CAPITOLO C

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

C-1 DEFINIZIONI FONDAMENTALI

1. Esempio Quali sono le funzioni $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, derivabili, tali che in tutti i punti $y'(t) = 0$? Sappiamo che la risposta è $y(t) = C$, dove C è un numero reale. Abbiamo risolto la più semplice equazione differenziale ordinaria. Notiamo che l'equazione $y' = 0$ ha infinite soluzioni; possiamo vederle come curve nel piano (t, y), e allora esse sono tutte le rette orizzontali; notiamo che per ogni punto (t_0, y_0) del piano passa una e una sola soluzione.

2. Esempio Sia $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua assegnata. L'equazione differenziale $y' = f$ ha per soluzioni le funzioni

$$y(t) = \int_a^t f(s)ds + C,$$

dove C è un numero reale qualunque. Esse sono definite su $[a, b]$; notiamo che preso un qualunque punto (t_0, y_0) con $t_0 \in [a, b]$, esiste una e una sola soluzione passante per esso. Per determinarla basta sostituire e ricavare il valore di C:

$$y_0 = \int_a^{t_0} f(s)ds + C$$

da cui

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s)ds.$$

3. Esempio Determiniamo tutte le funzioni derivabili che verificano $y' = y$. Se $y(t)$ è una tale funzione, abbiamo la semplice identità

$$(e^{-t}y)' = e^{-t}(y' - y) = 0,$$

quindi $e^{-t}y$ è una funzione costante ossia $y(t) = Ce^t$, per qualche $C \in \mathbf{R}$. Anche qui abbiamo infinite soluzioni, definite stavolta su tutto $\mathbf{R}$, ma se imponiamo che y passi per (t_0, y_0), cioè che $y(t_0) = y_0$, abbiamo $C = y_0 e^{-t_0}$. Vediamo quindi che per ogni punto c'è una e una sola soluzione passante per esso, $y = y_0 e^{t-t_0}$.

4. Definizione Un'*equazione differenziale (ordinaria), in forma normale, del primo ordine* è una relazione del tipo

$$y' = f(t, y),$$

dove $f : A \to \mathbf{R}$ è una funzione definita su un aperto $A \subseteq \mathbf{R}^2$. Una *soluzione* dell'equazione differenziale è una funzione $y : I \to \mathbf{R}$, definita su un intervallo I di $\mathbf{R}$, derivabile, tale che per ogni $t \in I$ il punto $(t, y(t))$ appartenga ad A e si abbia

$$y'(t) = f(t, y(t)).$$

Analogamente, se $f : A \to \mathbf{R}^N$ è definita su A aperto di $\mathbf{R}^{N+1}$, un *sistema di N equazioni differenziali, del primo ordine, in forma normale,* è una relazione della forma

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, \dots, y_N) \\ \qquad \dots \\ y_N' = f_N(t, y_1, \dots, y_N), \end{cases}$$

dove $f = (f_1, \dots, f_N)$. In forma più sintetica, con la notazione $y = (y_1, \dots, y_N)$, il sistema si può scrivere semplicemente $y' = f(t, y)$. Una *soluzione* del sistema è una funzione $y : I \to \mathbf{R}^N$ definita su un intervallo I di $\mathbf{R}$, derivabile, tale che per ogni $t \in I$ si ha $(t, y(t)) \in A$ e $y'(t) = f(t, y(t))$. N si dice la *dimensione* del sistema.

Il precedente sistema si dice in forma normale perché le y' sono espresse esplicitamente in funzione di t e y. Un sistema in *forma generale* invece è un sistema del tipo

$$f(t, y, y') = 0.$$

Inoltre, il precedente sistema era detto del primo ordine perché in esso comparivano solo le derivate prime della funzione incognita y. Un sistema di *ordine m*, in forma generale, è del tipo

$$f(t, y, y', y'', \dots, y^{(m)}) = 0,$$

e si dice in *forma normale* se è in forma esplicita rispetto alle derivate di ordine più alto:

$$y^{(m)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}).$$

5. Osservazione Notiamo che un qualunque sistema di ordine m e di dimensione N si può scrivere come un sistema del primo ordine, di dimensione Nm: se il sistema è

$$f(t, y, y', y'', \dots, y^{(m)}) = 0,$$

basta porre

$$z_1 = y, \quad z_2 = y', \quad z_3 = y'', \quad \dots, \quad z_m = y^{(m-1)}$$

(notare che ciascun z_j è un vettore di N componenti) e si ottiene il sistema

$$\begin{cases} f(t, z_1, \dots, z_m, z'_m) = 0 \\ z'_1 = z_2 \\ z'_2 = z_3 \\ \dots \\ z'_{m-1} = z_m \end{cases}$$

che è composto da Nm equazioni del primo ordine. Notiamo poi che se il sistema di partenza era in forma normale, anche il sistema del primo ordine che abbiamo ottenuto è in forma normale. La funzione incognita è adesso $z = (z_1, \dots, z_m) : I \to \mathbf{R}^{Nm}$.

6. Esempio L'equazione $y(y' - t) = 0$ non è in forma normale. Chiaramente $y \equiv 0$ è soluzione; se tentiamo di ricavare y' per porre l'equazione in forma normale, la soluzione nulla va perduta: l'equazione diventa $y' = t$. Vediamo quindi che il passaggio alla forma normale richiede una certa cautela.

