Corso di laurea in Matematica, a.a. 2002/03
Università di Roma "La Sapienza"

Note per il corso

Analisi Matematica I

Parte III: il piano reale, i numeri complessi, le serie di potenze

scritte ad otto mani da
P. D'Ancona, C. Mascia, V. Nesi & L. Orsina

CAPITOLO 6

Finalmente liberi!

Versione del 23 aprile 2003

1. $\mathbb{R}^2$: un'introduzione

Stanchi di muovervi avanti ed indietro sulla solita retta?
Stanchi di vedere le funzioni guardarvi dall'alto in basso?
Stanchi di non poter sorpassare nessuno?
Non ne potete più di strisciare di fronte a tutti?
Niente paura! L'ora delle rivincite è giunta, ed è a portata di mano!

$\mathbb{R}^2$, dove c'è più spazio!

Scherzi a parte, è ora di allargare i nostri orizzonti, e di abbandonare l'ormai angusta retta reale per spaziare nelle infinite praterie del piano reale: ne ricaveremo molti vantaggi, ma perderemo anche alcune delle proprietà che – bene o male – abbiamo imparato ad usare negli ultimi tempi.

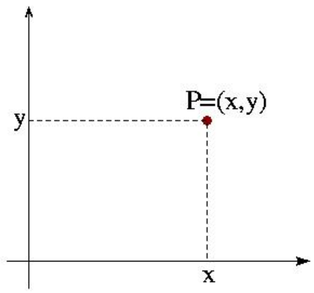
Definizione 1.1. *Indichiamo con $\mathbb{R}^2$ il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ovvero l'insieme delle coppie* **ordinate** *(x, y) con x e y in $\mathbb{R}$.*

Per ordinate si intende che, se $x \neq y$, la coppia (x, y) è diversa dalla coppia (y, x), ad esempio la coppia $(1, 2)$ è diversa dalla coppia $(2, 1)$[1]. In altri termini, il numero reale x appartiene ad una "copia" di $\mathbb{R}$, mentre y è in un'altra, e le due copie sono fra loro "indipendenti". Così come un numero reale x era rappresentabile da un punto sulla retta reale, un punto (x, y) di $\mathbb{R}^2$ viene rappresentato su di un piano nel modo ben noto: si determinano due assi ortogonali (l'asse x e l'asse y) e il punto (x, y) è quello la cui proiezione sull'asse x è il punto x, e la cui proiezione sull'asse y il punto y. Equivalentemente si può rappresentare un elemento di $\mathbb{R}^2$ come una "freccia" (vettore) che parte dall'origine $(0, 0)$ e che termina in (x, y) (Figura 1).

> **Notazione.** Nel seguito, indico gli elementi di $\mathbb{R}^2$ con lettere maiuscole $P, Q, R, \ldots$ e le rispettive coordinate con un indice:
>
> $$P = (x_P, y_P),\ Q = (x_Q, y_Q),\ R = (x_R, y_R), \ldots$$

Esercizio 1.2. *Quali sono i punti di $\mathbb{R}^2$ per cui $(x, y) = (y, x)$?*

[1] Quando invece si definiscono insiemi elencando i loro elementi, si usano le parentesi graffe! In quel caso l'ordine non conta, ad esempio $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.



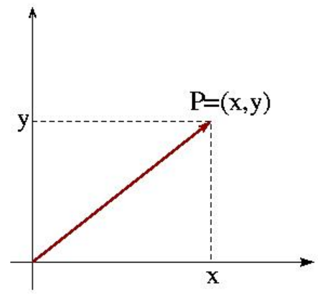


FIGURA 1. Gli elementi di $\mathbb{R}^2$ possono essere rappresentati come punti o come vettori.

ESERCIZIO 1.3. *Disegnare il sottoinsieme del piano, al variare di $a \in \mathbb{R}$,*

$$E_a \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| \leq 1, \ |y| \leq a\}$$

Vanno distinti tre casi. Se $a < 0$, E_a è l'insieme vuoto (che si indica con il simbolo $\emptyset$). Se $a = 0$, E_a è un segmento "orizzontale" di lunghezza due. Infine se $a > 0$, E_a è un rettangolo con i lati paralleli agli assi coordinati.

ESERCIZIO 1.4. *Scrivere una formula per rappresentare rispettivamente, un segmento "verticale", un quadrato centrato nell'origine, una "striscia" orizzontale di altezza uno e lunghezza "infinita".*

ESERCIZIO 1.5. *Disegnare il seguente sottoinsieme del piano.*

$$E \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y| - 1 \leq 0 \quad e \quad |x| + |y| - 2 \leq 0\}$$

Definendo $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y| - 1 \leq 0\}$ e $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| + |y| - 2 \leq 0\}$, si ha $E = A \cap B$. Quindi per disegnare E, basta determinare A e B e poi individuarne l'intersezione. L'insieme A non impone alcuna restrizione sulla coordinata x. La seconda, cioè y, varia fra meno uno ed uno, pertanto si tratta di una striscia orizzontale centrata nell'origine e di ampiezza 2. L'insieme B è più complicato. Verificate che si tratta di un quadrato, centrato nell'origine con i lati paralleli alle bisettrici del primo-terzo e secondo-quarto quadrante, le cui diagonali hanno lunghezza due. Con pazienza dovreste riuscire a concludere che E è un esagono (Figura 2)!

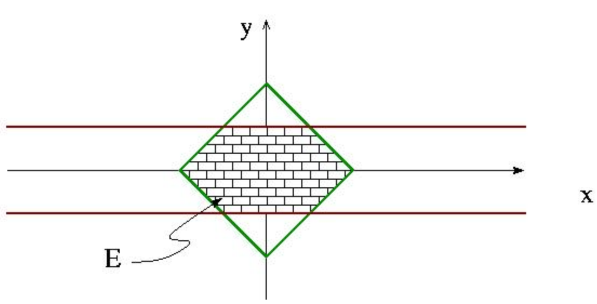


FIGURA 2. L'insieme $E \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y| - 1 \leq 0 \quad \text{e} \quad |x| + |y| - 2 \leq 0\}$.

Una volta definito l'insieme $\mathbb{R}^2$ come insieme di coppie ordinate di numeri reali è necessario, esattamente come si è fatto per $\mathbb{R}$, sapere di quale struttura sia dotato. A cosa mi riferisco quando parlo di "struttura"? Ripensiamo rapidamente ad $\mathbb{R}$. Nell'insieme dei numeri reali sono definiti alcuni oggetti particolarmente interessanti.

1. La *somma*, cioè un'applicazione da $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$ che gode di un certo numero di proprietà che ora non sto a riportare. Grazie alla presenza della somma, $\mathbb{R}$ è un *gruppo abeliano*.

2. Il *prodotto*, cioè un'applicazione da $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$ che gode di un certo numero di proprietà (che, di nuovo, non riporto), alcune delle quali descrivono le relazioni che intercorrono tra somma e prodotto. Grazie alla presenza della somma e del prodotto, $\mathbb{R}$ è un *campo*.

3. Un'*ordinamento totale*, cioè una relazione $\leq$ per cui, dati due numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$, è sempre vero che o $x \leq y$ oppure $y \leq x$. Ancora una volta non trascrivo le proprietà di cui gode la relazione $\leq$ e che ne fanno, per l'appunto, una relazione d'ordine. L'insieme $\mathbb{R}$ con somma, prodotto ed ordine, è un *campo totalmente ordinato*.

4. Una struttura *metrica*, definita, in sostanza, dall'oggetto *modulo* o *valore assoluto*. Il modulo $|\cdot|$ è semplicemente un'applicazione da $\mathbb{R}$ a $[0, +\infty)$ che, tra le altre cose, gode della fondamentale proprietà:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R} \qquad \text{(disuguaglianza triangolare)}.$$

Tramite il modulo, è possibile definire in $\mathbb{R}$ la *distanza* tra numeri reali, attraverso

$$\text{distanza tra } x \text{ e } y := |x - y| \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

Grazie alla presenza di una distanza, è stato possibile introdurre in $\mathbb{R}$, per successioni prima e per funzioni poi, il concetto fondamentale di *limite*.

Quali di questi fantasmagorici oggetti è possibile definire in $\mathbb{R}^2$? E come?

1. Somma. Su $\mathbb{R}^2$ si può definire l'operazione di *somma* nella maniera naturale, cioè si può definire un'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (P\,,\,Q) & \longmapsto & P + Q \end{array}$$

dove l'elemento $P + Q$ è ottenuto sommando componente per componente

$$P + Q := (x_P + x_Q, y_P + y_Q) \qquad \text{per} \quad P = (x_P, y_P),\ Q = (x_Q, y_Q).$$

La somma così definita ha un'interpretazione geometrica semplice, nota come *regola del parallelogramma* (Figura 3). La somma definita in questo modo fornisce $\mathbb{R}^2$ della struttura di *gruppo abeliano* (verificate che valgano tutte le proprietà!). L'elemento neutro è il punto di coordinate $(0, 0)$ che si indica con O e si chiama ORIGINE di $\mathbb{R}^2$.

2. Prodotto per uno scalare. La moltiplicazione richiede maggiore cautela. La scelta naïf di moltiplicare componente per componente si rivela non essere un granché: alcune

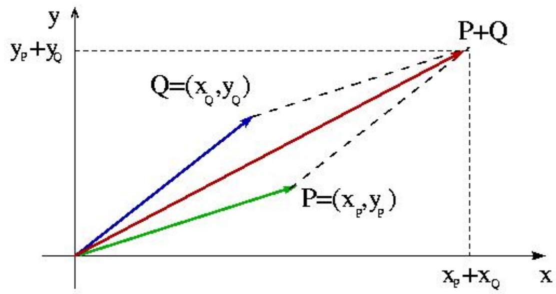


FIGURA 3. La regola del parallelogramma.

delle proprietà fondamentali che valgono per il prodotto in $\mathbb{R}$ non valgono per questo tipo di operazione (quali?). Per questo motivo, questa operazione non viene introdotta.

In $\mathbb{R}^2$ si introduce, invece, un prodotto che ha una natura diversa da quella del prodotto di $\mathbb{R}$: il PRODOTTO PER UN NUMERO REALE (O PRODOTTO PER UNO SCALARE[2]). Precisamente:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (\lambda\,,\,P) & \longmapsto & \lambda P \end{array}$$

dove l'elemento λP è ottenuto moltiplicando ciascuna componente per il numero reale λ

$$\lambda P := (\lambda x_P, \lambda y_P) \qquad \text{per} \quad P=(x_P,y_P),\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Geometricamente, la moltiplicazione per lo scalare λ corrisponde a dilatare/contrarre il vettore P a seconda che il modulo di λ sia maggiore o minore di 1. Nel caso in cui λ sia negativo, il vettore P cambia di verso (Figura 4). Si noti che, mentre il prodotto definito

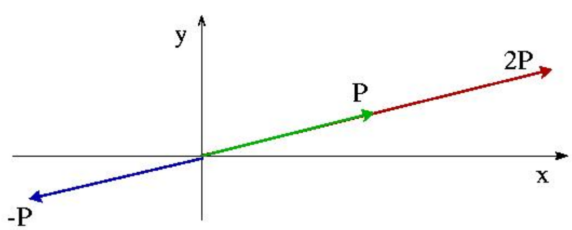


FIGURA 4. Gli elementi $P, 2P, -P$.

in $\mathbb{R}$ è una operazione interna, cioè è un'operazione che a due elementi dello stesso insieme (in quel caso $\mathbb{R}$) associa un elemento dello stesso insieme (cioè ancora un numero reale), *il prodotto per uno scalare è un'operazione esterna*: si prende un elemento di $\mathbb{R}^2$, il punto P, e lo si moltiplica per λ, che è elemento di $\mathbb{R}$, cioè appartiene ad un insieme diverso! Il prodotto per uno scalare è un prodotto esterno proprio per questo motivo: si ottiene moltiplicando un elemento di $\mathbb{R}^2$ con un elemento esterno, per l'appunto, ad $\mathbb{R}^2$.

[2]Da non confondersi con il *prodotto scalare di vettori* di cui qui non parleremo.

Per il prodotto per uno scalare valgono un certo numero di proprietà che potete/dovete verificare facilmente: dati $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $P, Q \in \mathbb{R}^2$,

$$\lambda(P+Q) = \lambda P + \lambda Q, \qquad (\lambda+\mu)P = \lambda P + \mu P, \qquad \lambda(\mu P) = (\lambda\mu)P, \qquad 1\,P = P.$$

Il fatto che in $\mathbb{R}^2$ si possa definire la somma di due vettori, ed il prodotto per un reale (o scalare), che soddisfano un certo numero di proprietà che non sto ad elencare, fa sì che $\mathbb{R}^2$ abbia la struttura di *spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$.

Esercizio 1.6. *Verificare che per* $\lambda \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}^2$

$$\lambda P = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda = 0 \quad \textit{oppure} \quad P = O.$$

3. Ordinamento? Purtroppo (o per fortuna)...no! L'indipendenza delle due componenti di $\mathbb{R}^2$ produce immediatamente una differenza fondamentale con l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Mentre dati due numeri reali diversi x e y è sempre possibile dire quale dei due è il più grande, dati $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$, elementi di $\mathbb{R}^2$, non è possibile dire se uno dei due sia minore dell'altro; per meglio dire, non esiste alcun criterio che permetta, dati due vettori di $\mathbb{R}^2$, di ordinarli. E, d'altra parte, in che senso $(0,1)$ è "minore" o "maggiore" di $(1,0)$?

Esercizio 1.7. *Quante proprietà "utili" delle funzioni continue dipendono dal fatto che* $\mathbb{R}$ *è ordinato?*

In effetti, il motivo per cui in $\mathbb{R}^2$ è possibile il "sorpasso" è proprio legato al fatto che non si tratti di un insieme totalmente ordinato!

In $\mathbb{R}^2$ è possibile, comunque, introdurre delle relazioni d'ordine parziale. Ecco un esercizio al riguardo.

Esercizio 1.8. *(i) Dati* $P = (x_P, y_P)$ *e* $Q = (x_Q, y_Q)$ *introduciamo la relazione*

$$P \preceq Q \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_P \le x_Q \quad \textit{e} \quad y_P \le y_Q.$$

Verificare che $\preceq$ *è una relazione d'ordine (parziale) su* $\mathbb{R}^2$.
(ii) Un insieme $K \subset \mathbb{R}^2$, $K \neq \emptyset$ *è un* CONO POSITIVO *se:*

$$P, Q \in K \;\Rightarrow\; P+Q \in K \qquad e \qquad P \in K \;\Rightarrow \begin{cases} \lambda P \in K & \forall \lambda \ge 0, \\ \lambda P \notin K & \forall \lambda < 0. \end{cases}$$

Fissato K, *cono positivo in* $\mathbb{R}^2$, *dati* $P = (x_P, y_P)$ *e* $Q = (x_Q, y_Q)$ *introduciamo la relazione*

$$P \preceq_K Q \qquad \Longleftrightarrow \qquad Q - P \in K$$

Verificare che $\preceq_K$ *è una relazione d'ordine (parziale) su* $\mathbb{R}^2$.
(iii) La relazione $\preceq$ *definita in (i) è del tipo* $\preceq_K$... *per quale cono positivo* K*?*

La mancanza di un ordinamento totale in $\mathbb{R}^2$ ha, tra le altre, una conseguenza nefasta: non è più chiaro come definire un concetto analogo alla completezza, come visto in $\mathbb{R}$. Infatti sia la definizione di *coppia di classi separate* che quella di *estremo inferiore/superiore* sono radicalmente fondate sulla presenza di $\le$. Scorrendo indietro le note fino ad arrivare al primo capitolo si trova, però una terza maniera di introdurre la *completezza*: attraverso le successioni di Cauchy! Quindi, nell'ottica di rendere chiara l'affermazione "$\mathbb{R}^2$ è completo" puntiamo rapidi verso il problema di definire limiti in $\mathbb{R}^2$. In definitiva, puntiamo alla definizione di *distanza in* $\mathbb{R}^2$.

