Analisi Matematica I – Prova scritta del 24/01/2013 ☐

COGNOME: NOME:

CANALE: ☐ A-Di (Leoni) ☐ Dl-Pa (Garroni) ☐ Pb-Z (Pacella)

Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio n. 1 – (6 punti) Stabilire se esiste, e eventualmente calcolare, il limite delle successioni

$$(i)\, z_n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + i\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} \qquad (ii)\, x_{n+1} = x_n - 2\arctan x_n + \pi\,,\ x_0 = -1$$

Soluzione: (i) La successione tende a 0, essendo $|z_n| = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n^2}}} \to 0$.

(ii) La successione x_n è monotona crescente, essendo $f(x) = x - 2\arctan x + \pi > x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Di conseguenza, $\lim_{n\to\infty} x_n$ esiste ed è $+\infty$, non avendo f punti fissi.

Esercizio n. 2 – (6 punti) Discutere la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{(x+1)^{\frac{3}{2}} - 1}\, dx\,.$$

Soluzione: L'integrale converge perché la funzione integranda ha limite finito in 0 ed è prolungabile per continuità, mentre $+\infty$ è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ che è integrabile in senso improprio.

Esercizio n. 3 – (5 punti) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione

$$f_n(x) = \log_2\left(\frac{(x+2n)^2+1}{n^2+5}\right)\,.$$

in $\mathbb{R}$ e nei suoi sottoinsiemi.

Soluzione: La successione $f_n(x)$ converge a $f(x) = \log_2 4 = 2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Consideriamo la successione

$$g_n(x) = f_n(x) - f(x) = \log_2\left(\frac{(x+2n)^2+1}{4n^2+20}\right)\,.$$

Poiché la funzione $f_n(x)$ non è limitata si ha

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| = +\infty\,,$$

quindi non c'è convergenza uniforme in $\mathbb{R}$. Per quanto riguarda la convergenza in intervalli limitati consideriamo

$$g_n'(x) = \frac{4n^2+20}{(x+2n)^2+1}\,\frac{2(x+2n)+1}{4n^2+20}\log_2 \mathrm{e} = \frac{2(x+2n)+1}{(x+2n)^2+1}\log_2 \mathrm{e}\,.$$

Poiché $g_n'(x) > 0$ se $x > -2n$ e $g_n'(x) < 0$ se $x < -2n$, si ha che il sup di $|g_n|$ è definitivamente assunto in uno degli estremi e quindi, grazie alla convergenza puntuale di f_n a f, tende a zero per $n \to +\infty$. Quindi c'è convergenza uniforme in ogni intervallo limitato.

Esercizio n. 4 – (5 punti) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n$$

Soluzione: Si tratta di una serie di potenze centrata in 2 con raggio di convergenza $r = 2$. Per $x = 2-2 = 0$ la serie converge per il criterio di Leibniz, mentre per $x = 2+2 = 4$ la serie diverge come la serie armonica. Di conseguenza, si ha convergenza puntuale in $[0,4)$, uniforme in $[0,b]$ per ogni $0 < b < 4$, totale in $[a,b]$ per ogni $0 < a < b < 4$.

Esercizio n. 5 – (6 punti) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(x) + \sqrt{3}y'(x) = 3x + 2\sqrt{3}$$

e la soluzione soddisfacente le condizioni iniziali

$$y(0) = 2 \qquad y'(0) = 0\,.$$

Soluzione: L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea $y'' + \sqrt{3}y' = 0$ è $\lambda^2 + \sqrt{3}\lambda = 0$. L'integrale generale dell'equazione omogenea è quindi $C_1 + C_2 e^{-\sqrt{3}x}$. Cercando una soluzione particolare del tipo $\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx$. Si trova $A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $B = 1$. L'integrale generale è quindi $y(x) = C_1 + C_2 e^{-\sqrt{3}x} + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + x$. La derivata è $y'(x) = -\sqrt{3}C_2 e^{-\sqrt{3}x} + \sqrt{3} + 1$ e quindi imponendo le condizioni iniziali si ha che la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = (2 - \frac{\sqrt{3}}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-\sqrt{3}x} + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + x$

Esercizio n. 6 – (4 punti) Determinare interno, frontiera e chiusura dell'insieme

$$E = \{n + q\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ q \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]\}$$

Soluzione: Osservando che $E = \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$, si ha $\mathrm{Int}(E) = \emptyset$, $\partial E = \overline{E} = [0, +\infty)$.