7. Esempio L'equazione $y'' + t(y')^2 + y^3 = 0$ (ossia un sistema di dimensione 1 in quanto fatto di una sola equazione, e di ordine 2) si può scrivere come sistema del primo ordine di dimensione $1 \cdot 2 = 2$: basta porre $z = y'$, da cui $y'' = z'$, e otteniamo

$$\begin{cases} z' + tz^2 + y^3 = 0 \\ y' = z. \end{cases}$$

Come abbiamo visto nei primi esempi, un'equazione differenziale ha infinite soluzioni; ma, se l'equazione è del primo ordine, per ogni punto ne passa una ed una sola (sotto opportune ipotesi). Questo motiva la seguente definizione:

8. Definizione Un *Problema di Cauchy* (in forma normale, del primo ordine) è la coppia

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, con $f : A \to \mathbf{R}^N$, A aperto di $\mathbf{R}^{N+1}$, e di una *condizione iniziale* $y(t_0) = y_0$, dove (t_0, y_0) è un punto dell'aperto A. Analoga è la definizione di un Problema di Cauchy in forma generale.

9. Osservazione Un'equazione differenziale del primo ordine si può vedere come un problema geometrico: la funzione $f(t, y)$ determina un *campo di direzioni* nel piano (t, y), cioè in ogni punto è assegnata un'inclinazione pari a $f(t, y)$; e risolvere l'equazione vuol dire trovare una curva $y(t)$ che in ogni suo punto $(t, y(t))$ ha inclinazione $f(t, y)$.

ESERCIZI

1 Ridurre a sistemi del primo ordine le seguenti equazioni:

$$y'' = a(t)y' + b(t)y + c(t)$$

$$y''' = (y'')^2 + (y')^3 + y^4$$

$$y^{IV} = \frac{y'' + y'}{y^2 + 1}.$$

2 Ridurre a sistema del primo ordine i seguenti sistemi del secondo ordine:

$$\begin{cases} y'' = a(t)y + b(t)z \\ z'' = c(t)y + d(t)z \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' = y'^2 + z^2 \\ z'' = z'^2 - y^2. \end{cases}$$

3 Scrivere la soluzione generale delle seguenti equazioni:
1) $y' = ky$ ($k \in \mathbf{R}$);
2) $y' = f(t)y$;
3) $y' = y^2$;
4) $y'' = 2y'$.

[1: moltiplicare per e^{-kt}. 2: moltiplicare per $e^{-F(t)}$, dove $F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds$. 3: dividere per y^2 e osservare che $(1/y)' = -y'/y^2$. 4: porre $z = y'$ e risolvere l'equazione ottenuta in z].

4 Per i seguenti problemi, disegnare le zone del piano dove il secondo membro $f(t, y)$ è definito, e dove è positivo, negativo e nullo; tracciare quindi un grafico approssimativo delle soluzioni. La condizione iniziale è sempre $y(0) = \alpha$. (Può accadere che per alcuni valori di α il problema non sia definito).

$$y' = y^2 - 1, \qquad y' = \sin t \sin y,$$

$$y' = t^2 + y^2 - 1, \qquad y' = y - y^3,$$

$$y' = \frac{t - y}{t + y}, \qquad y' = ty - y^2,$$

$$y' = \frac{y}{t - 1} + \frac{y^2}{t^2 - 1}, \qquad y' = \sqrt{1 - y^2},$$

$$y' = \frac{1}{y} - \frac{1}{t - 1}, \qquad y' = \log \frac{1}{1 + |y|} + t,$$

$$y' = \sin(ty), \qquad y' = \cos(ty), \qquad y' = \tan(ty),$$

$$y' = \frac{1}{\cos(ty)}, \qquad y' = \frac{1}{y - t + 1},$$

$$y' = \frac{1}{y^2 + t^2 - 1}, \qquad y' = \frac{1}{1 - (t^2 + y^2)},$$

$$y' = t + |y|, \qquad y' = (y - |y|)t, \qquad (y')^2 = (ty)^2,$$

$$y' = e^{ty} - 1, \qquad y' = e^{(t^2)} - e^{(y^2)}, \qquad y' = \sin \frac{1}{t + y}.$$

5 Una curva $y(t)$ di classe C^1 ha la seguente proprietà: la retta tangente ad un suo punto qualunque passa per l'origine. Scrivere l'equazione differenziale soddisfatta da $y(t)$.

6 Problema analogo al precedente, ma la curva ha la proprietà che la retta normale ad ogni suo punto passa per l'origine.

C-2 TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ LOCALE

Studieremo ora la risolubilità del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{P}$$

relativo ad un sistema del primo ordine in forma normale di dimensione N. Ci sono tre domande fondamentali: 1) esiste una soluzione? 2) quante soluzioni esistono? 3) qual è l'insieme di definizione della soluzione? Le risposte ideali sarebbero naturalmente: esiste una soluzione, essa è unica, ed è definita su tutto $\mathbf{R}$ o almeno finché la curva $y(t)$ non esce dall'aperto A di definizione di f. Vediamo che in generale la situazione è molto peggiore.

1. Esempio Consideriamo una funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ discontinua della forma: $f(y) = -1$ per $y \geq 0$, $f(y) = 1$ per $y < 0$. Allora il problema

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni. Infatti la funzione $y(t)$ dovrebbe essere sempre decrescente dove $y \geq 0$, e sempre crescente dove $y < 0$.

2. Esempio Consideriamo il problema

$$\begin{cases} y' = |y|^\alpha \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

dove α è un numero strettamente compreso fra 0 e 1. Una soluzione è $y = 0$; un'altra è la funzione $y(t)$ che vale 0 per $t \leq 0$, e $[(1-\alpha)t]^{1/(1-\alpha)}$ per $t \geq 0$ (si può ricavare dividendo per y^α e integrando). Vediamo così che la soluzione non è unica. Si può anzi vedere che esistono infinite soluzioni (quali?).

3. Esempio Il problema

$$\begin{cases} y' = |y|^\alpha \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

con $\alpha > 1$ ha un'unica soluzione, come vedremo più avanti. Essa si calcola facilmente: si trova che $y(t) = [1 - (\alpha - 1)t]^{1/(1-\alpha)}$. Vediamo che la soluzione esiste solo sull'intervallo $t < (\alpha - 1)^{-1}$, e non su tutto $\mathbf{R}$.