4. Struttura metrica. Consideriamo due punti nel piano: è possibile dare una misura quantitativa della distanza che li separa? Il buon vecchio Pitagora ci viene in aiuto. Per semplificarci la vita, consideriamo il caso in cui uno dei due punti sia l'origine $O = (0, 0)$ e indichiamo l'altro punto con $P = (x, y)$. Indicando con H il punto $(x, 0)$, il triangolo OPH

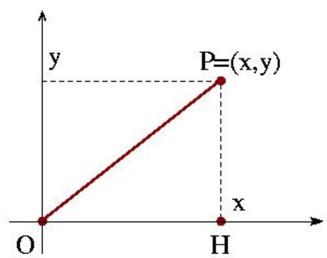


FIGURA 5. I punti O e P e la loro distanza.

è rettangolo e quindi, se crediamo al Teorema di Pitagora, il quadrato della lunghezza dell'ipotenusa $\overline{OP}$ è uguale alla somma dei quadrati dei due cateti, che sono di lunghezza x e y. In altre parole,

$$\text{lunghezza di } \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Che razza di oggetto è il termine definito nella formula precedente? Beh... dovrebbe trattarsi della distanza di P da O (fidandosi di Pitagora). Ricordando che il modulo $|x|$ del numero reale x rappresenta esattamente la distanza in $\mathbb{R}$ del punto x dal punto 0, ecco che abbiamo una piacevolissima sorpresa! L'amico Pitagora ci suggerisce una formula per *definire* il "modulo" anche in $\mathbb{R}^2$! Come si è ricordato ad inizio capitolo, il modulo è il mattone base su cui costruire la distanza e quindi il concetto di limite. Ottimo. Armiamoci e partite.

DEFINIZIONE 1.9. *Dato $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ si chiama* MODULO *(o anche* NORMA *o* LUNGHEZZA*)* DI *P il numero reale non negativo definito da*

$$\|P\| \equiv \|(x, y)\| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Qui indico il modulo di un elemento di $\mathbb{R}^2$ con due linee verticali, $\| \cdot \|$, per fare in modo che sia sempre ben chiaro che si tratta di un oggetto <u>diverso</u> (anche se analogo) dal modulo $| \cdot |$ definito in $\mathbb{R}$.

Il modulo è un'applicazione da $\mathbb{R}^2$ in $[0, +\infty)$ (sottovoce: ...è una funzione di due variabili!)

$$\begin{aligned} \| \cdot \| : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow [0, +\infty) \\ (x, y) &\longmapsto \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Così come il modulo in $\mathbb{R}$, soddisfa una serie di proprietà significative.

1. *positività.* Per ogni $P \in \mathbb{R}^2$,
$$\|P\| \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \|P\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad P = 0.$$
2. *omogeneità.* Per ogni $P \in \mathbb{R}^2$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\|\lambda P\| = |\lambda| \|P\|.$$
3. *disuguaglianza triangolare.* Per ogni $P, Q \in \mathbb{R}^2$
$$\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\|.$$

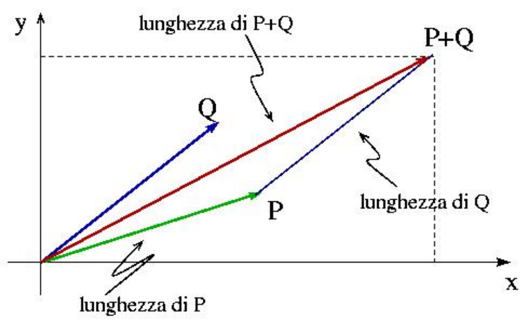


FIGURA 6. La disuguaglianza triangolare in un disegno.

Dimostrazione di 1-2-3. La proprietà 1. è evidente (basta osservare che una somma di quadrati è nulla se e solo se sono nulli entrambi gli addendi). Passiamo direttamente a dimostrare la 2. Sia $P = (x, y)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora, utilizzando la definizione di prodotto per uno scalare e di modulo in $\mathbb{R}^2$
$$\|\lambda P\| = \|(\lambda x, \lambda y)\| = \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} = \sqrt{\lambda^2 (x^2 + y^2)} = |\lambda| \sqrt{x^2 + y^2} = |\lambda| \|P\|.$$
Resta da dimostrare la 3. per cui occorre un po' più di pazienza... Siano $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$. Per la definizione di modulo, la disuguaglianza triangolare si riscrive come
$$\sqrt{(x_P + x_Q)^2 + (y_P + y_Q)^2} \leq \sqrt{x_P^2 + y_P^2} + \sqrt{x_Q^2 + y_Q^2} \tag{1.1}$$
Con pazienza e coraggio cerchiamo di risolvere questa disequazione in quattro incognite! La domanda è: per quali $x_P, y_P, x_Q, y_Q \in \mathbb{R}$ è verificata (1.1). La proprietà 3., che vogliamo dimostrare, afferma che (1.1) è vera sempre. Vediamo. Elevando al quadrato
$$(x_P + x_Q)^2 + (y_P + y_Q)^2 \leq x_P^2 + y_P^2 + 2\sqrt{(x_P^2 + y_P^2)(x_Q^2 + y_Q^2)} + x_Q^2 + y_Q^2$$
Sviluppando i quadrati dei due binomi a sinistra e semplificando, si ottiene
$$x_P x_Q + y_P y_Q \leq \sqrt{(x_P^2 + y_P^2)(x_Q^2 + y_Q^2)}$$
Nel caso in cui il termine a sinistra sia negativo, la disuguaglianza è verificata; altrimenti possiamo elevare di nuovo al quadrato, ottenendo
$$x_P^2 x_Q^2 + 2 x_P x_Q y_P y_Q + y_P^2 y_Q^2 \leq (x_P^2 + y_P^2)(x_Q^2 + y_Q^2) = x_P^2 x_Q^2 + x_P^2 y_Q^2 + y_P^2 x_Q^2 + y_P^2 y_Q^2.$$

Semplificando,

$$2x_P x_Q y_P y_Q \leq x_P^2 y_Q^2 + y_P^2 x_Q^2,$$

che si può riscrivere come

$$(x_P y_Q - x_Q y_P)^2 = x_P^2 y_Q^2 - 2x_P x_Q y_P y_Q + y_P^2 x_Q^2 \geq 0,$$

che è sempre vera! La proprietà 3. vale per ogni P, Q. ∎

La disuguaglianza triangolare ha un'interpretazione geometrica semplice: in un triangolo qualsiasi, la somma della lunghezza di due lati è sempre maggiore della lunghezza del terzo lato (Figura 6).

Tanto per la cronaca, il fatto che in $\mathbb{R}^2$ siano definite somma, prodotto per uno scalare e norma $\|\cdot\|$ con tutte le loro belle proprietà, fa di $\mathbb{R}^2$ uno *spazio vettoriale normato.*

Perché siamo così affezionati al modulo, tanto da volerlo introdurre anche in $\mathbb{R}^2$? Per una ragione molto semplice: una volta definito il modulo, è possibile introdurre, senza alcuna fatica, il concetto di distanza tra punti nel piano, nello stesso modo usato nel caso di $\mathbb{R}$: dati $P, Q \in \mathbb{R}^2$, definiamo

$$d(P,Q) = \text{distanza tra } P \text{ e } Q := \|P - Q\|,$$

o, in coordinate,

$$d\big((x_P, y_P), (x_Q, y_Q)\big) := \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}.$$

Geometricamente, si tratta sempre della distanza suggerita dal Teorema di Pitagora.

In altre parole, abbiamo definito in $\mathbb{R}^2$ una funzione DISTANZA

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & [0, +\infty) \\ & (\,P\,,\,Q\,) & \longmapsto & \|P - Q\| \end{array}$$

Di quali proprietà gode? Eccole.

i. *positività.* $d(P,Q) \geq 0$ per ogni P e Q in $\mathbb{R}^2$ e $d(P,Q) = 0$ se e solo se $P = Q$.

ii. *simmetria.* $d(P,Q) = d(Q,P)$ per ogni P e Q in $\mathbb{R}^2$.

iii. *disuguaglianza triangolare.* Per ogni P, Q e R in $\mathbb{R}^2$,

$$d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)\,. \tag{1.2}$$

Queste proprietà sono di fondamentale importanza perché sono, sostanzialmente, tutte e sole le proprietà che abbiamo utilizzato nel caso di $\mathbb{R}$ dotato della distanza $|x - y|$ per sviluppare tutta la teoria dei limiti: successioni convergenti, limiti di funzioni, continuità. Quindi, una volta definita la distanza in $\mathbb{R}^2$ come sopra, è naturale aspettarsi che si possa seguire di nuovo la stessa linea di pensiero sviluppata in $\mathbb{R}$ ed introdurre lo stesso tipo di concetti anche in $\mathbb{R}^2$.

Dimostrazione di i-ii-iii. Queste tre proprietà sono conseguenze delle proprietà 1-2-3 del modulo. La prima è semplice: la prima parte discende direttamente dalla definizione, per la seconda, basta utilizzare 1. del modulo

$$d(P,Q) = \|P - Q\| = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad P - Q = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad P = Q.$$

La simmetria della distanza è conseguenza di 2. del modulo

$$d(P,Q) = \|P - Q\| = \|(-1)(Q - P)\| = |-1|\|Q - P\| = \|Q - P\| = d(Q,P).$$

Per la terza proprietà, prendiamo P, Q e R in $\mathbb{R}^2$, allora

$$d(P,Q) = \|P - Q\| = \|(P - R) + (R - Q)\| \leq \|P - R\| + \|R - Q\| = d(P,R) + d(R,Q),$$

avendo utilizzato (guarda caso!) la proprietà 3. del modulo.

Ora che sappiamo cosa si intende con distanza nel piano, possiamo con un certo sollievo introdurre la definizione di *intorno*, sempre avendo ben presente che il nostro obiettivo a breve scadenza è di introdurre il concetto di limite/convergenza in $\mathbb{R}^2$. Dunque un intorno di un punto fissato è semplicemente l'insieme dei punti che distano da quello meno di una certa quantità fissata. Che intendi con "distano"? Ohibò... nel senso della distanza appena introdotta!

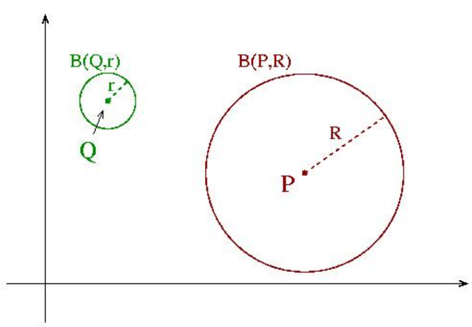
DEFINIZIONE 1.10. *Sia $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e sia $r > 0$. Si chiama* DISCO DI CENTRO P_0 E RAGGIO r *l'insieme definito da*

$$B(P_0, r) = \{P = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \|P - P_0\| < r\}.$$

In coordinate, l'insieme $B(P_0, r)$ si può esprimere così:

$$(x,y) \qquad \text{tali che} \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2,$$

cioè si tratta (semplicemente ed ovviamente) del cerchio di centro P_0 e raggio $r > 0$, perimetro escluso (Figura 7, a sinistra).



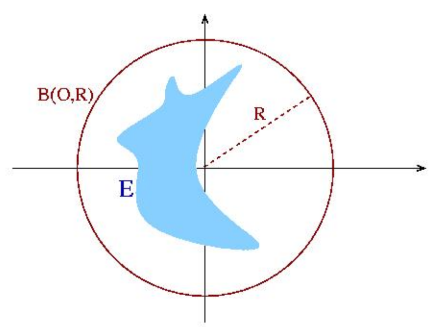


FIGURA 7. A sinistra: un intorno di P ed uno di Q. A destra: un insieme E limitato.

Visto che ci siamo vale la pena dare un'ulteriore definizione.

DEFINIZIONE 1.11. *Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^2$ è* LIMITATO *se è contenuto in un disco di centro O e raggio $R > 0$:*

$$E \subset \mathbb{R}^2 \quad \textit{limitato} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, R > 0 \quad \textit{tale che} \quad E \subset B(O,R).$$

ESERCIZIO 1.12. *Dimostrare che $E \subset \mathbb{R}^2$ è limitato se e solo se esiste $M > 0$ tale che per ogni $(x,y) \in E$ vale $|x| < M$ e $|y| < M$. Sapete dire che cosa significa geometricamente questa seconda condizione?*

2. Successioni nel piano

Una successione nel piano è un'applicazione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}^2$: al numero naturale n viene associato un punto P_n. Quindi una successione in $\mathbb{R}^2$ può essere immaginata come un elenco di punti P_N di cui l'indice n descriva la posizione:

$$P_1, P_2, \dots, P_N, \dots$$

Ogni punto della successione P_n ha due coordinate (x_n, y_n), quindi ad una successione di punti si possono associare, in modo naturale, due successioni numeriche in $\mathbb{R}$: $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$. Ovviamente vale anche il viceversa: date due successioni reali $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, queste definiscono una successione in $\mathbb{R}^2$ data dalla posizione $P_n = (x_n, y_n)$. Ad esempio, la successione

$$P_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

è costituita da punti che si trovano tutti sull'asse x e che, per $n \to +\infty$ si avvicinano al punto O. Invece, la successione

$$P_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \qquad n \in \mathbb{N}^*,$$

è costituita da punti che si trovano sulla parabola di equazione $y = x^2$ e che, all'aumentare di n, si avvicinano al punto O. Disegnate i primi punti della successione per convincervene...

Esempio 2.1. Si possono anche considerare *successioni definite per ricorrenza.* Rappresentiamo i punti di $\mathbb{R}^2$ come vettori colonna (matrici con 2 righe e 1 colonna). Definiamo la successione di punti con

$$P_0 = (1, 0) \quad \text{e} \quad P_{n+1} = JP_n \qquad \text{dove} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chi sono gli elementi di questa successione? Calcoliamo "a mano" i primi termini:

$$P_1 = JP_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_2 = JP_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = JP_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad P_4 = JP_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $P_4 = P_0$, $P_5 = P_1$ e così via. La successione è data da

$$(1,0)\,, (0,1)\,, (-1,0)\,, (0,-1)\,, (1,0)\,, (0,1)\,, (-1,0)\,, (0,-1)\,, \dots$$

Ad ogni applicazione di J, il punto viene spostato nel punto che si ottiene ruotando in senso antiorario di un angolo retto il piano (x, y).

