$$

è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$. Quindi esiste finito il limite $\lim_{x\to1^+} F(x)$, ossia F si può estendere per continuità in $x = 1$.
c) La funzione f è continua in $(1,+\infty)$, quindi per il teorema fondamentale del calcolo F è derivabile e $F'(x) = f(x)$. Poichè f è positiva in $(1,+\infty)$, si ha che F è monotona crescente.

Esercizio n. 3 – (4 punti) Sia x_0 un punto di accumulazione per un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$. Dimostrare che esiste una successione $\{x_n\}$ strettamente monotona, con $x_n \in E$, tale che $x_n \to x_0$.

Soluzione: Applicare la definizione di punto di accumulazione prendendo una succesione di intorni di x_0 con raggi decrescenti e scegliendo opportunamente i punti x_n in questi intorni. Per esempio definire la successione, di punti distinti, in modo iterativo scegliendo $x_n \neq x_0$ in un intorno di x_0 di raggio $r_n < |x_0 - x_n| \wedge \frac{1}{n}$. Questa successione converge a x_0. Se la successione è monotona (ossia è tutta maggiore o minore di x_0) lo è anche strettamente per costruzione. Altrimenti o a destra o a sinistra di x_0 ci saranno infiniti termini della successione. Scegliendo questi infiniti termini che sono tutti dallo stesso lato rispetto a x_0 si costruisce una sottosuccessione strettamente monotona che converge a x_0.

Esercizio n. 4 – (4 punti) Data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-2}\right)\,.$$

Stabilire se la funzione f è uniformemente continua in $(-\infty, 1]$ e in $[1, 2)$.

Soluzione: a) Poichè

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}\,,$$

f a $-\infty$ è asintotica a una funzione costante e quindi uniformemente continua.
b) Inoltre

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Quindi f si può estendere per continuità in 1. La funzione estesa è quindi continua in $[1, 2]$ e dunque per il teorema di Heine-Cantor è uniformemente continua in $[1, 2]$ e quindi anche in $[1, 2)$.

Esercizio n. 5 – (6 punti) Studiare la convergenza puntuale e totale della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)e^{-n^2x}}{x^2+n^2}$$

Soluzione: La condizione necessaria di convergenza è verificata per $x \geq 0$. Effettivamente per tali x la serie è una serie a termini positivi convergente, come si può vedere applicando ad esempio il criterio della radice. Osservando inoltre che le funzioni $f_n(x) = \frac{(\ln n)e^{-n^2x}}{x^2+n^2}$ sono positive e decrescenti su $[0, +\infty)$, si ha

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x)| = f_n(0) = \frac{\ln n}{n^2}$$

Poichè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ converge, la serie data risulta totalmente convergente in $[0, +\infty)$.

Esercizio n. 6 – (6 punti) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x \ln x} = \sqrt{x} \\ y(e) = \dfrac{2}{9} e^{3/2} \end{cases}$$

Soluzione: Sappiamo che c'è un'unica soluzione definita nell'intervallo $(1, +\infty)$. Moltiplicando ambo i membri dell'equazione per $\ln x$ si ottiene

$$(\ln x\, y)' = \sqrt{x} \ln x$$

da cui

$$\ln x\, y(x) = \int \sqrt{x} \ln x \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2} + c$$

ovvero

$$y(x) = \frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{c - 4/9 x^{3/2}}{\ln x}$$

Essendo

$$y(e) = \frac{2}{9} e^{3/2} + c\,,$$

imponendo la condizione iniziale si ricava $c = 0$. La soluzione è dunque

$$y(x) = \frac{2}{3} x^{3/2} \left(1 - \frac{2}{3 \ln x}\right)\,.$$