Vediamo ora come, sotto opportune ipotesi sulla funzione $f(t,y)$, si possa garantire l'esistenza e l'unicità di soluzioni. Ricordiamo che f si dice *lipschitziana rispetto a y* se esiste una costante L tale che per ogni t, y, z si abbia $|f(t,y) - f(t,z)| \leq L|y - z|$. La funzione invece si dirà *localmente lipschitziana* in un punto (t_0, y_0) (sempre rispetto a y) se la precedente condizione non vale per tutti i punti ma solo in un intorno del punto (t_0, y_0). Diremo poi che f è localmente lipschitziana in un insieme se lo è in ogni punto dell'insieme; notiamo che l'intorno e la costante L possono variare da punto a punto.

Notiamo anche che se la funzione $f(t,y)$ è continua, inoltre è derivabile rispetto a y e le derivate $D_y f(t,y)$ sono continue, allora la funzione è localmente lipschitziana rispetto a y, come si verifica facilmente usando il Teorema del valor medio.

4. Teorema *(di esistenza e unicità locale) Sia $f : A \to \mathbf{R}^N$ definita su un aperto A di $\mathbf{R}^{N+1}$, e supponiamo che*
(i) f sia continua su A;
(ii) f sia localmente lipschitziana rispetto a y nel punto $(t_0, y_0) \in A$,
Allora il Problema di Cauchy (P) ha una ed una sola soluzione y su un intervallo $J = [t_0 - r, t_0 + r]$ per r abbastanza piccolo.

DIM. L'ipotesi (ii) significa che esistono un intervallo $I = [t_0 - r_0, t_0 + r_0]$, una sfera chiusa centrata in y_0, $B = \{w : |w - y_0| \le R\}$, con $I \times B \subseteq A$, e una costante L tale che $|f(t, y) - f(t, z)| \le L|y - z|$ per ogni $t \in I$ e $y, z \in B$.

Integriamo l'equazione tra t_0 e t: otteniamo

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds. \qquad (I)$$

Se risolviamo questa equazione integrale, cioè se troviamo una funzione $y : J \to \mathbf{R}^N$, continua, che soddisfa (I), allora è chiaro che $y(t)$ è di classe C^1 (infatti il secondo membro è l'integrale di una funzione continua), verifica la condizione iniziale (porre $t = t_0$) e derivando (I) si vede che y soddisfa l'equazione differenziale: quindi è chiaro che risolvere (I) equivale a risolvere (P).

Per risolvere (I) useremo il Teorema delle contrazioni; infatti l'equazione (I) si può scrivere

$$y = F(y)$$

dove F è l'applicazione che associa alla funzione $u(t)$ la funzione

$$F(u)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds;$$

quindi una soluzione di (I) (ossia una soluzione di (P)) è un punto fisso di F. Costruiremo ora uno spazio metrico completo su cui F è una contrazione. Sia J_r l'intervallo $[t_0 - r, t_0 + r]$, con $0 < r \le r_0$; r sarà scelto nel seguito. Indichiamo con X_r l'insieme di tutte le funzioni $y : J_r \to B$, continue, tali che $y(t_0) = y_0$. Chiaramente X_r è un sottoinsieme chiuso di $C(J_r; \mathbf{R}^N)$ (funzioni continue da J_r in $\mathbf{R}^N$ con la norma uniforme), quindi è uno spazio metrico completo. Ricordiamo che la distanza su X_r è data da $d_\infty(f, g) = \sup_{J_r} |f(x) - g(x)|$. Sia $y \in X_r$; chiaramente $F(y)$ è ancora una funzione continua definita su J_r, che vale y_0 in t_0; per dimostrare che $F(y) \in X_r$ resta da verificare che $F(y)$ è a valori nella sfera chiusa B. Per (i) f è continua, sia M il massimo del suo modulo sul compatto $I \times B$; se $y \in X_r$ si ha allora

$$|F(y)(t) - y_0| \le \left| \int_{t_0}^{t} M ds \right| \le r \cdot M;$$

quindi se $r \le R/M$ abbiamo che $F(y)(t) \in B$, cioè $F(y) \in X_r$. In altri termini abbiamo dimostrato che $F : X_r \to X_r$ è un'applicazione da X_r in sé, purché $r \le r_0$, $r \le R/M$. Vediamo infine che F è una contrazione: se $y, z \in X_r$, usando (ii) si ha

$$|F(y)(t) - F(z)(t)| \le \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| ds \right| \le L \left| \int_{t_0}^{t} |y(s) - z(s)| ds \right| \le L \cdot |t - t_0| \cdot d_\infty(y, z)$$

e quindi

$$d_\infty(F(y), F(z)) \le L r d_\infty(y, z).$$

Se $r < 1/L$, F è una contrazione su X_r. Il suo unico punto fisso è la soluzione unica cercata.

5. Osservazione Dalla dimostrazione vediamo che come r si può prendere qualunque numero positivo tale che

$$r < \min \left\{ r_0, \frac{R}{M}, \frac{1}{L} \right\},$$

dove $I \times B \equiv [t - r_0, t + r_0] \times \{y : |y - y_0| \le R\} \subseteq A$ è l'intorno di (t_0, y_0) su cui f è lipschitziana di costante L, e $M = \max_{I \times B} |f|$.

6. Osservazione Il risultato precedente si definisce “locale” perché l’intervallo J di esistenza della soluzione non è quello I su cui è definito il problema, ma potrebbe essere molto più piccolo; abbiamo solo dimostrato che c’è un opportuno intervallo su cui la soluzione esiste ed è unica. Vedremo in seguito che sotto ipotesi più forti si può dimostrare l’esistenza di una soluzione globale, cioè definita su tutto l’intervallo su cui è definito il problema.