Ricordiamo qui la definizione di successione convergente in $\mathbb{R}$: $\{x_n\}$ converge a ℓ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε in $\mathbb{N}$ tale che $|x_n - \ell| < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_\varepsilon$. In altre parole, $\{x_n\}$ converge a ℓ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε in $\mathbb{N}$ tale che la distanza di x_n da ℓ è minore di ε per ogni $n \geq n_\varepsilon$, ovvero se e solo se la distanza di x_n da ℓ tende a zero come successione di numeri reali.

Il punto chiave nella definizione di convergenza sta nella possibilità di parlare di "distanza di x_n da ℓ". Mutatis mutandis, lo stesso può essere fatto in $\mathbb{R}^2$!

DEFINIZIONE 2.2. *Sia* $\{P_n\} = \{(x_n, y_n)\}$ *una successione in* $\mathbb{R}^2$. *Diremo che* $\{P_n\}$ CONVERGE A $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$ *per* $n \to +\infty$, *e si scrive* $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \bar{P}$, *se*

$$\lim_{n\to+\infty} \|P_n - \bar{P}\| \equiv \lim_{n\to+\infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = 0.$$

Nella definizione di convergenza si richiede che il "limite" della successione di <u>numeri reali</u> $\|P_n - \bar{P}\|$ sia zero; in altri termini, abbiamo ricondotto (grazie alla distanza) il concetto di limite in $\mathbb{R}^2$ a quello in $\mathbb{R}$.

La proprietà in Definizione 2.2 può essere riscritta in modi diversi, ma equivalenti. Espandendo quello che nasconde la scrittura *lim*, possiamo dire che P_n converge a $\bar{P}$ se e solo se

$$\forall\, \varepsilon > 0, \qquad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \qquad \forall\, n \geq n_\varepsilon \qquad \|P_n - \bar{P}\| < \varepsilon,$$

oppure, utilizzando la definizione di disco centrato in $\bar{P}$ e raggio ε, se e solo se

$$\forall\, \varepsilon > 0, \qquad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \qquad \forall\, n \geq n_\varepsilon \qquad P_n \in B(\bar{P}, \varepsilon).$$

Il significato di quest'ultima affermazione dovrebbe essere chiaro: dire che P_n tende a $\bar{P}$ significa affermare che, comunque si fissa $\varepsilon > 0$, tutti gli elementi della successione P_n tranne al più un numero finito, cadono (senza farsi male) nell'intorno di $\bar{P}$ di raggio ε.

ESERCIZIO 2.3. *Dimostrare, utilizzando la definizione, che*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = (0,0).$$

Soluzione. Indicando con $P_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$, bisogna dimostrare che la successione numerica delle distanze $\|P_n - O\|$ è infinitesima. Calcoliamone il valore:

$$\|P_n - O\| = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{n^2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}.$$

La conclusione è evidente!

ESERCIZIO 2.4. *Dimostrare, utilizzando la definizione, che*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\cos n}{n}, \frac{\sin n}{n}\right) = (0,0).$$

Soluzione. Procediamo come sopra: ponendo $P_n = \left(\frac{\cos n}{n}, \frac{\sin n}{n}\right)$,

$$\|P_n - O\| = \sqrt{\left(\frac{\cos n}{n} - 0\right)^2 + \left(\frac{\sin n}{n} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{\cos^2 n}{n^2} + \frac{\sin^2 n}{n^2}} = \frac{1}{n}$$

che è infinitesima. Avete disegnato i primi punti della successione? No? ...allora fatelo!

Esercizio 2.5. *Rappresentiamo i punti di $\mathbb{R}^2$ come vettori colonna (matrici con 2 righe e 1 colonna). Sia $P_0 = (1, 0)$ e definiamo la successione di punti con*

$$P_{n+1} = \frac{1}{2} J P_n \qquad \textit{dove} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = (0, 0)$.

Soluzione. Si tratta di mostrare che la successione $\|P_n\|$ è infinitesima. Una verifica diretta (da fare!) mostra che $\|JP_n\| = \|P_n\|$. Quindi, grazie all'omogeneità del modulo,

$$\|P_{n+1}\| = \left\| \frac{1}{2} J P_n \right\| = \frac{1}{2}\|JP_n\| = \frac{1}{2}\|P_n\|,$$

perciò, dato che $\|P_0\| = 1$,

$$\|P_{n+1}\| = \frac{1}{2}\|P_n\| = \frac{1}{2^2}\|P_{n-1}\| = \cdots = \frac{1}{2^{n+1}}\|P_0\| = \frac{1}{2^{n+1}},$$

che è infinitesima. Eccoci alla conclusione! Anche di questa successione vale proprio la pena disegnare i primi termini... Che succede al variare della condizione iniziale $P_0 = (x_0, y_0)$?

Come si è detto in precedenza, assegnare una successione di punti P_n è equivalente ad assegnare due successioni numeriche: quelle delle sue coordinate x_n e y_n. Quale relazione c'è tra la convergenza della successione di punti P_n e la convergenza delle due successioni numeriche x_n e y_n? ...attimo di suspence... cresce la tensione...

Fatto cruciale: *una successione $P_n = (x_n, y_n)$ è convergente se e solo se sono convergenti le due successioni reali delle coordinate x_n e y_n:*

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \bar{P} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = \bar{x} \quad \textit{e} \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = \bar{y}.$$

Spiegazione geometrica. Se $P_n = (x_n, y_n)$ e $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$, sia $H = (x_n, \bar{y})$. Allora il numero $\|P_n - \bar{P}\|$ rappresenta la lunghezza del segmento $\overline{P_n\bar{P}}$, mentre $|x_n - \bar{x}|$ è la lunghezza di $\overline{\bar{P}H}$ e $|y_n - \bar{y}|$ è la lunghezza di $\overline{HP_n}$ (Figura 8). Allora, se P_n si avvicina a

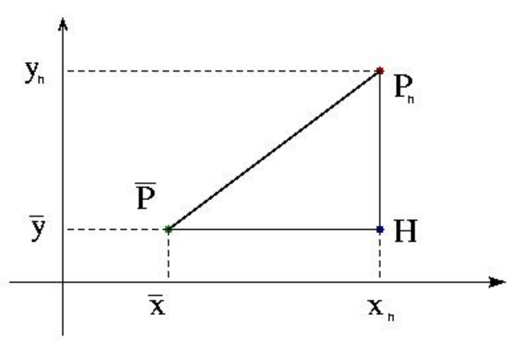


Figura 8.

$\bar{P}$, la lunghezza dell'ipotenusa del triangolo rettangolo $\bar{P}P_nH$ tende a zero, il triangolo si contrae ad un punto e quindi anche i suoi cateti hanno lunghezza infinitesima. Viceversa se i cateti hanno entrambi lunghezza infinitesima per $n \to +\infty$, allora il triangolo collassa ad un punto e la lunghezza del suo ipotenusa tende a zero per $n \to +\infty$.

Spiegazione analitica. Dal momento che

$$0 \leq |x_n - \bar{x}| = \sqrt{(x_n - \bar{x})^2} \leq \sqrt{(x_n - \bar{x})^2 + (y_n - \bar{y})^2} = \|P_n - \bar{P}\|$$

è evidente che se P_n converge a $\bar{P}$, allora x_n converge a $\bar{x}$ in $\mathbb{R}$; analogamente, da

$$0 \leq |y_n - \bar{y}| = \sqrt{(x_n - \bar{x})^2} \leq \sqrt{(x_n - \bar{x})^2 + (y_n - \bar{y})^2} = \|P_n - \bar{P}\|$$

si deduce che se (x_n, y_n) converge a $(\bar{x}, \bar{y})$, allora y_n tende a $\bar{y}$ in $\mathbb{R}$.

Viceversa, dato che vale la disequazione (perchè?)

$$0 \leq \|P_n - \bar{P}\| = \sqrt{(x_n - \bar{x})^2 + (y_n - \bar{y})^2} \leq |x_n - \bar{x}| + |y_n - \bar{y}|,$$

se entrambe le successioni $|x_n - \bar{x}|$ e $|x_n - \bar{x}|$ sono infinitesime, anche $\|P_n - \bar{P}\|$ lo è.

In definitiva, calcolare il limite di una successione in $\mathbb{R}^2$ è la stessa cosa che calcolare i limiti di due successioni di numeri reali: le due componenti della successione.

Esercizio 2.6. *Sia $P_0 = (1, 1)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Sia P_n la successione definita da $P_{n+1} = \alpha P_n$. Per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$, P_n è convergente?*

Altre norme sul pianeta $\mathbb{R}^2$. Da quanto abbiamo visto più su

$$\max\{|x_n - \bar{x}|, |y_n - \bar{y}|\} \leq \sqrt{(x_n - \bar{x})^2 + (y_n - \bar{y})^2} \leq 2 \max\{|x_n - \bar{x}|, |y_n - \bar{y}|\}.$$

Inoltre vale anche (c'è da scriverlo? ...verificare!)

$$\sqrt{(x_n - \bar{x})^2 + (y_n - \bar{y})^2} \leq |x_n - \bar{x}| + |y_n - \bar{y}| \leq 2\sqrt{(x_n - \bar{x})^2 + (y_n - \bar{y})^2}$$

Queste disequazioni esprimono che è possibile esprimere la convergenza di P_n a $\bar{P}$ anche tramite le *diverse definizioni di distanza* date da

$$\|P_n - \bar{P}\|_\infty := \max\{|x_n - \bar{x}|, |y_n - \bar{y}|\}$$

$$\|P_n - \bar{P}\|_1 := |x_n - \bar{x}| + |y_n - \bar{y}|$$

In uno stesso insieme –nel nostro caso $\mathbb{R}^2$– si possono considerare distanze diverse! Mentre, in generale, metriche diverse possono dar luogo a proprietà di convergenza diverse, le disequazioni di sopra, mostrano che le distanze $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$ sono tutte equivalenti tra loro: una successione converge rispetto a $\|\cdot\|$ se e solo se converge rispetto a $\|\cdot\|_\infty$, e se e solo se converge rispetto a $\|\cdot\|_1$.

Esercizio 2.7. *(i) Dimostrare che*

$$\|(x, y)\|_\infty := \max\{|x|, |y|\} \qquad e \qquad \|(x, y)\|_1 := |x| + |y|$$

definiscono due norme in $\mathbb{R}^2$, cioè verificano le proprietà 1, 2 e 3 di $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
(ii) Dimostrare che $d_\infty(P, Q) := \|P - Q\|_\infty$ e $d_1(P, Q) := \|P - Q\|_1$ definiscono due distanze in $\mathbb{R}^2$, cioè verificano le proprietà i, ii e iii di $d(P, Q) := \|P - Q\|$.
(iii) Disegnare i dischi di centro O e raggio 1 rispetto alle distanze date da $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$.

3. Successioni di Cauchy

Ancora una volta ricordiamoci qual'è il nostro obiettivo principale: dare senso all'affermazione "$\mathbb{R}^2$ è completo". Nel caso di $\mathbb{R}$, uno dei modi per esprimere questa proprietà è "tutte le successioni di Cauchy in $\mathbb{R}$ sono convergenti". Come abbiamo visto/detto questa proprietà non è sempre verificata (ad esempio, non vale in $\mathbb{Q}$!).

Definizione 3.1. *Una successione $\{P_n\}$ in $\mathbb{R}^2$ è una* successione di Cauchy *(o* successione fondamentale*) se*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \textit{tale che} \quad \|P_m - P_n\| < \varepsilon \quad \forall\, m, n \geq n_\varepsilon.$$

Come le loro sorelle in $\mathbb{R}$, le successioni di Cauchy in $\mathbb{R}^2$ godono di alcune proprietà:

1. Ogni successione convergente è di Cauchy.
2. Ogni successione di Cauchy è limitata.

Dimostrazione di 1. e 2. 1. Se P_n converge a $\bar{P}$ si ha

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq n_\varepsilon, \quad \|P_n - P\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora, per la disuguaglianza triangolare, se $m, n \geq n_\varepsilon$,

$$\|P_m - P_n\| = \|P_m - \bar{P} + \bar{P} - P_n\| \leq \|P_m - \bar{P}\| + \|P_n - \bar{P}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. Bisogna mostrare che esiste $R > 0$ tale che $\|P_n\| \leq R$ per ogni n. Fissato $\varepsilon = 1$, sia n_1 il corrispondente indice nella Definizione 3.1. Allora per ogni $n \geq n_1$, $\|P_n - P_{n_1}\| \leq 1$, e quindi

$$\|P_n\| = \|P_n - P_{n_1} + P_{n_1}\| \leq \|P_n - P_{n_1}\| + \|P_{n_1}\| \leq \|P_1\| + 1 \qquad \forall\, n \geq n_1.$$

Questa stima controlla la grandezza di $\|P_n\|$ per $n \geq n_1$. Per controllare $\|P_n\|$ <u>per ogni</u> n basta prendere il valore massimo tra $\|P_{n_1}\| + 1$ e $\|P_0\|$,...,$\|P_{n_1-1}\|$:

$$\|P_n\| \leq \max\{\|P_0\|, \ldots, \|P_{n_1-1}\|, \|P_{n_1}\| + 1\} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Il massimo a destra è ben definito perché è il massimo tra un numero <u>finito</u> di numeri.

Esercizio 3.2. *Dimostrare, usando la definizione, che*
(i) se P_n e Q_n sono di Cauchy, allora lo è anche $P_n + Q_n$.
(ii) Se P_n e Q_n sono di Cauchy, allora anche $\|P_n - Q_n\|$ è di Cauchy.
Suggerimento. *Utilizzare le disequazioni (dimostrare la prima!)*

$$\big|\|A\| - \|B\|\big| \leq \|A - B\| \leq \|A\| + \|B\| \qquad \forall\, A, B \in \mathbb{R}^2,$$

per mostrare

$$\|(P_n + Q_n) - (P_m + Q_m)\| \leq \|P_n - P_m\| + \|Q_n - Q_m\|$$
$$\big|\|P_n - Q_n\| - \|P_m - Q_m\|\big| \leq \|P_n - P_m\| + \|Q_n - Q_m\|.$$

Il fatto fondamentale è che *anche in $\mathbb{R}^2$, tutte le successioni di Cauchy sono convergenti!* In altre parole, vale il seguente fondamentale Teorema.

Teorema 3.3. *Sia P_n una successione in $\mathbb{R}^2$, allora*

$$P_n \quad \textit{è di Cauchy} \qquad \Longleftrightarrow \qquad P_n \quad \textit{è convergente.}$$

Dimostrazione del Teorema 3.3. Una delle due implicazioni è già stata dimostrata: tutte le successioni convergenti sono di Cauchy. Supponiamo ora che $P_n = (x_n, y_n)$ sia una successione di Cauchy, allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $m, n \geq n_\varepsilon$,

$$\|P_m - P_n\| = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2} < \varepsilon.$$

Dato che

$$|x_m - x_n| \leq \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2} \qquad \text{e} \qquad |y_m - y_n| \leq \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2},$$

ne segue che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $m, n \geq n_\varepsilon$, valgono le disuguaglianze

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad |y_m - y_n| < \varepsilon.$$

In altre parole, le successioni x_n e y_n sono successioni di Cauchy in $\mathbb{R}$ e, pertanto, convergenti. Quindi anche la successione P_n è convergente. ∎

Il fatto che in $\mathbb{R}^2$ valga il Teorema 3.3 si esprime dicendo che $\mathbb{R}^2$ è COMPLETO. In definitiva, $\mathbb{R}^2$, dotato di somma, prodotto per uno scalare, norma (e quindi distanza), con tutte le proprietà annesse e connesse (in particolare il Teorema 3.3) è uno SPAZIO VETTORIALE NORMATO COMPLETO, o, più brevemente, uno SPAZIO DI BANACH.

