Analisi Matematica I – Prova scritta del 19/09/2012 ☐

COGNOME: ____________________ NOME: ____________________

CANALE: ☐ A-Di (Leoni) ☐ Dl-Pa (Garroni) ☐ Pb-Z (Pacella)

Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio n. 1 – (6 punti) Determinare i punti limite delle seguenti successioni

$$(i)\ (x_n, y_n) = \left(2n^2\left(\log(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}\right), \cos(n\pi)\frac{n+2}{n^2-1}\right) \qquad (ii)\ a_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}a^3 + 4}\ ,\ a_0 = 0$$

Soluzione: (i) Dallo sviluppo di Taylor del logaritmo si deduce che la successione x_n tende a -1, mentre poichè $\frac{n+2}{n^2-1}$ è infinitesima y_n tende a 0. Quindi il limite della successione è il punto $(-1, 0)$.

(ii) La funzione generatrice $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}x^3 + 4}$ è crescente su $\mathbb{R}$, quindi a_n è monotona. La funzione f ha un unico punto fisso in $x = 2$. Poichè $a_0 = 0 < a_1 = \sqrt[3]{4}$ deduciamo che la successione è crescente. Per induzione si dimostra che $a_n \leq 2$ per ogni n e quindi converge a 2.

Esercizio n. 2 – (6 punti) Data la funzione integrale

$$F(x) = \int_x^3 \frac{e^{t^2} - 1}{t(e^{t^2} + 1)}\, dt \qquad x \in (0, +\infty).$$

Stabilire se:
a) F è estendibile per continuità in $x = 0$;
b) F ammette asintoto orizzontale a $+\infty$;
c) F è uniformemente continua in $[1, +\infty)$.

Soluzione: a) La funzione integranda ha limite 0 in 0, pertanto è limitata e quindi integrabile in $[0, 3]$. Di conseguenza F è estendibile per continuità in 0.

b) F non ha asintoto orizzontale a $+\infty$ perchè l'integranda non è integrabile in senso improprio in $[3, +\infty)$ inquanto asintoticamente equivalente a $\frac{1}{t}$.

c) F è uniformamente continua in $[1, +\infty)$, perchè F' è limitata e quindi F è lipschitziana.

Esercizio n. 3 – (5 punti) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione

$$f_n(x) = \frac{n}{n+1} \arctan(x + n).$$

Soluzione: Il limite puntuale della successione è la funzione costante $f(x) = \frac{\pi}{2}$. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha che

$$\sup_{x \in [a, +\infty]} |f_n(x) - \frac{\pi}{2}| = \frac{\pi}{2} - \frac{n}{n+1} \arctan(a + n)$$

e quindi la successione converge uniformemente in ogni insieme del tipo $[a, +\infty)$. Infine poichè

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - \frac{\pi}{2}| = \frac{\pi}{2} + \frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2} \to \pi$$

la successione non converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

Esercizio n. 4 – (5 punti) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\ln(n+2)}{n(\sqrt{2})^n}(x-1)^n.$$

Soluzione: Applicando il criterio della radice (o del rapporto) è facile verificare che il raggio di convergenza della serie è $\sqrt{2}$. Pertanto la serie converge puntualmente nell'intervallo $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ e totalmente in tutti gli integrvalli $[a, b]$ in esso contenuti. Per $x = 1 + \sqrt{2}$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\ln(n+2)}{n}.$$

che diverge perchè maggiorata dalla serie armonica. Per $x = 1 - \sqrt{2}$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3\ln(n+2)}{n}.$$

che converge per il criterio di Leibniz (il fatto che la successione $\frac{\ln(n+2)}{n}$ sia infinitesima e decrescente si puo' facilmente dedurre studiando la funzione $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{x}$). Quindi per il teorema di Abel la serie converge uniformemente in $[1-\sqrt{2}, a]$ per ogni $a < 1 + \sqrt{2}$.

Esercizio n. 5 – (6 punti) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 5\cos x \\ y(0) = 2, \; y'(0) = -1 \end{cases}$$

Soluzione: L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea $y'' - 2y' + 2y = 0$ è $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ che ha radici complesse coniugate $1 \pm i$. L'integrale generale dell'equazione omogenea è quindi $y(x) = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. Cercando una soluzione particolare del tipo $\bar{y}(x) = A\cos x + B\sin x$. Si trova $\bar{y}(x) = \cos x - 2\sin x$. Imponendo quindi le condizioni iniziali alle funzioni del tipo $e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \cos x - 2\sin x$ si ottiene la soluzione del problema di Cauchy $y(x) = (e^x + 1)\cos x - 2\sin x$.

Esercizio n. 6 – (4 punti) Trovare i punti interni, di accumulazione, di frontiera e la chiusura dell'insieme

$$E = (0,1] \cup \{\pi\} \cup \mathbb{Q}$$

Soluzione: $\overset{\circ}{E} = (0,1) \quad \partial E = \mathbb{R} \setminus (0,1) \quad E' = \mathbb{R} \quad \overline{E} = \mathbb{R}$.