7. Osservazione Se la funzione f è continua, la soluzione trovata è chiaramente di classe C^1. Se f è di classe C^1, allora derivando l’equazione si ha

$$y'' = D_t f(t, y(t)) + D_y f(t, y(t)) \cdot y'$$

da cui vediamo che la y è di classe C^2. In generale, se f è di classe C^{k-1}, è facile vedere che la soluzione y è C^k.

8. Osservazione Un teorema dovuto a Peano afferma che, sotto la sola ipotesi f continua, il problema (P) ammette una soluzione locale; tuttavia, come mostra l’Esempio 2, non si ha in generale l’unicità della soluzione.

9. Osservazione Consideriamo un’equazione di ordine m, ad esempio in forma normale

$$y^{(m)} = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)})$$

e scriviamola sotto forma di sistema del primo ordine (Oss.C-1-5) di dimensione m, ponendo $z = (z_1, \dots, z_m) = (y, y', \dots, y^{(m-1)})$:

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \dots \\ z_{m-1}' = z_m \\ z_m' = f(t, z). \end{cases}$$

Il Problema di Cauchy per tale sistema richiede l’assegnazione del dato $z(t_0) = (y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(m-1)}(t_0))$; se f verifica le ipotesi del Teorema locale, otteniamo allora l’unica soluzione del sistema. Ne segue che $y = z_1$ risolve l’equazione originaria (come è evidente), ed è unica. Vediamo così che il corretto Problema di Cauchy per un’equazione di ordine m è il seguente:

$$\begin{cases} y^{(m)} = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(m-1)}(t_0) = y_{m-1}, \end{cases}$$

cioè per individuare una soluzione di un’equazione di ordine m si devono assegnare m condizioni iniziali, e precisamente i valori di y e delle sue derivate fino all’ordine $m-1$ in un punto fissato.

Nel caso che la funzione f dipenda anche da dei parametri $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, per ogni valore di λ si otterrà una soluzione $y(t, \lambda)$. Come dipende y da λ? Vale il seguente risultato: dato il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y, \lambda) \\ y(t_0, \lambda) = y_0, \end{cases} \tag{P'}$$

si ha:

10. Teorema *Sia A un aperto di $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^k$, $f : A \to \mathbf{R}^N$. Supponiamo che*
(i) f sia continua in A;
(ii) f sia localmente lipschitziana rispetto a y nel punto $(t_0, y_0, \lambda_0) \in A$.
Allora esistono $I = [t_0 - r, t_0 + r]$, $V = \{\lambda \in \mathbf{R}^k \ : \ |\lambda - \lambda_0| \le \rho\}$ tali che il problema (P') ammette un'unica soluzione $y : I \times V \to \mathbf{R}^N$. La soluzione è C^1 in t e continua in λ. Inoltre: se f è C^m in (y, λ) allora $y(t, \lambda)$ è C^m in λ; e se f è C^m in tutte le variabili allora y è C^{m+1} in t.

La dimostrazione di questo teorema è identica a quella del Teorema 4: ci si riconduce all'equazione integrale

$$y(t, \lambda) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s, \lambda), \lambda) ds,$$

si pone $J_r = [t_0 - r, t_0 + r]$, $B = \{w \in \mathbf{R}^N \ : \ |w - y_0| \le R\}$, $V_\rho = \{\lambda \in \mathbf{R}^k \ : \ |\lambda - \lambda_0| \le \rho\}$, e si studia l'applicazione F sullo spazio metrico completo di tutte le funzioni $y(t, \lambda)$ da $J_r \times V_\rho$ a valori in B, continue, tali che $y(t_0, \lambda) = y_0$, con la metrica uniforme d_∞. Se r, ρ sono abbastanza piccoli F è una contrazione. Le affermazioni sulla regolarità si ottengono subito derivando l'equazione (rispetto a λ oppure rispetto a y); C^m rispetto a λ vuol dire che le derivate rispetto a λ di ordine minore o uguale a m sono funzioni continue (in tutte le variabili).

Il teorema precedente permette di dimostrare la proprietà della *dipendenza continua dai dati iniziali.* Precisamente, consideriamo il problema

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0, \lambda) = \lambda \end{cases} \tag{P''}$$

in cui il parametro è il dato iniziale, e la funzione f verifica le ipotesi del Teorema 4. Come dipende la soluzione dal dato iniziale?

È sufficiente porre $z(t, \lambda) = y(t, \lambda) - \lambda$, e si ha che z risolve il problema $z' = g(t, z, \lambda)$, $z(t, \lambda) = 0$, dove $g = f(t, z + \lambda)$. Applicando il teorema precedente otteniamo quindi che esistono $I = [t_0 - r, t_0 + r]$, $V = \{\lambda \in \mathbf{R}^N \ : \ |\lambda - \lambda_0| \le \rho\}$ tali che esiste una e una sola soluzione $y(t, \lambda) : I \times V \to \mathbf{R}^N$ di (P"), di classe C^1 in t e continua in λ. (Valgono inoltre risultati analoghi di maggiore regolarità).

In effetti, in questo caso speciale non è difficile dimostrare direttamente che la soluzione $y(t, \lambda)$ ottenuta è localmente lipschitziana in λ [infatti vale la disuguaglianza

$$|y(t, \lambda) - y(t, \lambda')| \le$$
$$\le |\lambda - \lambda'| + \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s, \lambda)) - f(s, y(s, \lambda'))| ds \le |\lambda - \lambda'| + L \int_{t_0}^{t} |y(s, \lambda) - y(s, \lambda')| ds$$

e applicando il Lemma di Gronwall a $\phi = |y(t,\lambda) - y(t,\lambda')|$ otteniamo $|y(t,\lambda) - y(t,\lambda')| \le C|\lambda - \lambda'|]$.

Il seguente teorema è molto utile per ricavare informazioni su soluzioni che non si possono calcolare esplicitamente.