OSSERVAZIONE 3.4. Come mai la dimostrazione della convergenza delle successioni di Cauchy in $\mathbb{R}$ è estremamente più complicata di quelle che abbiamo dato poco più su per le successioni di $\mathbb{R}^2$? Semplice, perché quest'ultima si basa sulla precedente! Lo sconto di fatica che abbiamo avuto è conseguenza dell'aver sgobbato a suo tempo in $\mathbb{R}$.

È possibile comunque dimostrare il Teorema 3.3 seguendo la stessa strategia utilizzata per dimostrarlo in $\mathbb{R}$:

passo 1. si osserva che ogni successione di Cauchy è limitata (per la dimostrazione tornare indietro di una pagina);

passo 2. si dimostra il Teorema di Bolzano–Weierstrass in $\mathbb{R}^2$: *ogni successione P_n limitata ammette una sottosuccessione P_{n_k} convergente ad un qualche $\bar{P}$*;

passo 3. si dimostra che <u>tutta</u> la successione P_n converge a $\bar{P}$.

Il passo più delicato è chiaramente il secondo. Per dimostrarlo, si può fare ricorso alla sua versione in $\mathbb{R}$: se (x_n, y_n) limitata, allora x_n è limitata, quindi è possibile estrarre una sottosuccessione x_{n_k} di x_n convergente; per la limitatezza di (x_n, y_n), anche la successione y_{n_k} risulta essere limitata ed estraendo un'ulteriore sottosuccessione $y_{n_{k_j}}$ da y_{n_k} si ottiene la sottosuccessione $(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})$ richiesta.

4. A volo d'angelo sugli spazi normati

Concludiamo il Capitolo con una sezione finale di panoramica su alcune strutture più astratte: gli spazi normati. L'esperienza e la ginnastica, fatta su $\mathbb{R}$ prima e su $\mathbb{R}^2$ poi, ci hanno insegnato che per parlare di limiti e di completezza quello che serve è una nozione di distanza.

Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, cioè un insieme in cui siano definite la somma e il prodotto per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ con tutte le proprietà ben note. Indichiamo gli elementi di X con le lettere minuscole $x, y, \dots$.

DEFINIZIONE 4.1. *Un'applicazione da X in $[0, +\infty)$, che associa all'elemento x il numero nonnegativo $\|x\|$ e che verifichi le proprietà:*

1. *positività:* $\|x\| \geq 0 \quad \forall\, x \in X \qquad e \qquad \|x\| = 0 \iff x = 0$
2. *omogeneità:* $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \qquad \forall\, x \in X \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$
3. *disuguaglianza triangolare:* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall\, x, y \in X$

è una NORMA SU X *(o* MODULO*). Uno spazio vettoriale in cui sia definita una norma, si chiama* SPAZIO VETTORIALE NORMATO.

Tutte le volte che uno spazio vettoriale è dotato di una norma, è sempre automaticamente definita una DISTANZA, attraverso la solita posizione:

$$d(x, y) := \|x - y\| \qquad \forall\, x, y \in X.$$

Grazie alla proprietà della norma $\|\cdot\|$, la distanza gode di tre (magiche) proprietà
i. *positività.* $d(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in X$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$.
ii. *simmetria.* $d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in X$.
iii. *disuguaglianza triangolare.* Per ogni $x, y, z \in X$, vale $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Non ne vorrete certo la dimostrazione... L'avete già vista! Grazie alla distanza, è possibile parlare, senza colpo ferire, di limite di successioni x_n in X. Ma...

Nihil recte sine exemplo docetur

Quali esempi abbiamo di spazi vettoriali normati?

Esempio 1. $X = \mathbb{R}$. In effetti, l'insieme dei numeri reali può essere visto come uno spazio vettoriale su sé stesso. Un po' "egocentrico" forse, ma possibile. La norma su $\mathbb{R}$ è evidentemente il buon vecchio *valore assoluto.* Capito perché siamo così affezionati a $|\cdot|$?

Esempio 2. $X = \mathbb{R}^2$. Anche questo esempio si è già visto. L'insieme è composto dalle coppie ordinate di numeri reali e una norma possibile (quella che useremo sempre nel seguito) è

$$\|(x, y)\| := \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Si è detto e scritto che si potrebbe anche decidere per gusto o per necessità di utilizzare delle norme definite in modo diverso, ad esempio,

$$\|(x,y)\|_\infty := \max\{|x|,|y|\} \qquad \text{oppure} \qquad \|(x,y)\|_1 := |x|+|y|.$$

Esempio 3. $X = \mathbb{R}^3$. Di chi parliamo? Non ci vuole molta fantasia per immaginare che con $\mathbb{R}^3$ si indica l'insieme composto dalle terne ordinate di numeri reali. Il tipico elemento di $\mathbb{R}^3$ è della forma (x,y,z) con $x,y,z \in \mathbb{R}$. Le operazioni di somma e prodotto per uno scalare ve le lasciamo da immaginare. La norma più nota è analoga a quella introdotta su $\mathbb{R}^2$:

$$\|(x,y,z)\| := \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Esempio n. Dimensione 3 non ci basta... c'è il tempo, e, forse, c'è anche qualcosa più in là... Insomma lasciamo andare la fantasia e consideriamo $X = \mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{N}$, cioè l'insieme delle $n-$ple ordinate di numeri reali, in altre parole oggetti del tipo $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Anche qui la somma ed il prodotto per un numero reale λ non sono troppo difficili da intuire. La norma usuale è data da

$$\|(x_1,x_2,\dots,x_n)\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2} \qquad (x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Ovviamente anche in $\mathbb{R}^n$ (e quindi in particolare anche in $\mathbb{R}^3$) è possibile introdurre norme di tipo diverso, ad esempio,

$$\|(x_1,x_2,\dots,x_n)\|_\infty := \max\{|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|\}$$

oppure

$$\|(x_1,x_2,\dots,x_n)\|_1 := |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|.$$

A voi la verifica della validità delle proprietà descritte in Definizione 4.1.

Esempio ∞. Qui ci sbilanciamo in qualcosa di un po' più complicato... Consideriamo come insieme X l'insieme delle successioni reali $\{a_n\}$ a quadrato sommabile, cioè

$$X = \left\{ \{a_n\} \,:\, a_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < +\infty \right\}.$$

Questo spazio si può dotare della struttura di spazio vettoriale attraverso le definizioni (naturali): per $\{a_n\}, \{b_n\} \in X$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\text{somma}: \quad \{a_n\}+\{b_n\} := \{a_n+b_n\} \qquad \text{prodotto per uno scalare}: \quad \lambda\,\{a_n\} := \{\lambda\, a_n\}.$$

Quale norma definire? Beh... c'è un motivo se abbiamo richiesto che le successioni siano a quadrato sommabile: eccolo

$$\|\{a_n\}\| := \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2} \qquad \{a_n\} \in X.$$

Usualmente questo spazio si indica con ℓ^2. Un osservazione: cos'è una successione in ℓ^2? Niente di più semplice: una successione di successioni!

Esercizio 4.2. *Perché in X non si può scegliere come norma di $\{a_n\}$ il valore $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$?*

Esempio particolarmente gustoso! Come ultimo esempio, fissato $[a, b]$ intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$, consideriamo l'insieme $C([a, b])$ delle funzioni continue da $[a, b]$ in $\mathbb{R}$:

$$C([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ continua in } [a,b]\}$$

Anche questo è uno spazio vettoriale normato. La somma è definita puntualmente: date $f, g \in C([a, b])$, la funzione $f + g$ è definita da

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \qquad \forall x \in [a, b].$$

L'elemento neutro per questa somma è la funzione che vale 0 in tutto $[a, b]$. La moltiplicazione per lo scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ è data da

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x) \qquad \forall x \in [a, b].$$

A voi verificare che siano soddisfatte le proprietà necessarie perché, con queste operazioni, $C([a, b])$ sia effettivamente uno spazio vettoriale. E la norma? Eccola:

$$\|f\| := \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \qquad\qquad \forall\, f \in C([a, b]).$$

L'esempio è talmente interessante, che ci dedichiamo ora a verificare la validità delle proprietà della norma.

1. Il fatto $\|f\|$ sia non negativo è evidente. Se $\|f\| = 0$, allora, per definizione, $\max_{x\in[a,b]} |f(x)| = 0$, cioè $|f(x)| \leq 0$ per ogni $x \in [a, b]$. Quindi $f \equiv 0$.
2. Sia $f \in C([a, b])$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora
$$\|\lambda f\| = \max_{x\in[a,b]} |\lambda f(x)| = \max_{x\in[a,b]} |\lambda||f(x)| = |\lambda| \max_{x\in[a,b]} |f(x)| = |\lambda|\|f\|.$$
3. Resta la disuguaglianza triangolare. Per ogni $x \in [a, b]$,
$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + \max_{x\in[a,b]} |g(x)| = \|f\| + \|g\|.$$

Quindi, il numero reale $\|f\| + \|g\|$ è un maggiorante per $|f(x) + g(x)|$, ne segue che

$$\|f + g\| := \max_{x\in[a,b]} |f(x) + g(x)| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Come questi esempi mostrano, la classe degli *spazi vettoriali normati* è estremamente ampia. Ci sarebbero anche molti altri esempi, ma non c'è proprio né il tempo, né il motivo di introdurne altri.

Una volta introdotta la norma, come si diceva, è introdotta una distanza, e una volta introdotta una distanza si può parlare di successioni convergenti.

Definizione 4.3. *Una successione x_n in X* converge a $\bar{x}$ per $n \to +\infty$ *se*

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - \bar{x}\| = 0.$$

Che vuol dire la convergenza, quindi? Semplicemente che la distanza di x_n da $\bar{x}$ tende a zero per $n \to +\infty$. E nei casi concreti, ad esempio, in $C([a,b])$? Una successione in $C([a,b])$ è una successione di elementi di $C([a,b])$, ovvero una successione di funzioni f_n! Per definizione, una successione di funzioni f_n converge in $C([a,b])$ ad $f \in C([a,b])$ se

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - \bar{f}\| = 0,$$

cioè, riguardando la definizione di norma in $C([a,b])$ se

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - \bar{f}(x)| = 0.$$

Ma guarda un po' chi ti vado ad incontrare... questa convergenza è proprio la *convergenza uniforme*!

Ormai la voragine è aperta. In quest'esaltazione di generalità, proponiamo un'ulteriore definizione...

DEFINIZIONE 4.4. *Una successione x_n in X è* UNA SUCCESSIONE DI CAUCHY *(o* FONDAMENTALE*) se*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \textit{tale che} \quad \|x_m - x_n\| < \varepsilon \quad \forall\, m, n \geq n_\varepsilon.$$

Ripetendo le dimostrazioni già viste in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{R}^2$, si deduce che: *(i) ogni successione convergente è di Cauchy*; *(ii) ogni successione di Cauchy è limitata.*

DEFINIZIONE 4.5. *Uno spazio vettoriale normato X si dice* COMPLETO *se ogni successione di Cauchy è convergente. Uno spazio vettoriale normato completo è uno* SPAZIO DI BANACH[3].

Di esempi di spazi di Banach ne abbiamo già un paio: $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$. Con procedimento analogo a quanto visto in quei casi, si dimostra che anche $\mathbb{R}^n$ è uno spazio di Banach per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Passiamo all'esempio più gustoso per concludere con una certa soddisfazione l'*excursus*: anche lo spazio $C([a,b])$, con la norma che abbiamo definito, è completo!

TEOREMA 4.6. *Lo spazio vettoriale $C([a,b])$ dotato della norma $\|f\| := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ è uno spazio vettoriale normato completo, cioè è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Bisogna far vedere che ogni successione di Cauchy in $C([a,b])$ è convergente. In altre parole, bisogna mostrare che esiste $f \in C([a,b])$ tale che $\|f_n - f\|$ è infinitesima per $n \to +\infty$, cioè tale che f_n converge ad f uniformemente in $[a,b]$.

Preliminarmente dimostriamo che c'è convergenza puntuale. Sia f_n una successione di Cauchy in $C([a,b])$, cioè sia f_n tale che

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \text{tale che} \quad \|f_m - f_n\| < \varepsilon \quad \forall\, m, n \geq n_\varepsilon,$$

[3] Stefan Banach, nato il 30 Marzo 1892 a Cracovia, morto il 31 agosto 1945 a Lvov.

e cioè, per la definizione di norma,

$$\forall\,\varepsilon>0,\quad \exists\,n_\varepsilon\in\mathbb{N},\quad \text{tale che}\quad \max_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon\quad \forall\,m,n\geq n_\varepsilon. \tag{4.1}$$

Allora, per ogni $x\in[a,b]$ fissato, vale

$$\forall\,\varepsilon>0,\quad \exists\,n_\varepsilon\in\mathbb{N},\quad \text{tale che}\quad |f_n(x)-f_m(x)|\leq\|f_n-f_m\|<\varepsilon\quad \forall\,m,n\geq n_\varepsilon.$$

In particolare, la successione $\{f_n(x)\}$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$, e dunque, per la completezza di $\mathbb{R}$, convergente. Questo dimostra che la successione di funzioni continue f_n converge puntualmente ad una funzione che, con gran fantasia, indichiamo con f:

$$f(x):=\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\qquad\qquad \forall\,x\in[a,b].$$

Tale funzione f è il nostro candidato anche per la convergenza uniforme. Si noti che, al momento, non possiamo ancora concludere che $f\in C([a,b])$. Se però mostriamo che la convergenza di f_n ad f è uniforme, allora (per il Teorema 3.9(ii) delle Note, p.II) possiamo dedurre anche che f è continua.

La (4.1) può essere riscritta nella forma

$$\forall\,\varepsilon>0,\quad \exists\,n_\varepsilon\in\mathbb{N},\quad \forall\,x\in[a,b]\quad \text{tale che}\quad |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon\quad \forall\,m,n\geq n_\varepsilon.$$

Dato che la disequazione finale è verificata per ogni $m\geq n_\varepsilon$, possiamo passare la limite per $m\to+\infty$, ottenendo

$$\forall\,\varepsilon>0,\quad \exists\,n_\varepsilon\in\mathbb{N},\quad \text{tale che}\quad |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\quad \forall\,m,n\geq n_\varepsilon,\forall x\in[a,b].$$

Poiché n_ε non dipende da x, per definizione, la convergenza di f_n ad f è uniforme. ∎

Esercizio 4.7. *Sia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tale che esista $\theta\in(0,1)$ per cui $|F(\xi)-F(\eta)|\leq\theta|\xi-\eta|$ per ogni ξ, $\eta\in\mathbb{R}$. Sia f_n la successione in $C([0,1])$ definita da*

$$f_0\equiv 0,\qquad f_{n+1}(x)=\int_0^x F(f_n(t))\,dt.$$

(i) Dimostrare che f_n è convergente in $C([0,1])$.
(ii) Indicato con f il limite di f_n, dimostrare che f è derivabile in $[0,1]$ e valgono

$$f(0)=0\qquad f'(x)=F(f(x))\qquad \forall\,x\in[0,1].$$

Suggerimento. *(i) Stimare il valore di $\|f_{n+1}-f_n\|$ in termini di θ e di $\|f_1-f_0\|$. Utilizzare la stima precedente e la disuguaglianza triangolare, per mostrare che $\|f_{n+p}-f_n\|$ può essere resa arbitrariamente piccola per n sufficientemente grande e p qualsiasi.*
(ii) Dimostrare che $F(f_n)$ converge uniformemente a $F(f)$ e passare al limite sotto segno di integrale. Poi, usare un po' di fantasia...

CAPITOLO 7

Numeri complessi e serie di potenze

`Versione del 28 aprile 2003`

1. La situazione si fa complessa: struttura algebrica di $\mathbb{C}$

Antefatto. L'insieme dei reali ha in sé una asimmetria che a qualcuno appare poco elegante: mentre tutti i polinomi di grado 1 hanno un numero di radici pari al loro grado (cioé 1), lo stesso non si può dire per i polinomi di grado qualsiasi. Sostanzialmente tutto si può ricondurre al fatto che in $\mathbb{R}$ esiste un semplice polinomio di secondo grado che non ha nessuna soluzione: x^2+1. Proponiamoci dunque di costruire un nuovo insieme che: contenga i reali, sia ancora un campo, i polinomi di grado n abbiano esattamente n radici (contando la molteplicità). Il progetto è ambizioso ed anche un po' folle, ma fa parte della matematica l'arte di essere (a volte) coraggiosi visionari... Proviamo prima di tutto qualche conto puramente simbolico. Decidiamo di inserire nel nostro nuovo insieme (di cui fanno parte i reali) un nuovo elemento, che indichiamo con i (per *immaginario*, dato che è il prodotto di un notevole sforzo di fantasia), che abbia la proprietà $i^2+1=0$. Consideriamo come estensione di $\mathbb{R}$, l'insieme costituito da oggetti della forma $x+iy$ con $x,y\in\mathbb{R}$. Scegliendo $y=0$, si riottengono i buoni vecchi numeri reali, quindi la prima condizione che ci siamo posti è soddisfatta. Come definire somma e prodotto? Proseguiamo in maniera simbolica (si ricordi la regola $i^2+1=0$): dati $z_1=x_1+iy_1$ e $z_2=x_2+iy_2$

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= (x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),\\ z_1\cdot z_2 &= (x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+i(x_1y_2+y_1x_2)+i^2y_1y_2\\ &= (x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2). \end{aligned}$$

Ottimo: il risultato di queste operazioni dà ancora oggetti della forma $x+iy$ con $x,y\in\mathbb{R}$. Detto in altre parole, la regola $i^2+1=0$ è sufficiente per fare in modo che l'insieme che stiamo costruendo sia chiuso rispetto a somma e prodotto. Dato che questi primi conti sembrano promettenti... ripartiamo da capo, lavorando questa volta in maniera rigorosa.

Nell'introdurre $\mathbb{R}^2$ e le sue operazioni, abbiamo definito la somma di due vettori, ed il prodotto per un numero reale, dotando $\mathbb{R}^2$ di una struttura di spazio vettoriale. Abbiamo lasciato da parte la seconda delle operazioni fondamentali in $\mathbb{R}$: il prodotto (interno). In altre parole, non abbiamo definito il prodotto tra due vettori di $\mathbb{R}^2$; ed è proprio quello che andiamo a fare adesso.

Definizione 1.1. *Siano $z_1=(x_1,y_1)$ e $z_2=(x_2,y_2)$ due elementi di $\mathbb{R}^2$. Definiamo il prodotto tra z_1 e z_2 nel seguente modo:*

$$z_1\cdot z_2=(\,x_1x_2-y_1y_2\,,\,x_1y_2+y_1x_2\,).$$

È facile verificare che il prodotto così definito

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (z_1\,,\, z_2) & \longmapsto & z_1 \cdot z_2 \end{array}$$

soddisfa le solite proprietà (commutatitività, associatività, distributività), ed è evidente che $\mathbb{R}^2$ è – per definizione – chiuso rispetto a questa operazione. Chi è l'elemento neutro rispetto a quest'operazione di prodotto (ovvero: quale vettore svolge il ruolo di "1" in $\mathbb{R}$)? Un po' di algebra banale ci rivela che, per ogni $z = (x, y)$ in $\mathbb{R}$, $z \cdot (1, 0) = z$, e quindi $u = (1, 0)$ è l'elemento neutro rispetto al prodotto. Riusciamo, dato un elemento non nullo $z = (x, y)$, a scrivere l'inverso z^{-1}, ovvero un vettore $z' = (x', y')$ tale che $z \cdot z' = u = (1, 0)$? Anche qui serve un po' di lavoro algebrico per mostrare che z^{-1} esiste, è unico, ed è dato da (verificare per credere)

$$z^{-1} = (x', y') = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) .$$

Si noti che se $(x, y) \neq (0, 0)$, allora $x^2 + y^2$ è diverso da zero, e quindi z^{-1} è perfettamente definito per ogni $z \neq (0, 0)$.

In definitiva, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ è un campo proprio come lo è $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Con una differenza fondamentale: se calcoliamo $(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1)$ troviamo $(0, 1)^2 = (-1, 0) = -u$.

Definizione 1.2. *Un elemento di* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *della forma* $(x, 0)$ *si dice* NUMERO REALE*; un elemento di* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *della forma* $(0, y)$ *si dice* NUMERO IMMAGINARIO*; il numero immaginario* $(0, 1)$ *si chiama* UNITÀ IMMAGINARIA i. *Un elemento generico* $z = (x, y)$ *di* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *si dice* NUMERO COMPLESSO.

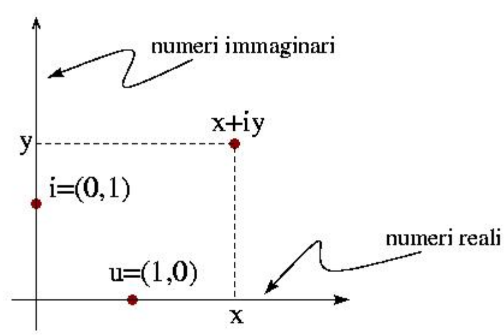


Figura 1.

Aiuto! Siamo in $\mathbb{R}^2$ (il prodotto cartesiano dell'insieme dei reali $\mathbb{R}$ con se stesso), e definiamo l'insieme dei numeri reali? Che cosa è questo pasticcio? Chi è realmente $\mathbb{R}$? L'insieme che abbiamo faticosamente definito nel Capitolo 1, o questo bizzarro oggetto "contenuto" in $\mathbb{R}^2$? E perché non chiamare numero reale **anche** un oggetto della forma $(0, y)$, invece che limitarsi a quelli del tipo $(x, 0)$?

La risposta a queste domande è semplice: se **restringiamo** le operazioni di somma e prodotto definite in $\mathbb{R}^2$ all'insieme degli elementi della forma $(x, 0)$, ritroviamo le stesse proprietà di somma e prodotto valide nell'insieme $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ (ad esempio, l'inverso di $(x, 0)$ è $(\frac{1}{x}, 0)$, se $x \neq 0$); non solo: l'insieme degli elementi della forma $(x, 0)$ è **chiuso** rispetto alle due operazioni. Altrettanto non si può dire dell'insieme dei numeri immaginari, cioè degli elementi della forma $(0, y)$: ad esempio, $i \cdot i = i^2 = (-1, 0)$ che è un numero reale.

Ricapitolando: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è contenuto in $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, ed è identificato con gli elementi della forma $(x, 0)$, associando ad x esattamente $(x, 0)$; pertanto, $u = (1, 0)$ non è altro che il nostro caro "1". Ma allora la relazione $(0, 1)^2 = (-1, 0)$ si legge (se volete, si interpreta) $i^2 = -1$. Quindi l'unità immaginaria i è tale che il suo quadrato vale -1. Un'assurdità! Non esistono numeri reali il cui quadrato sia 1! E, infatti, chi ha parlato di numeri reali?

Fermiamoci un attimo e guardiamo che cosa abbiamo ottenuto: un insieme dotato di somma e prodotto, che contiene $\mathbb{R}$ (preservandone la struttura), e nel quale esistono oggetti il cui quadrato è un numero reale negativo. Con il trucco di definire uno strano prodotto in $\mathbb{R}^2$, abbiamo trovato un'estensione di $\mathbb{R}$ in cui hanno senso **anche** le radici quadrate di numeri negativi. A differenza delle altre estensioni (ricordate? gli interi per le sottrazioni, i razionali per le divisioni, i reali per le radici quadrate di numeri positivi), questa volta siamo dovuti passare per uno spazio "doppio": abbiamo dovuto raddoppiare le dimensioni e sfruttare la maggiore libertà di cui si gode in $\mathbb{R}^2$ perchè $\mathbb{R}$ è troppo stretto.

DEFINIZIONE 1.3. *Indichiamo con il simbolo $\mathbb{C}$ lo spazio $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ che battezziamo* INSIEME DEI NUMERI COMPLESSI *o, grazie alle proprietà soddisfatte da somma e prodotto,* CAMPO DEI NUMERI COMPLESSI*.*

Ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$, si può riscrivere come

$$z = (x, y) = x\,(1, 0) + y\,(0, 1) = x + i\,y\,.$$

Vale la pena battezzare x e y (l'ascissa e l'ordinata del punto z).

DEFINIZIONE 1.4. *Dato un numero complesso $z = (x, y)$, definiamo $x = Re\,z$ la sua* PARTE REALE *e $y = Im\,z$ la sua* PARTE IMMAGINARIA[1]*, cosicché*

$$z = Re\,z + i\,Im\,z\,.$$

Per quel che diremo/faremo dopo, fa comodo introdurre qualche altra definizione (è come entrare in un nuovo gruppo di amici: all'inizio bisogna fare le presentazioni!)

DEFINIZIONE 1.5. *Dato $z = x + iy \in \mathbb{C}$,* CONIUGATO DI *$z$, che si indica con $\bar{z}$, è il numero complesso definito da $\bar{z} = x - iy$. Pertanto $Re\,\bar{z} = Re\,z$ e $Im\,\bar{z} = -Im\,z$. Il* MODULO DI *z è definito da $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ dove $z = x + iy$.*

Il modulo di un numero complesso $z = x + iy$ definisce un'applicazione $|\cdot| : \mathbb{C} \to [0, +\infty)$ e coincide con il modulo del punto (x, y) in $\mathbb{R}^2$, che in precedenza abbiamo indicato

[1] Si noti che la parte immaginaria di un numero complesso è un numero reale.

con due sbarre verticali: $|z| = \|(x, y)\|$. Questo vuol dire che tutto quello che abbiamo imparato per il piano $\mathbb{R}^2$, dotato della metrica definita da $\|\cdot\|$, si riporta parola per parola a $\mathbb{C}$ dotato della metrica definita da $|\cdot|$ (è la stessa!). Ci si potrebbe preoccupare dell'aver scelto di utilizzare lo stesso simbolo per il modulo di $\mathbb{R}$ e per quello di $\mathbb{C}$, ma una riflessione di un quarto di secondo mostra che il modulo in $\mathbb{C}$ è un'estensione di quello in $\mathbb{R}$, quindi tutto è più che coerente.

Dalle definizione di coniugato di un numero complesso, segue che $|z|^2 = z\,\bar{z}$. Quindi, se $z \neq 0$, l'inverso di z rispetto al prodotto è dato da

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}\,.$$

Esercizio 1.6. *Verificare la validità di*

$$|zw| = |z|\,|w| \qquad\qquad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

Esercizio 1.7. *Scrivere parte reale, parte immaginaria, modulo, coniugato e inverso dei seguenti numeri complessi (z è un qualsiasi complesso):*

$$i\,, \quad \frac{1}{i}\,, \quad z^2\,, \quad \frac{1+i}{1-i}\,, \quad \frac{(3+2i)^2}{2-i}\,, \quad \frac{1}{1-z}\,.$$

Risposta 1.7: *Il quarto: moltiplicando e dividendo per il coniugato del denominatore:*

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i}\,\frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1-1+2i}{i} = i\,.$$

Rappresentazione polare dei numeri complessi. I punti di $\mathbb{R}^2$ possono essere identificati, oltre che con le **coordinate cartesiane**, cioè con i numeri x e y, anche in altri modi, ad esempio con le cosiddette **coordinate polari**. Dato un punto $P = (x, y)$ del piano, definiamo

$$\rho = \|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

e $\theta \in [0, 2\pi)$ l'angolo formato dal vettore (x, y) con l'asse delle x, misurato a partire dall'asse x in verso antiorario; se $(x, y) = (0, 0)$, θ è indeterminato.

Un po' di trigonometria ci permette di dire che x e y sono legati a ρ e θ dalla relazione

$$x = \rho\,\cos\theta\,, \qquad y = \rho\,\sin\theta\,.$$

Se $\rho = 0$, ogni valore di θ "restituisce" $(0, 0)$, e l'ambiguità per θ nell'origine non disturba.

Così come si possono introdurre le coordinate polari in $\mathbb{R}^2$, è possibile dare una rappresentazione in coordinate polari per i numeri complessi. Ogni numero complesso è identificato da un coppia (ρ, θ), con $\rho \geq 0$ e θ in $\mathbb{R}$: ρ è esattamente $|z|$, mentre θ, l'ARGOMENTO del numero complesso z, è l'angolo formato con l'asse x dal vettore che unisce l'origine a z. Se, dati ρ e θ, identifichiamo x e y con

$$x = \rho\,\cos\theta\,, \qquad y = \rho\,\sin\theta\,,$$

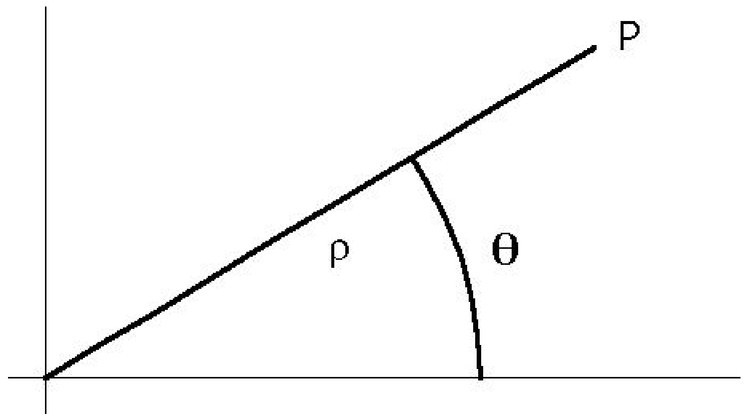


FIGURA 2.

ne segue che $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Dal momento che le funzioni seno e coseno sono periodiche, a θ e $\theta + 2k\pi$ (k intero relativo) corrisponde lo stesso numero complesso z. In altre parole, se $z \neq 0$, l'argomento è determinato a meno di multipli interi di 2π. Definiamo $\mathrm{Arg}\,(z)$ uno qualsiasi dei valori di θ per i quali $z = \rho(\cos\theta + i\,\sin\theta)$, mentre definiamo $\arg(z)$ l'unico valore di θ compreso tra θ_0 e $\theta_0 + 2\pi$, con θ_0 fissato *a priori* nel contesto; nella maggior parte dei casi si sceglierà $\theta_0 = 0$, oppure $\theta_0 = -\pi$. Se $z = 0$, dal momento che $\rho = 0$, $\arg(z)$ e $\mathrm{Arg}\,(z)$ non sono definiti.