11. Teorema *(del confronto) Sia $g : [t_0, t_0+a] \times J \to \mathbf{R}$, J intervallo di $\mathbf{R}$, g continua in (t,y) e localmente lipschitziana rispetto a y. Siano $y, z : [t_0, t_0+a] \to J$ derivabili e supponiamo che su $[t_0, t_0+a]$ si abbia*

$$\begin{aligned} &y' \le g(t,y), \\ &z' \ge g(t,z), \\ &y(t_0) \le z(t_0). \end{aligned}$$

Allora $y(t) \le z(t)$ su $[t_0, t_0+a]$.

Dim. Poniamo $w(t) = y(t) - z(t)$; sappiamo che $w(t_0) \le 0$, e vogliamo dimostrare che $w(t) \le 0$ su $[t_0, t_0+a]$. Se per assurdo fosse $w(t_1) > 0$ per qualche t_1, potremmo definire

$$\tau = \inf\{t \in [t_0, t_1] \;:\; w(t) > 0 \text{ su } [t, t_1]\};$$

chiaramente si ha

$$w(\tau) = 0, \quad w(t) > 0 \text{ su }]\tau, t_1]$$

(essendo w continua). Ma per ipotesi

$$w' = y' - z' \le g(t,y) - g(t,z) \le |g(t,y) - g(t,z)|;$$

inoltre g è lipschitziana rispetto alla seconda variabile in un intorno di $(\tau, y(\tau)) = (\tau, z(\tau))$, sia L la costante di Lipschitz; ne segue

$$w'(t) \le L|w(t)|, \quad t \in [\tau, \tau+\alpha]$$

per qualche $\alpha > 0$, da cui, essendo $w \ge 0$,

$$w' - Lw = w' - L|w| \le 0.$$

Adesso osserviamo che

$$(e^{-Lt}w(t))' = e^{-Lt}(w' - Lw) \le 0$$

su $[\tau, \tau+\alpha]$, e integrando fra τ e t

$$e^{-Lt}w(t) \le e^{-L\tau}w(\tau) \equiv 0,$$

quindi $w(t) \le 0$ a destra di τ, contraddicendone la definizione.

12. Osservazione Notare che se si vuole fare un confronto *a sinistra* di t_0, allora bisogna invertire la direzione del tempo, ossia scambiare t con $-t$; questo fa cambiare di segno la funzione $g(t,y)$.

C-3 PROLUNGAMENTO DI SOLUZIONI

Occupiamoci ora della terza domanda: su quale intervallo è definita la soluzione? Sappiamo che esiste una soluzione locale, e il nostro problema è prolungarla fin dove è possibile.

1. Definizione Siano $y_1 : I_1 \to \mathbf{R}^N$, $y_2 : I_2 \to \mathbf{R}^N$ due soluzioni del sistema $y' = f(t,y)$. Se $I_1 \subseteq I_2$ e y_1 coincide con y_2 su I_1, allora y_2 si dice un *prolungamento* di y_1.

2. Lemma *Siano A aperto di $\mathbf{R}^{N+1}$, $f : A \to \mathbf{R}^N$ continua e localmente lipschitziana rispetto a y. Se due soluzioni di $y' = f(t, y)$ definite sullo stesso intervallo coincidono in un punto, allora coincidono su tutto l'intervallo.*

DIM. Siano $y_1, y_2 :]a, b[\to \mathbf{R}^N$ soluzioni, e supponiamo che $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ per un certo $t_0 \in]a, b[$. Poniamo

$$\tau = \sup\{t : y_1 \equiv y_2 \text{ su } [t_0, t[\}.$$

Se dimostriamo che $\tau = b$, avremo dimostrato che $y_1 \equiv y_2$ sulla metà destra $[t_0, b[$ dell'intervallo; la restante metà si tratta analogamente.

Applicando il Teorema di esistenza e unicità locale in $(t_0, y_1(t_0))$ vediamo subito che le soluzioni coincidono in un intorno di t_0, quindi $\tau > t_0$. Dato che $y_1 \equiv y_2$ su $[t_0, \tau[$ e sono continue, si ha $y_1(\tau) = y_2(\tau)$. Supponiamo per assurdo che $\tau < b$: allora applicando ancora il Teorema nel punto $(\tau, y_1(\tau))$ si ha che le soluzioni devono coincidere in un intorno di τ, ma questo contraddice la definizione di τ. Quindi $\tau = b$.

3. Teorema *Siano A aperto di $\mathbf{R}^{N+1}$, $f : A \to \mathbf{R}^N$ continua e localmente lipschitziana rispetto a y. Allora il Problema (P) possiede un'unica soluzione massimale (cioè che non ammette prolungamenti).*

DIM. Sia $y : J \to \mathbf{R}^N$ la soluzione fornita dal Teorema locale. Essa ammetterà dei prolungamenti (y può essere vista come prolungamento di sé stessa) $z : J_z \to \mathbf{R}^N$, con $J \subseteq J_z$. Sia I l'unione di tutti gli intervalli J_z; definiamo una soluzione su I nel modo seguente. Dato $t \in I$, sarà $t \in J_z$ per qualche prolungamento z; poniamo $\widetilde{y}(t) = z(t)$. La funzione $\widetilde{y}$ è ben definita: infatti se t appartiene anche ad un J_w relativo al prolungamento w, per il Lemma 2 le soluzioni w, z devono coincidere su $J_w \cap J_z$, e quindi $w(t) = z(t) = \widetilde{y}(t)$. Chiaramente $\widetilde{y}$ è soluzione, e non può essere ulteriormente prolungata.

Il seguente lemma sulle funzioni di una variabile reale ci sarà utile nel seguito.

4. Lemma *Sia $y :]a, b[\to \mathbf{R}^N$ uniformemente continua. Allora esistono i limiti di $y(t)$ per $t \to b^-$, $t \to a^+$.*

DIM. Basta dimostrare la tesi per una funzione a valori in $\mathbf{R}$, e poi applicarla alle singole componenti di y. Ci occuperemo inoltre del limite in b, l'altro è analogo.