ESERCIZIO 1.8. *Determinare la forma "polare" dei numeri (z qualsiasi):*

$$i\,, \quad \frac{1}{i}\,, \quad z^2\,, \quad \frac{2+i}{1-i}\,, \quad \frac{(2i+1)^2}{2+i}\,.$$

Equazioni in $\mathbb{C}$. Nel campo dei complessi (così come in $\mathbb{R}$), è possibile risolvere equazioni. Per le equazioni di primo grado, si può procedere proprio come nel caso di $\mathbb{R}$: siano $A, B \in \mathbb{C}$ con $A \neq 0$ dati, cerchiamo la soluzione di $Az + B = 0$. Sottraendo a destra e sinistra B e moltiplicando per $1/A$, si ottiene:

$$z = -\frac{B}{A} = -\frac{\bar{A}\,B}{|A|^2}$$

grazie a $1/A = \bar{A}/|A|$. Volendo si sarebbe potuto procedere in modo diverso: dato che $A = \mathrm{Re}\,A + i\,\mathrm{Im}\,A$ e $B = \mathrm{Re}\,B + i\,\mathrm{Im}\,B$, l'equazione di primo grado si riscrive come

$$(\mathrm{Re}\,A + i\,\mathrm{Im}\,A)(x + iy) + \mathrm{Re}\,B + i\,\mathrm{Im}\,B = 0$$

dove $z = x + iy$. Sviluppando i prodotti con le regole di $\mathbb{C}$, si ottiene

$$x\,\mathrm{Re}\,A - y\,\mathrm{Im}\,A + \mathrm{Re}\,B + (x\,\mathrm{Im}\,A + y\,\mathrm{Re}\,A + \mathrm{Im}\,B)\,i = 0,$$

che corrisponde ad un sistema di due equazioni in due incognite in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x\,\mathrm{Re}\,A - y\,\mathrm{Im}\,A + \mathrm{Re}\,B = 0 \\ x\,\mathrm{Im}\,A + y\,\mathrm{Re}\,A + \mathrm{Im}\,B = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione restituisce la formula già trovata nel modo precedente (verificare!).

Nel caso di equazioni di grado più alto, si può ragionare in maniera simile. Ad esempio, determinare i numeri complessi z tali che

$$z^2 + 2i\,z\, - 3 = 0\,.$$

Decomponendo nell'equazione in parte reale e parte immaginaria:

$$(x^2 - y^2) + 2i\,x\,y + 2i\,x - 2y - 3 = (x^2 - y^2 - 2y - 3) + i(2x\,y + 2x)\,,$$

l'equazione si riduce ad un sistema

$$z^2 + 2i\,z\, - 3 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 - 2y - 3 = 0\,, \\ 2x\,y + 2x = 0\,. \end{cases}$$

Di questo sistema si devono cercare le soluzioni **reali**; vale a dire che vanno **scartate** le coppie (x, y) di soluzioni del sistema per le quali almeno uno tra x e y non è un numero reale. Continuando nella risoluzione del sistema, la seconda equazione si scrive $2x(y + 1) = 0$, da cui $x = 0$ oppure $y = -1$. Sostituendo $x = 0$ nella prima si ha $y^2 + 2y + 3 = 0$ che non ha soluzioni reali. Sostituendo $y = -1$ si ha $x^2 - 2 = 0$, da cui $x = \pm\sqrt{2}$. In definitiva, $z_1 = \sqrt{2} - i$ e $z_2 = -\sqrt{2} - i$ sono soluzioni dell'equazione (verificarlo!).

Esercizio 1.9. *Risolvere le seguenti equazioni (attenzione alla prima!):*

$$i\,z^2 - 2z - 3\,i = 0\,, \quad z + |z| = 1\,, \quad z^2 + |z| = 2\,, \quad z|z| - 5z + 6 = 0\,.$$

Fin qui nulla di strano (a parte la "stranezza" intrinseca dei numeri complessi): stiamo semplicemente osservando come oggetti definiti in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{R}^2$ si possano reinterpretare in $\mathbb{C}$. L'oggetto che introduciamo adesso è – invece – un po' più esotico (ma sarà ampiamente giustificato in seguito).

Definizione 1.10. *Se θ è in $\mathbb{R}$ definiamo $e^{i\theta}$ come il numero complesso*

$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\,\sin\theta \qquad\qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Cosa abbiamo fatto? Nient'altro che definire una funzione da $i\,\mathbb{R}$ (l'asse dei numeri immaginari) in $\mathbb{C}$; non ci sarebbe nulla di strano se non fosse che non abbiamo definito $f(i\,\theta) = \cos\theta + i\,\sin\theta$, ma abbiamo scelto, di tutti gli innumerevoli simboli a nostra disposizione[2], proprio uno che ha **già** un significato: "e". Nessun problema perché i casi sono due: o è venuta a mancare la fantasia (l'immaginazione avendola già usata per definire i), oppure "c'è qualcosa sotto". Alla fine del capitolo spiegheremo perché la seconda possibilità è quella giusta, ma non mancheranno indizi qua e là.

Dalla definizione di $e^{i\theta}$, e dall'identità fondamentale $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, segue immediatamente che $|e^{i\theta}| = 1$; inoltre, se $\rho = |z|$ e $\theta = \mathrm{Arg}\,(z)$, allora esiste un modo alternativo di indicare un numero complesso z, e cioè

$$z = \rho\, e^{i\theta}\,.$$

[2] $\aleph$, $\hbar$, ∇, $\flat$ e chi più ne ha, più ne metta…

Dati $e^{i\theta_1}$ e $e^{i\theta_2}$ in $\mathbb{C}$, vale

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}\, e^{i\theta_2} &= [\cos\theta_1 + i\,\sin\theta_1]\,[\cos\theta_2 + i\,\sin\theta_2] \\ &= [\cos\theta_1\,\cos\theta_2 - \sin\theta_1\,\sin\theta_2] + i\,[\sin\theta_1\,\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\sin\theta_2] \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}\,. \end{aligned}$$

Pertanto, la funzione $\theta \mapsto e^{i\theta}$ segue le consuete regole degli esponenziali (primo indizio; ma perché "e" e non ad esempio 2?). Dalla formula appena dimostrata segue facilmente che se z_1 e z_2 sono due numeri complessi, allora $|z_1\,z_2| = |z_1|\,|z_2|$ e $\mathrm{Arg}\,(z_1\,z_2) = \mathrm{Arg}\,(z_1) + \mathrm{Arg}\,(z_2)$. Si ha poi (grazie alla formula per l'inverso di un numero complesso)

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho\,e^{i\theta}} = \frac{\overline{\rho\,e^{i\theta}}}{|\rho\,e^{i\theta}|^2} = \frac{e^{-i\theta}}{\rho}\,,$$

e pertanto $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ e $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$. Come conseguenza, se z_1 e z_2 sono due complessi con $z_2 \neq 0$ che in forma polare si scrivono come $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$, allora

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\theta_1}}{\rho_2 e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\,e^{i(\theta_1-\theta_2)}\,.$$

Dalle formule appena dimostrate segue poi che, se z è un numero complesso, e n è un intero relativo (se n è negativo, z deve essere diverso da zero), allora

$$z^n = \left(\rho\,e^{i\theta}\right)^n = \rho^n\,e^{i\,n\theta}\,.$$

Questa formula ha una semplice interpretazione geometrica, che permette di "disegnare" facilmente la potenza n-sima di un numero complesso z: è sufficiente "ruotare" il vettore in verso antiorario (o orario, se la potenza è negativa) di un angolo pari a $|n|-1$ volte l'angolo inizialmente formato dal vettore con l'asse delle x, e poi spostarsi sulla semiretta così ottenuta fino ad arrivare a distanza ρ^n dall'origine (Figura 3).

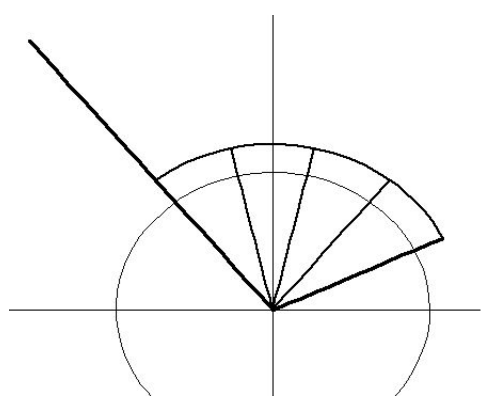


FIGURA 3.

Dalla formula che dà la potenza ennesima di un numero complesso z, e dalla periodicità delle funzioni seno e coseno, si ottiene la formula che dà le radici n-sime di un numero complesso z, in altre parole, possiamo determinare tutte le soluzioni w dell'equazione $w^n = z$ (z assegnato, w incognita). Infatti, se $z = \rho\, e^{i\theta}$, allora

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\left(\frac{\theta + 2k\,\pi}{n}\right)} \,,\; k = 0, \ldots, n-1 \right\} .$$

Si osservi che si ha una differenza fondamentale con il caso dei numeri reali: mentre $\sqrt[4]{1}$ è, per definizione, solo 1, di radici quarte di 1 in campo complesso ne esistono 4: 1, -1, i e $-i$ (verificare!). Geometricamente, le n radici n-sime di z sono i vertici di un poligono regolare ad n lati inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho}$ (Figura 4), e possono essere disegnate seguendo un procedimento inverso rispetto a quello usato per disegnare la potenza n-sima di un numero complesso.

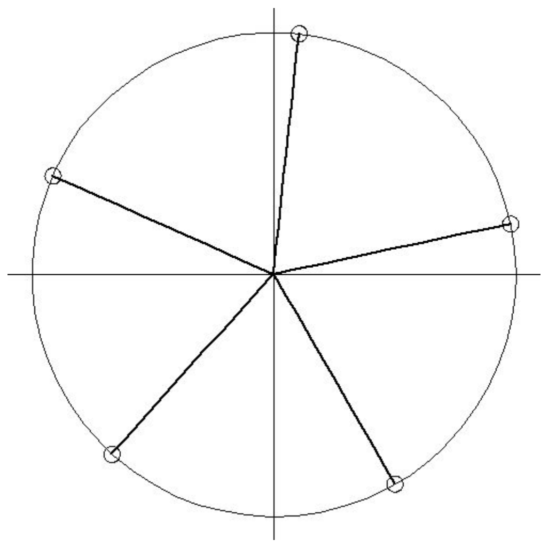


Figura 4.

In effetti, nel caso del simbolo $\sqrt[n]{\cdot}$, si commette un vero e proprio abuso: si usa lo stesso simbolo in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{C}$, mentre i due oggetti hanno delle differenze sostanziali. In $\mathbb{R}$, le "radici" sono sempre *funzioni ad un solo valore*, dove sono definite; nel caso di $\mathbb{C}$, invece, ogni numero complesso ha n radici $n-$esime, quindi si tratta di *funzioni a più valori* (per qualcuno non andrebbero neppure chiamate "funzioni"!).

Esercizio 1.11. Calcolare e disegnare:

$$\sqrt[4]{1+i}\,, \quad \sqrt[3]{(1+i)^2}\,, \quad \sqrt[6]{2-i}\,.$$

2. Successioni e serie di numeri complessi

Una successione $\{z_n\}$ in $\mathbb{C}$ è semplicemente un'applicazione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{C}$, ovvero un elenco di numeri complessi z_n ordinati dal loro indice n. Grazie al fatto che in $\mathbb{C}$ è definito il modulo $|\cdot|$, è possibile parlare di convergenza, con lo stesso significato dato a questo termine in $\mathbb{R}^2$ dotato della norma $\|\cdot\|$.

DEFINIZIONE 2.1. *Una successione* $\{z_n\}$ *in* $\mathbb{C}$ *è* CONVERGENTE A $w \in \mathbb{C}$ *se*

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n - w| = 0\,.$$

La successione z_n corrisponde alla successione di punti $(\operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n)$ contenuta in $\mathbb{R}^2$, quindi, grazie ai risultati noti in $\mathbb{R}^2$,

$$z_n \to w \iff \begin{cases} \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} w\,, \\ \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} w\,. \end{cases}$$

ESERCIZIO 2.2. *Calcolare (se esiste) il limite delle seguenti successioni:*

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^n, \qquad\qquad i^n, \qquad\qquad w^n \quad (w \in \mathbb{C}).$$

ESERCIZIO 2.3. *Dimostrare che*

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = w \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} |z_n| = |w|$$

ESERCIZIO 2.4. *Dato* $\alpha \in \mathbb{R}$*, sia* z_n *la successione definita da*

$$z_0 = 1, \qquad\qquad z_{n+1} = \alpha i z_n.$$

Determinare i valori di α *per cui la successione* z_n *è convergente.*

Anche il concetto di successione di Cauchy può essere riportato in $\mathbb{C}$ (dal punto di vista metrico, non c'è nessuna differenza tra $\mathbb{R}^2$ con $\|\cdot\|$ e $\mathbb{C}$ con $|\cdot|$).

DEFINIZIONE 2.5. *Una successione* $\{z_n\}$ *in* $\mathbb{C}$ *è una* SUCCESSIONE DI CAUCHY *(o* SUCCESSIONE FONDAMENTALE*) se*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \text{tale che} \quad |z_m - z_n| < \varepsilon \quad \forall\, m, n \geq n_\varepsilon.$$

TEOREMA 2.6. *Sia* z_n *una successione in* $\mathbb{C}$*, allora*

$$z_n \quad \text{è di Cauchy} \qquad \iff \qquad z_n \quad \text{è convergente.}$$

Chiaro, no?

Avendo a disposizione il concetto di convergenza per una successione di numeri complessi, non c'è da stupirsi del fatto che si possano considerare serie di numeri complessi.

DEFINIZIONE 2.7. *Data* $\{z_k\}$ *successione in* $\mathbb{C}$*, la* SERIE ASSOCIATA A $\{z_k\}$ *è*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z_k\,.$$

La serie di termine generico z_k *si dice* (SEMPLICEMENTE) CONVERGENTE *se la successione* S_n *è convergente.*

Siccome (per fortuna!) l'operazione di calcolo di parti reale e immaginaria è lineare,

$$S_n = \operatorname{Re}(S_n) + i \operatorname{Im}(S_n) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} z_k\right) + i \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} z_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Re} z_k + i \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Im} z_k\,;$$

quindi, essendo la convergenza di una successione di numeri complessi equivalente alla convergenza (in $\mathbb{R}$) delle due successioni "parte reale" e "parte immaginaria", studiare la convergenza di una serie di numeri complessi è equivalente a studiare la convergenza in $\mathbb{R}$ di due serie (come al solito, doppio lavoro...): la serie di termine generico z_k è convergente se e solo se convergono le due serie di termine generico $\operatorname{Re} z_k$ e $\operatorname{Im} z_k$.

Anche in campo complesso, vale la condizione necessaria di convergenza.

PROPOSIZIONE 2.8. *Sia* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k$ *convergente, allora* z_k *tende a 0 per* $k \to +\infty$.

Dimostrazione. Dato che la serie è convergente, lo sono anche la serie delle parti reale e immaginaria. Quindi, per la condizione necessaria di convergenza delle serie in $\mathbb{R}$

$$\lim_{k\to+\infty} \operatorname{Re} z_k = \lim_{k\to+\infty} \operatorname{Im} z_k = 0,$$

che porta di filato alla conclusione. ∎

Nel campo complesso (come già in $\mathbb{R}^2$) non è possibile definire un ordinamento, il che vuol dire che non ha senso parlare di "serie a termini positivi", o di "serie a termini di segno variabile". È però possibile dare un concetto più forte di convergenza per una serie.