Prendiamo una successione $t_n \to b^-$; essa è dunque di Cauchy; ne segue che $\{y(t_n)\}$ è di Cauchy. Infatti sappiamo che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|t - s| < \delta \Rightarrow |y(t) - y(s)| < \epsilon$; inoltre per $n, m \geq n_\delta$ si ha $|t_n - t_m| < \delta$, e quindi anche $|y(t_n) - y(t_m)| < \epsilon$. Quindi esiste $\xi = \lim y(t_n)$.

Infine, tale limite non dipende dalla successione scelta: se anche $s_n \to b^-$, con $y(s_n) \to \eta$, allora

$$|\xi - \eta| = \lim_{n \to +\infty} |y(t_n) - y(s_n)|;$$

e dato che per n abbastanza grande $|t_n - s_n| < \delta$, si ha $|y(t_n) - y(s_n)| < \epsilon$ da cui $|\xi - \eta| \leq \epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$, ossia $\xi = \eta$.

5. Osservazione Ricordiamo che se $y :]a, b[\to \mathbf{R}^N$ è di classe C^1 con derivata limitata, allora essa è uniformemente continua. Infatti, se $|y'| \leq M$,

$$|y(t) - y(s)| = \left| \int_s^t y'(\sigma) d\sigma \right| \leq M \cdot |t - s|$$

e se $|t - s| < \delta$ si ha $|y(t) - y(s)| < M\delta$, quindi basta prendere $\delta = \epsilon/M$.

6. Proposizione *Sia A un aperto di $\mathbf{R}^{N+1}$ e $f : A \to \mathbf{R}^N$ continua e localmente lipschitziana rispetto a y. Sia $y :]a, b[\to \mathbf{R}^N$ una soluzione del sistema $y' = f(t, y)$. Se y è limitata su $]a, b[$, allora esiste il limite $\lim_{t \to b-} y(t) = y_1$. Se poi il punto (b, y_1) appartiene ad A, allora la soluzione è prolungabile a destra di b. (Analoghi risultati per l'estremo a.)*

DIM. Sia $|y| \leq R$ su $]a, b[$. Sia inoltre K il compatto di $\mathbf{R}^{N+1}$ $K = [a, b] \times \{|y| \leq R\}$, e sia M il massimo di $|f(t, y)|$ su K. Allora è chiaro che $|y'| = |f(t, y(t))| \leq M$, quindi come visto nell'Osservazione 5 $y(t)$ è uniformemente continua. Per il Lemma 4 esiste il limite di $y(t)$ per $t \to b^-$. che indichiamo con y_1.

Supponiamo ora che $(b, y_1) \in A$. Dal Teorema locale segue l'esistenza di una soluzione $z : [b - \epsilon, b + \epsilon] \to \mathbf{R}^N$ del sistema, con dato iniziale $z(b) = y_1$. Definiamo una funzione $\widetilde{y}(t)$ che vale $y(t)$ per $a < t < b$, e che vale $z(t)$ per $b \leq t \leq b + \epsilon$. Mostriamo che $\widetilde{y}$ è un prolungamento di y: notiamo che $\widetilde{y}$ è soluzione del sistema sia a destra che a sinistra di b, dobbiamo solo dimostrare che $\widetilde{y}$ è derivabile anche in $t = b$ e che vale $\widetilde{y}'(b) = f(b, \widetilde{y}(b))$. Consideriamo la j-esima componente $\widetilde{y}_j(t)$ $(j = 1, \ldots, N)$ e scriviamone il rapporto incrementale in b; per il Teorema di Lagrange esiste un punto s tra b e $b + h$ tale che

$$\frac{\widetilde{y}_j(b + h) - \widetilde{y}_j(b)}{h} = \widetilde{y}_j'(s) = f_j(s, \widetilde{y}(s))$$

(con s diverso da $b, b + h$). Facendo tendere h a 0 il punto s tende a b, ma $f_j(s, \widetilde{y}(s))$ è una funzione continua e quindi otteniamo che il limite del rapporto incrementale è uguale a $f_j(b, \widetilde{y}(b))$. Procedendo analogamente per tutte le componenti, otteniamo la tesi.

7. Osservazione Combinando il Teorema di confronto C-2-10 con la proposizione precedente si possono ottenere molte informazioni sull'intervallo di esistenza di soluzioni che non si sanno calcolare esplicitamente. Ad esempio studiamo $y' = y^2 \sin(t+y)$ con la condizione $y(0) = \alpha$. Per confronto vediamo che $y(t)$ è compresa fra w e z soluzioni di $w' = -w^2$ e $z' = z^2$ con la stessa condizione iniziale $z(0) = w(0) = \alpha$. Queste equazioni si possono risolvere esplicitamente e danno $z = \alpha/(1 - \alpha t)$, $w = \alpha/(1 + \alpha t)$. Vediamo che o w o z ha un asintoto per $t = |\alpha|$; in ogni caso, z e w esistono almeno sull'intervallo $[0, |\alpha|[$. Ne segue che la soluzione $y(t)$ deve esistere almeno sull'intervallo $[0, |\alpha|[$. Infatti se la soluzione massimale esistesse solo su $[0, b[$ con $b < |\alpha|$, essendo compresa tra z e w dovrebbe essere limitata, e per la proposizione precedente sarebbe prolungabile.

Vediamo un ultimo risultato di prolungamento, di particolare importanza in quanto, sotto ipotesi abbastanza generali, fornisce delle soluzioni *globali*. Premettiamo un lemma tecnico.

8. Lemma *(di Gronwall) Sia J l'intervallo $[t_0, t_0 + a[$ o $[t_0, +\infty[$, sia $\phi : J \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che*

$$\phi(t) \leq C_1 + C_2 \int_{t_0}^{t} \phi(s) ds$$

per $t \in J$ $(C_1, C_2 \in \mathbf{R})$. Allora

$$\phi(t) \leq C_1 e^{C_2(t - t_0)}.$$

DIM. Si può supporre $C_2 \neq 0$ altrimenti la tesi è ovvia. Si ha

$$\left[e^{-C_2 t} \cdot \int_{t_0}^{t} \phi(s)ds\right]' = e^{-C_2 t}\left[\phi(t) - C_2 \int_{t_0}^{t} \phi(s)ds\right] \leq C_1 e^{-C_2 t}.$$

Integrando da t_0 a t si ottiene

$$e^{-C_2 t} \int_{t_0}^{t} \phi(s)ds \leq \frac{C_1}{C_2}[e^{-C_2 t_0} - e^{-C_2 t}]$$

da cui

$$\int_{t_0}^{t} \phi(s)ds \leq \frac{C_1}{C_2}[e^{C_2(t-t_0)} - 1].$$

Se combiniamo questa disuguaglianza con quella dell'ipotesi, otteniamo subito la tesi.

9. Teorema *(di esistenza globale) Sia I un intervallo di $\mathbf{R}$, $f : I \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ una funzione continua e localmente lipschitziana rispetto a y. Supponiamo che esistano due funzioni continue $\alpha(t)$, $\beta(t)$ su I, non negative, tali che per $(t, y) \in I \times \mathbf{R}^N$ valga la disuguaglianza*

$$|f(t, y)| \leq \alpha(t) + \beta(t)|y|.$$

Allora ogni soluzione del sistema $y' = f(t, y)$ si può prolungare a tutto l'intervallo I.

DIM. La tesi si può anche enunciare dicendo: una qualunque soluzione massimale è definita su tutto I. Sia allora $y : J \to \mathbf{R}^N$ soluzione massimale, e supponiamo per assurdo che $J \neq I$; ad esempio che $b = \sup J$ sia strettamente minore di $\sup I$ (analogamente si dimostra che I, J hanno lo stesso estremo inferiore). Fissato $t_0 \in J$, $t_0 < b$, la soluzione verifica

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

da cui, usando l'ipotesi su f,

$$|y(t)| \leq |y_0| + \int_{t_0}^{t} [\alpha(s) + \beta(s)|y(s)|]ds.$$

Se poniamo

$$\phi(t) = |y(t)|, \quad C_1 = |y_0| + \int_{t_0}^{b} \alpha(s)ds, \quad C_2 = \max_{[t_0,b]} \beta(t),$$

vediamo che $\phi(t)$ verifica le ipotesi del Lemma di Gronwall su $[t_0, b[$. Abbiamo quindi

$$|y(t)| \leq C_1 e^{C_2(t-t_0)}$$

su $[t_0, b[$, e in particolare otteniamo che la soluzione è limitata su tale intervallo. Dal Teorema 6 segue che $y(t)$ ha un limite y_1 per $t \to b^-$, e dato che il punto (b, y_1) appartiene ad $A = I \times \mathbf{R}^N$ (in quanto per l'ipotesi di assurdo $b < \sup I$) sempre dal Teorema 6 segue che $y(t)$ si può prolungare a destra di b, contraddicendo la massimalità di J.

ESERCIZI

1 Dimostrare che il Problema di Cauchy per $y' = \sin(t^2 + y^2)$ con la condizione $y(0) = \alpha$ ha una soluzione definita su tutto $\mathbf{R}$.

2 Usando i risultati teorici dei paragrafi precedenti stimare l'intervallo di esistenza della soluzione per le seguenti equazioni, con la condizione $y(0) = \alpha$, al variare di α: $y' = y^2 + ty^4$, $y' = \sqrt{1 + t^2 + y^2}$, $y' = |y|^{2+\cos t}$, $y' = (y^3 + 2)/(y^2 + 1)$.

3 Verificare se i metodi dei paragrafi 2 e 3 consentono di ottenere ulteriori informazioni sui problemi dell'esercizio C-1-4 e proseguirne lo studio qualitativo.

---

01 Sia $C \subseteq \mathbf{R}^n$, la *distanza* di $x \in \mathbf{R}^n$ da C è il numero $d(x, C) = \inf\{d(x, z) : z \in C\}$. Dimostrare le proprietà seguenti.

a) $|d(x, C) - d(y, C)| \leq d(x, y)$, quindi $d(x, C)$ è lipschitziana in x di costante 1 (e in particolare è continua);

b) dato $\epsilon \geq 0$, e posto $C_\epsilon = \{y : d(y, c) \leq \epsilon\}$, l'insieme C_ϵ è chiuso; se inoltre C è limitato, C_ϵ è compatto;

c) $\overline{C} = \bigcap_{\epsilon>0} C_\epsilon = C_0$;

d) se $K \subseteq A$, K compatto, A aperto, allora esiste $\epsilon > 0$ tale che $K_\epsilon \subseteq A$.

[(a): dato $\epsilon > 0$, esiste $z \in C$ tale che $d(x, C) \geq d(y, z) - \epsilon$; inoltre $d(x, C) \leq d(x, z)$; quindi $d(x, C) - d(y, C) \leq d(x, z) - d(y, z) + \epsilon$. Dato che per tutti gli x, y, z vale $d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y)$, otteniamo $d(x, C) - d(y, C) \leq d(x, y) + \epsilon$. Per l'arbitrarietà di ϵ (e dato che lo stesso ragionamento vale scambiando x con y) otteniamo la tesi. La lipschitzianità è ovvia. (b): posto $f(x) = d(x, C)$, f è continua, e $C_\epsilon = f^{-1}([0, \epsilon])$. Inoltre, se C è limitato ossia $C \subseteq B(0, R)$, anche C_ϵ lo è in quanto $C_\epsilon \subseteq B(0, R + \epsilon)$. (c): è chiaro che $\bigcap_{\epsilon>0} C_\epsilon = C_0$. Inoltre $\overline{C} \subseteq C_0$ perché C_0 è chiuso; infine se $x \in C_0$, ossia $d(x, C) = 0$, esiste $\{x_n\} \subseteq C$ tale che $d(x, x_n) \leq 1/n$, quindi $x_n \to x$ da cui $x \in \overline{C}$. (d): se per assurdo K_ϵ non fosse contenuto in A per alcun $\epsilon > 0$, per ogni n esisterebbe $x_n \in K_{1/n} \cap (\mathbf{R}^n \setminus A)$. Dato che K_1 è compatto, possiamo estrarre $x_{k_n} \to \xi \in K_1$; dato che $d(x_n, K) < 1/n$ dev'essere $d(\xi, K) = 0$ da cui $\xi \in K_0 = K$; ma d'altra parte $x_{k_n} \in \mathbf{R}^n \setminus A$ che è chiuso, quindi $\xi \in \mathbf{R}^n \setminus A$; allora $\xi \in K \cap (\mathbf{R}^n \setminus A)$ assurdo.]