DEFINIZIONE 2.9. *La serie di termine generico* z_n *si dice* ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE *se è convergente in* $\mathbb{R}$ *la serie (reale) di termine generico* $|z_k|$.

A ben vedere, la definizione appena data non si discosta molto da quella data per serie a termini reali; l'unica differenza è nell'uso del simbolo $|\cdot|$, che ora denota il modulo (ovvero la lunghezza) del numero complesso z_n.

TEOREMA 2.10. *La serie di termine generico* z_k *converge assolutamente se e solo se convergono assolutamente le serie (reali) di termine generico* $\operatorname{Re} z_k$ *e* $\operatorname{Im} z_k$.
In particolare, se una serie converge assolutamente, allora converge semplicemente.

Dimostrazione. Dato che valgono le disequazioni (già viste?!)

$$\max\{|\operatorname{Re} z_k|, |\operatorname{Im} z_k|\} \le \sqrt{[\operatorname{Re} z_k]^2 + [\operatorname{Im} z_k]^2} = |z_k| \le |\operatorname{Re} z_k| + |\operatorname{Im} z_k|$$

per i teoremi di confronto sulle serie a termini positivi in $\mathbb{R}$, è chiara l'equivalenza tra la convergenza della serie di termine generico $|z_k|$ e quella delle serie di termine generico $|\operatorname{Re} z_k|$ e $|\operatorname{Im} z_k|$.

Per la seconda parte del Teorema, basta notare che, se le serie delle parti reale e immaginaria convergono assolutamente, allora convergono anche semplicemente, e, dunque, anche la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k$ è convergente semplicemente. ∎

Dal momento che la convergenza assoluta di una serie di numeri complessi corrisponde alla convergenza di una serie di numeri reali non negativi, è possibile applicare tutti i criteri di convergenza per serie di numeri reali a termini positivi (confronto, confronto asintotico, radice, rapporto, Cauchy).

Esercizio 2.11. *Studiare la convergenza (semplice e assoluta) delle serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} - i \ln\left(1 + \frac{1}{k^3}\right)\right).$$

3. Le serie di potenze in $\mathbb{C}$

Lo scopo di questa sezione è studiare particolari funzioni da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$. Come riscaldamento partiamo dalle più semplici: i polinomi. Ad esempio,

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & z^2 \end{array}$$

Come sempre, una maniera alternativa di vedere questa funzione è di considerare la parte reale e la parte immaginaria di f, cioè definire $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ come segue:

$$u(x,y) = x^2 - y^2 \qquad v(x,y) = 2xy.$$

Più in generale si possono considerare polinomi $f_k : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ della forma

$$f_k(z) = a_k\,(z - z_0)^k,$$

dove a_k e z_0 sono due numeri complessi assegnati e z è la variabile. Si noti che la parte reale e la parte immaginaria di f_k sono entrambe polinomi nelle due variabili x e y. Il passo successivo è di considerare una somma di funzioni di questo genere, cioè funzioni della forma

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,(z - z_0)^k,$$

che non sono altro che nuovi polinomi (di grado n) nella variabile z.

L'appetito vien mangiando... si possono definire "polinomi di grado infinito"? In altre parole, esiste il limite $S(z)$ per $n \to +\infty$ di $S_n(z)$? In caso affermativo, tale limite è una serie che, come al solito, si indica con

$$S(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z - z_0)^k,$$

Tali serie si dicono SERIE DI POTENZE di centro z_0.

La domanda di fondo che ci poniamo in questo paragrafo: dati z_0 e a_k in $\mathbb{C}$, per quali z converge la serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z - z_0)^k$?

Partiamo da qualche esempio.

Esempio 3.1. Sia $a_k = 1$ per ogni k e $z_0 = 0$, cioè studiamo la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k .$$

Dove converge? Ovviamente, la serie in questione ha una faccia "nota": non è altro che la serie geometrica! Ricordando la formula che dà la somma di una serie geometrica (formula che continua a valere anche per numeri complessi), si ha, se $z \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} ,$$

e quindi la convergenza della serie è ricondotta alla convergenza della successione z^{n+1}. Se $z = \rho\, e^{i\,\theta}$, allora $z^{n+1} = \rho^{n+1}\, e^{i\,(n+1)\,\theta}$. Se $|z| = \rho < 1$, allora (qualsiasi sia θ), z^{n+1} tende a zero; se $|z| > 1$, la successione $|z^{n+1}| = |z|^{n+1}$ diverge, e quindi z^{n+1} non ha limite. Se $|z| = 1$, z^{n+1} converge se e solo se θ è un multiplo intero di 2π; ma, in questo caso, $z = 1$, e la somma della serie è evidentemente n, che diverge. Ricapitolando: la serie converge se e solo se $|z| < 1$, e la sua somma è $\frac{1}{1-z}$.

Esempio 3.2. Sia $a_k = \frac{1}{k!}$ e $z_0 = 0$. Abbiamo così la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} .$$

Studiandone la convergenza assoluta, si tratta di lavorare con la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} ,$$

che converge per ogni z complesso grazie al criterio del rapporto

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|z|^{k+1}/(k+1)!}{|z|^k/k!} = \lim_{k\to+\infty} \frac{|z|}{k+1} = 0.$$

Esempio 3.3. Sia $a_k = k!$ e $z_0 = 0$, quindi abbiamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} k!\, z^k .$$

Lo studio di questa serie è semplice: se $z \neq 0$ la serie non converge, mentre converge se $z = 0$. Infatti, se $z \neq 0$,

$$\lim_{k\to+\infty} |k!\, z^k| = \lim_{k\to+\infty} k!\, |z|^k = +\infty$$

e quindi non è soddisfatta la condizione necessaria di convergenza.

Dati i tre esempi, possiamo fare delle osservazioni. Innanzitutto, qualsiasi sia a_k, la serie converge almeno in un punto: $z = z_0$. Inoltre – nei tre esempi – l'insieme dei valori per i quali la serie converge non è esotico: è un "cerchio" in tutti e tre i casi (se si accetta che $\mathbb{C}$ sia un cerchio di raggio infinito, e un punto un cerchio di raggio zero, ovviamente).

Ebbene, i tre esempi non sono stati scelti in maniera precisa per ingannare il lettore: una qualsiasi serie di potenze si comporta in questo modo, come vedremo tra poco.

Per prima cosa, introduciamo, per le serie di potenze, un'ulteriore nozione di convergenza: la *convergenza totale.*

DEFINIZIONE 3.4. *La serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ CONVERGE TOTALMENTE IN $E \subseteq \mathbb{C}$ *se*

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_k < +\infty \qquad \text{dove} \qquad L_k := \sup_{z \in E} |a_k (z - z_0)^k|.$$

La convergenza totale si traduce dunque nella convergenza di una serie in $\mathbb{R}$ a termini non negativi. È evidente che la convergenza totale implica quella assoluta (semplice applicazione dei criteri di confronto). Quindi la situazione per i tre tipi di convergenza che abbiamo introdotto per le serie di potenze è la seguente

$$\text{convergenza totale} \quad \Rightarrow \quad \text{convergenza assoluta} \quad \Rightarrow \quad \text{convergenza semplice}$$

PROPOSIZIONE 3.5. *(i) Se* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ *converge semplicemente in* $w \in \mathbb{C}$ *(con* $w \neq z_0$*), allora converge totalmente in* $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ *per ogni* $r \in (0, |w - z_0|)$.

(ii) Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ *non converge (semplicemente) in* $w \in \mathbb{C}$ *(con* $w \neq z_0$*), allora non converge in* z *per ogni* z *tale che* $|z - z_0| > |w - z_0|$.

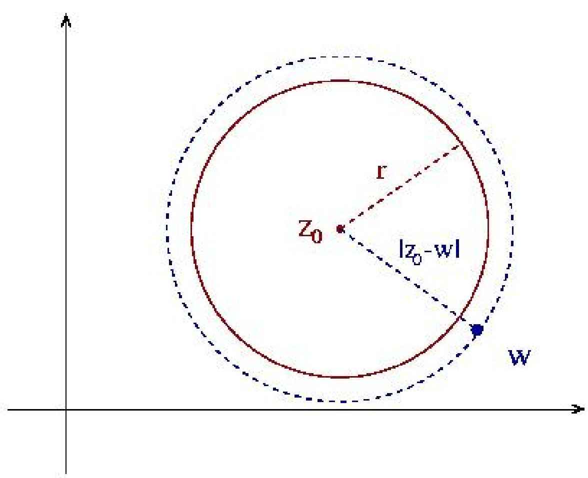


FIGURA 5. Se una serie di potenze con centro in z_0 converge semplicemente in w, allora converge totalemente nel cerchio $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ per ogni $r \in (0, |w - z_0|)$.

Dimostrazione. (i) Senza perdere in generalità, possiamo supporre $z_0 = 0$ (altrimenti si definisce $\tilde{z} := z - z_0$ e si studia la serie di termine generico $a_k \tilde{z}^k$). Supponiamo che la serie converga in $w \neq 0$ e scegliamo $r \in (0, |w|)$. Obiettivo: stimare $\sup_{|z| \leq r} |a_k z^k|$.

Per ipotesi la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_k\, w^k$ è convergente, dunque $a_k\, w^k$ tende a zero per $k \to +\infty$. In particolare, $a_k\, w^k$ è limitata, cioè esiste $M > 0$ tale che $|a_k\, w^k| \leq M$ per ogni k.

Se z è tale che $|z| \leq r$, allora

$$|a_k\, z^k| = \left| a_k\, w^k \frac{z^k}{w^k} \right| = |a_k\, w^k| \left| \frac{z}{w} \right|^k \leq M\, q^k \qquad \text{dove} \quad q := \left| \frac{r}{w} \right| \in (0, 1).$$

Visto che l'ultimo termine a destra non dipende da z otteniamo, passando all'estremo superiore, la stima

$$L_k := \sup_{|z| \leq r} |a_k\, z^k| \leq M\, q^k.$$

Dato che la serie di termine generico $M\, q^k$ con $q \in (0, 1)$ converge, per i teoremi di confronto, anche la serie di termine generico L_k converge, cioè la serie di potenze assegnata converge totalmente in $\{z \,:\, |z| \leq r\}$.

(ii) Supponiamo che $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, (w - z_0)^k$ non converga e, per assurdo, che esista $\tilde{w}$ tale che $|\tilde{w} - z_0| > |w - z_0|$ tale che $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, (\tilde{w} - z_0)^k$ converga. Allora, per il punto (i), la serie convergerebbe in $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - z_0| < |\tilde{w} - z_0|\}$, quindi, in particolare anche in w, che contraddice l'ipotesi. Passo e chiudo. ∎

Grazie alla Proposizione 3.5, è possibile descrivere in maniera abbastanza precisa la struttura dell'insieme di convergenza di una qualsiasi serie di potenze in $\mathbb{C}$.

Teorema 3.6. *Data la serie di potenze* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, (z - z_0)^k$, *sia* E *l'insieme*

$$E := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, (z - z_0)^k \quad \textit{è semplicemente convergente} \right\}.$$

Allora vale una delle seguenti tre eventualità:
(i) la serie converge in ogni punto, cioè $E = \mathbb{C}$*;*
(ii) la serie converge solo in z_0*, cioè* $E = \{z_0\}$*;*
(iii) esiste $R > 0$ *tale che* $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < R\} \subseteq E \subseteq \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq R\}$*.*

Dimostrazione del Teorema 3.6. Di nuovo possiamo supporre senza drammi, $z_0 = 0$. Supponiamo che ci sia almeno un valore $z_1 \neq 0$ in cui la serie converge ed uno, che indichiamo con z_2, in cui non converge (altrimenti siamo in uno dei primi due casi). Definiamo

$$R := \sup_{w \in E} |w|.$$

Evidentemente $0 < |z_1| \leq R$, dato che la serie converge in z_1. Dato che la serie non converge in z_2, per la seconda parte della Proposizione 3.5, i valori $w \in E$ sono tali che $|w| \leq |z_2|$. Quindi R è finito e diverso da 0.

È evidente che $E \subseteq \{z : |z| \leq R\}$. Resta da dimostrare che $\{z : |z| < R\} \subseteq E$. Se $|z| < R$, allora, per le proprietà dell'estremo superiore, esiste $w \in E$ tale che $|z| < |w|$. Quindi per la prima parte della Proposizione 3.5, la serie converge in z, cioè $z \in E$, che dimostra l'inclusione $\{z : |z| < R\} \subseteq E$. ∎

Se consideriamo $\mathbb{C}$ come un cerchio di raggio "infinito", e $\{z_0\}$ come un cerchio di raggio nullo, possiamo affermare che una serie di potenze converge sempre e comunque (più o meno) in un cerchio. Il "più o meno" è relativo al fatto che il Teorema non descrive quello che succede sulla circonferenza che delimita il cerchio.

DEFINIZIONE 3.7. *Data* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, *sia* $R = +\infty$ *nel caso (i) del Teorema 3.6,* $R = 0$ *nel caso (ii). Il valore* R *è il* RAGGIO DI CONVERGENZA *della serie.*

In generale quel che succede sul bordo del cerchio dipende da caso a caso. Infatti, il Teorema 3.6 non dà alcuna informazione sui numeri complessi z per i quali $|z - z_0| = R$ (nel caso in cui sia finito e diverso da zero). In effetti, non può dare alcuna informazione, perché sono possibili diversi casi.

ESEMPIO 3.8. Abbiamo già visto nel primo esempio di questo paragrafo, con la serie geometrica, che si può non avere convergenza in tutti i punti per i quali $|z| = R = 1$. Se, d'altra parte, consideriamo la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k^2},$$

di raggio di convergenza $R = 1$, la serie converge assolutamente per ogni z tale che $|R| = 1$. Infine, la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k},$$

il cui raggio di convergenza è sempre uno, converge per alcuni z tali che $|z| = 1$, diverge per altri (determinarne alcuni).

Ora il problema fondamentale è *come determinare il valore del raggio di convergenza?* Ecco un paio di criteri che fanno al caso nostro.

PROPOSIZIONE 3.9. *Data la serie di potenze* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, *supponiamo che esista*

$$L = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}. \tag{3.1}$$

Allora il raggio di convergenza della serie è dato da

$$R = \begin{cases} \frac{1}{L} & \text{se } 0 < L < +\infty, \\ +\infty & \text{se } L = 0, \\ 0 & \text{se } L = +\infty. \end{cases} \tag{3.2}$$

Dimostrazione. Di nuovo, non è restrittivo porre $z_0 = 0$. Supponiamo $L \in (0, +\infty)$. Fissato $z \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k\, z^k|} = L\, |z|.$$

Applicando il criterio della radice alla serie di termine generico $|a_k\, z^k|$ abbiamo allora che se $|z| < R = \frac{1}{L}$ la serie converge, mentre diverge se $|z| > R = \frac{1}{L}$, che è quello che volevamo dimostrare.

Se $L = 0$ o $L = +\infty$, la tesi segue in modo analogo. ∎

Utilizzando nella dimostrazione il criterio del rapporto invece di quello del confronto si ha un risultato analogo.

Proposizione 3.10. *Data la serie di potenze* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, (z - z_0)^k$ *con* $a_k \neq 0$ *per ogni* k, *supponiamo che esista*

$$L = \lim_{k \to +\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}.$$

Allora il raggio di convergenza della serie è dato dalla (3.2).

Ad esempio, supponiamo che i coefficienti a_n della serie di potenze siano delle funzioni razionali di n con coefficienti in $\mathbb{R}$, cioè supponiamo

$$a_n = \frac{p(n)}{q(n)} \qquad \text{con} \quad p, q \quad \text{polinomi con coefficienti in } \mathbb{R}$$

con $q(n) \neq 0$ per ogni n. Allora il raggio di convergenza della serie è $R = 1$. Infatti, è facile convincersi che vale

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{p(n+1)/q(n+1)}{p(n)/q(n)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{p(n+1)q(n)}{p(n)q(n+1)} = 1,$$

visto che i polinomi $p(n+1)q(n)$ e $p(n)q(n+1)$ hanno lo stesso grado e lo stesso coefficiente del termine di grado massimo (dimostrare!).

Esercizio 3.11. *Studiare la convergenza delle seguenti serie:*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k + k^2}{3^k + k^3}\, z^k\,, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{k^2}\,, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^k\,, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} e^{i\,k\,\pi}\, z^k\,.$$

4. Le serie di potenze in $\mathbb{R}$

Se $z_0 = x_0 \in \mathbb{R}$ e la successione a_k è reale, ha senso domandarsi: per quali x reali è convergente la serie (in $\mathbb{R}$)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, (x - x_0)^k\,.$$

L'insieme $E \subseteq C$ in cui è convergente la serie complessa $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, (z - x_0)^k$ ha la proprietà

$$\{z \in \mathbb{C}\, :\, |z - x_0| < R\} \subseteq E \subseteq \{z \in \mathbb{C}\, :\, |z - x_0| \leq R\}.$$

dove R è il raggio di convergenza della serie. Dal momento che le intersezioni di $\{z \in \mathbb{C} : |z-x_0| < R\}$ e di $\{z \in \mathbb{C} : |z-x_0| \leq R\}$ con l'asse reale sono, rispettivamente, l'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$ e l'intervallo $[x_0 - R, x_0 + R]$ abbiamo gratis il seguente risultato.

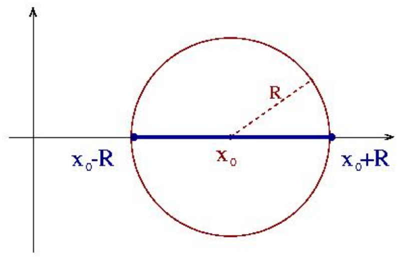


FIGURA 6. L'intersezione $\{z \in \mathbb{C} : |z - x_0| < R\} \cap \mathbb{R}$ è l'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$.

COROLLARIO 4.1. *Sia $a_n \in \mathbb{R}$ per ogni n e $x_0 \in \mathbb{R}$. Allora, la serie di potenze reale*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k ,$$

converge per $|x-x_0| < R$, e non converge per $|x-x_0| > R$ dove R è il raggio di convergenza della serie (pensata come serie in $\mathbb{C}$).

Il Corollario 4.1 assicura che, data una successione a_n in $\mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ è ben definita la funzione $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k \qquad x \in (x_0 - R, x_0 + R). \tag{4.1}$$

La convergenza negli estremi dell'intervallo dipende da caso a caso. Una domanda sorge spontanea: quale regolarità ha la funzione f definita in (4.1)? È una funzione continua? È una funzione derivabile? La Proposizione 3.5 ci permette di dimostrare che la funzione è continua!

TEOREMA 4.2. *La successione di funzioni*

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k \tag{4.2}$$

converge uniformemente su ogni intervallo chiuso $[a, b]$ contenuto in $(x_0 - R, x_0 + R)$ alla funzione f definita in (4.1). In particolare la funzione f è continua in $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Dimostrazione. Dimostriamo, prima di tutto, che la successione di funzioni converge uniformemente ad f in $[x_0 - r, x_0 + r]$ per ogni $r \in (0, R)$. Per la Proposizione 3.5 la serie converge totalmente in $\{z \in \mathbb{C} : |z - x_0| \leq r\}$, cioè

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_k < +\infty \qquad \text{dove} \qquad L_k := \sup_{|z-x_0| \leq r} |a_k (z - x_0)^k|.$$

Questa proprietà deve essere utilizzata per stimare $\sup\limits_{[x_0-r,x_0+r]} |f_n(x) - f(x)|$. Fissato $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, si ha

$$
\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} a_k\,(x-x_0)^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k \right| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| a_k\,(x-x_0)^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \sup_{[x_0-r,x_0+r]} \left| a_k\,(x-x_0)^k \right|
\end{aligned}
$$

Quindi, dato che $\sup\limits_{[x_0-r,x_0+r]} \left| a_k\,(x-x_0)^k \right| \leq \sup\limits_{|z-x_0|\leq r} |a_k\,(z-x_0)^k| = L_k$ per ogni k,

$$
0 \leq \sup_{[x_0-r,x_0+r]} |f_n(x) - f(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} L_k = \sum_{k=0}^{\infty} L_k - \sum_{k=0}^{n} L_k.
$$

Dato che la serie di termine generico L_k è convergente, l'ultimo termine è infinitesimo per $n \to +\infty$. Dal teorema di confronto per successioni, si deduce che $\sup\limits_{[x_0-r,x_0+r]} |f_n(x) - f(x)|$ è infinitesima, ovvero che la convergenza è uniforme.

Per dimostrare che la convergenza è uniforme in $[a, b]$ intervallo chiuso e limitato contenuto in (x_0-R, x_0+R), basta osservare che esiste $r > 0$, tale che $[a, b] \subset [x_0-r, x_0+r]$. Dato che la convergenza è uniforme in $[x_0 - r, x_0 + r]$, lo è anche in $[a, b]$.

Resta da giustificare l'affermazione sulla continuità. Dalla convergenza uniforme e dal fatto che le funzioni f_n definite in (4.2) sono funzioni continue (si tratta di polinomi), si deduce che la funzione f è continua in $[x_0 - r, x_0 + r]$ per ogni $r \in (0, R)$. Quindi la funzione f è continua in

$$
\bigcup_{r\in(0,R)} [x_0 - r, x_0 + r] = (x_0 - R, x_0 + R).
$$

La dimostrazione è completa. ∎

Esercizio 4.3. *Dimostrare che*

$$
\int_{-1}^{1} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{2^k} \right) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\int_{-1}^{1} \frac{x^k}{2^k}\, dx \right).
$$

Che possiamo dire sulla derivabilità delle serie di potenze? Molto.

Teorema 4.4. *La funzione definita in (4.1) è derivabile infinite volte in (x_0-R, x_0+R). Inoltre, l'espressione per le derivate si ottiene derivando la formula (4.1) "termine a termine", cioè*

$$
f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, a_k\,(x-x_0)^{k-1} \qquad x \in (x_0 - R, x_0 + R),
$$

$$
f''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k\,(x-x_0)^{k-2} \qquad x \in (x_0 - R, x_0 + R),
$$

e così via dicendo.

Inoltre, tutte le serie che esprimono le derivate hanno lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza.

Omettiamo la dimostrazione di questo Teorema.

OSSERVAZIONE 4.5. Come si vede dal Corollario 4.1, la convergenza di serie di potenze "reali" deriva direttamente dal teorema di convergenza di serie di potenze "complesse". In effetti, è $\mathbb{C}$ (e non $\mathbb{R}$) lo spazio naturale per studiare le serie di potenze. Gustiamoci il seguente esempio. Consideriamo la serie di potenze <u>reale</u>

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x^2)^k .$$

Ricordando la formula che dà la somma di una serie geometrica, si vede che, se $|x| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} . \tag{4.3}$$

Strano, no? A sinistra dell'uguale abbiamo un oggetto che è matematicamente definito solo se $|x| < 1$, a destra una funzione definita per ogni x in $\mathbb{R}$ e limitata (addirittura infinitesima per $|x|$ tendente ad infinito). L'arcano è subito svelato: la serie "madre", definita per $z \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^{2k} = \frac{1}{1+z^2}$$

è convergente se e solo se $|z| < 1$. Per quale motivo il raggio di convergenza di questa serie è $R = 1$? Semplicemente perché la funzione somma $\frac{1}{1+z^2}$ non è definita per ogni z complesso: il denominatore si annulla per $z = \pm i$, che sono due numeri complessi di modulo 1 e che quindi sono punti di singolarità per la serie di potenze (Figura 7).

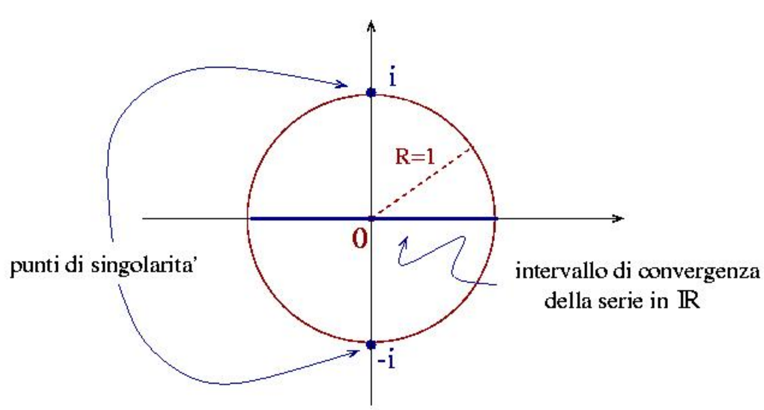


FIGURA 7. L'insieme di convergenza della serie di potenze $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^{2k} = \frac{1}{1+z^2}$.

Pertanto, il fatto che l'uguaglianza in (4.3) valga solo per $|x| < 1$ non è dovuto a motivi "reali", ma a motivi "complessi".

Le funzioni analitiche. Se si è in possesso di una funzione $f : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$ per $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$ che possiede derivate di ogni ordine in x_0 è possibile generare una serie di potenze utilizzando i coefficienti descritti dalla formula di Taylor, cioè si può considerare la serie di potenze:

$$\text{SERIE DI TAYLOR DI } f \text{ CENTRATA IN } x_0 : \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

La serie geometrica, ad esempio, è la serie di Taylor di $f(x) = 1/(1-x)$ in $x_0 = 0$: infatti

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 1 \qquad \forall k.$$

Altre serie famose sono quelle delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$ in $x_0 = 0$:

$$\sin x \;:\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \qquad \cos x \;:\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

e quelle dell'esponenziale e^x e di $\ln(1+x)$ in $x_0 = 0$

$$e^x \;:\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad \ln(1+x) \;:\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k.$$

DEFINIZIONE 4.6. *Sia* $f \in C^{\infty}(x_0 - r, x_0 + r)$ *e sia*

$$Tf(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

la sua serie di Taylor. Se Tf *converge in* $(x_0 - r, x_0 + r)$ *e*

$$f(x) = Tf(x) \qquad \forall\, x \in (x_0 - r, x_0 + r),$$

si dice che f È ANALITICA IN $(x_0 - r, x_0 + r)$.

È possibile dimostrare che le funzioni e^x, $\sin x$ e $\cos x$ sono analitiche in tutto $\mathbb{R}$, quindi valgono le uguaglianze: per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \qquad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

Però, attenzione!, non tutte le funzioni infinitamente derivabili sono analitiche (rivedere il Cap.VI.6, Note di Calcolo I).

5. Un mistero svelato: l'esponenziale complesso

Riprendiamo la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

e supponiamo che $z = x$ sia un numero reale. Questa serie ha (o dovrebbe avere...) una faccia nota. Ma sì! È la serie di Taylor di e^x in $x_0 = 0$! Scrivendo la formula del polinomio di Taylor di ordine n di e^x con il resto in forma di Lagrange,

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi}\, x^{n+1}}{(n+1)!},$$

con ξ compreso tra 0 e x. Dal momento che, per ogni x,

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{e^{\xi}\, x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = 0,$$

abbiamo

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad\qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

che esprime l'analiticità di e^x in tutto $\mathbb{R}$. Siccome la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ha raggio di convergenza $R = +\infty$, è ben definita in tutto $\mathbb{C}$ e la sua somma coincide con l'esponenziale e^x per $z = x \in \mathbb{R}$. **Definiamo** per analogia

$$e^z := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

In questa maniera abbiamo una funzione definita su tutto il piano complesso che "estende" il classico esponenziale definito su $\mathbb{R}$. Per qual motivo questa sia la definizione "giusta" è presto dirlo, ma fidatevi...

Se accettate, con un atto di fede, la definizione di e^z, allora ovviamente

$$e^{i\,\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!},$$

e la serie converge (assolutamente) per ogni θ. Ricordando che $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ e così via, possiamo spezzare la serie nella sua parte reale e nella sua parte immaginaria:

$$e^{i\,\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\,\theta^{2k} + i \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,\theta^{2k+1}.$$

Ah, ma le ultime due serie hanno una faccia nota anch'esse:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,\theta^{2k+1} = \sin\theta, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\,\theta^{2k} = \cos\theta,$$

e quindi (sempre se accettate la definizione di e^z),

$$e^{i\,\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta\,,$$

C.V.C. (come volevasi convincervi).

Inoltre, se z e w sono due numeri complessi, formalmente si ha

$$\begin{aligned} e^z\,e^w &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{h=0}^{+\infty}\frac{w^h}{h!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k+h=n}\frac{z^k\,w^h}{k!\,h!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k\,w^{n-k}}{k!\,(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k\,w^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(w+z)^n}{n!} = e^{z+w}\,, \end{aligned}$$

cosicché l'esponenziale complesso "soddisfa" le solite regole dell'esponenziale reale (non diamo la dimostrazione rigorosa di questa proprietà).

Una volta definito e^z, è possibile "giocare" un po'. Dalle formule

$$e^{i\,\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta\,, \qquad e^{-i\,\theta} = \cos\theta - i\,\sin\theta\,,$$

si ricavano, per θ reale,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\,\theta}+e^{-i\,\theta}}{2}\,, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\,\theta}-e^{-i\,\theta}}{2i}\,.$$

Queste due formule vengono poi prese a modello per estendere la funzione seno e la funzione coseno da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$:

$$\cos z = \frac{e^{i\,z}+e^{-i\,z}}{2}\,, \qquad \sin z = \frac{e^{i\,z}-e^{-i\,z}}{2i}\,.$$

È facile verificare che $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$; infatti

$$\cos^2 z = \frac{e^{2i\,z}+e^{-2i\,z}+2}{4}\,, \qquad \sin^2 z = -\frac{e^{2i\,z}-e^{-2i\,z}-2}{4}\,.$$

La cosa un po' più strana (che ha una motivazione molto profonda) è che dall'identità $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ non segue, come nel caso dei numeri reali, che $|\cos z| \le 1$ e $|\sin z| \le 1$. Infatti, ad esempio,

$$\cos i = \frac{e^{-1}+e^{1}}{2} > \frac{e}{2} > 1\,.$$

Esercizio 5.1. *Verificare che per* $\cos z$ *e* $\sin z$ *valgono le formule*

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,z^{2n+1}, \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,z^{2n} \qquad z\in\mathbb{C}.$$