02 Dimostrare la seguente versione più forte del *Teorema del prolungamento*. Sia $f : A \to \mathbf{R}^N$, A aperto di $\mathbf{R}^{N+1}$, f continua, f localmente lipschitziana in y, e sia $(t_0, y_0) \in A$. Sia $y : I \to \mathbf{R}^N$ soluzione massimale di (P). Allora *y esce dai compatti* di A, ossia: se K è compatto $\subseteq A$, esistono $\sigma, \tau \in I$ tali che $(t, y(t)) \notin K$ per $t > \tau$ e per $t < \sigma$.

[Anzitutto, se $K \subseteq A$ è compatto e $\tau_0 \in I$, allora non è possibile che la soluzione resti in K dopo τ_0, cioè che $(t, y(t)) \in K$ per tutti i $t \geq \tau_0$. Infatti, se così fosse, dovrebbe essere $b = \sup I < \infty$; inoltre sarebbe $|y'(t)| \leq \max_K |f|$ per $t \in [\tau_0, b[$, quindi y sarebbe uniformemente continua ed esisterebbe il $\lim_{t\to b-}(t, y(t)) = (v, y_1) \in K$; pertanto y sarebbe prolungabile a destra di b, contro l'ipotesi. Analogamente, non è possibile che la soluzione resti in K per tutti i t minori di un certo τ_0.

Sia ora K compatto fissato; per 01-(d) esiste $\epsilon > 0$ tale che $K_\epsilon \subseteq A$. Dimostriamo per assurdo che quando $t \to \sup I$ la soluzione esce da K. Se così non fosse, anzitutto sarebbe $\sup I = b < \infty$ (se $\sup I = +\infty$ la soluzione esce per forza da qualunque compatto). Dato che y non esce da K, esiste $t_1 > t_0$ tale che $(t_1, y(t_1)) \in K$. Ma K_ϵ è compatto, quindi come visto nella prima parte la soluzione non resta in K_ϵ per tutti i $t > t_1$, quindi esiste $s > t_1$ tale che $(t, y(t)) \notin K_\epsilon$. Prendendo l'inf di tali s otteniamo un $s_1 > t_1$ tale che $(t, y(t)) \in K_\epsilon$ per $t_1 \leq t \leq s_1$ e $d((s_1, y(s_1)), K) = \epsilon$. Ripetiamo il ragionamento per $t > s_1$: otteniamo $t_2 > s_1$ tale che $(t_2, y(t_2)) \in K$, e $s_2 > t_2$ tale che $d((s_2, y(s_2)), K) = \epsilon$ ma $(t, y(t)) \in K_\epsilon$ per $t_2 \leq t \leq s_2$.

Costruiamo così le successioni t_n, s_n con $t_n < s_n < t_{n+1}$, $(t, y(t)) \in K_\epsilon$ per $t_n \leq t \leq s_n$, e $d((s_n, y(s_n)), K) = \epsilon$. Chiaramente possiamo scegliere i t_n in modo che $t_n \to b = \sup I$ ($\Rightarrow s_n \to b$).

Osserviamo infine che $|y'| \leq \max_{K_\epsilon} |f| \equiv M$ per $t \in [t_n, s_n]$, quindi (indicando con y_j le singole componenti di y)

$$\frac{|y_j(s_n) - y_j(t_n)|}{|s_n - t_n|} \leq M$$

da cui

$$\frac{|y(s_n) - y(t_n)|}{|s_n - t_n|} \leq \sqrt{N} M$$

il che è assurdo perché

$$\epsilon^2 = d((s_n, y(s_n)), K)^2 \leq d((s_n, y(s_n)), (t_n, y(t_n)))^2 = |s_n - t_n|^2 + |y(s_n) - y(t_n)|^2$$

da cui

$$\frac{|y(s_n) - y(t_n)|}{|s_n - t_n|} \geq \frac{\sqrt{\epsilon^2 - |s_n - t_n|^2}}{|s_n - t_n|} \to \infty$$

e quindi non può essere limitata.]

C-4 EQUAZIONI LINEARI

1. Definizione Il sistema $y' = f(t, y)$ si dice *lineare* se la funzione $f(t, y)$ è lineare affine in y, ossia se ha la forma

$$f(t, y) = A(t)y + b(t)$$

dove la matrice $N \times N$ $A(t)$ e il vettore di $\mathbf{R}^N$ $b(t)$ sono funzioni di t, definite su un intervallo I. Nel caso $b \equiv 0$ il sistema si dice *omogeneo*.

È immediato verificare che se $A(t), b(t)$ sono continue, allora le ipotesi del Teorema globale (e a maggior ragione di quello locale) sono soddisfatte, quindi il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una soluzione unica *globale* definita su tutto I.

2. Teorema *Sia $A(t)$ matrice $N \times N$ continua su I intervallo di $\mathbf{R}$. L'insieme V_0 di tutte le soluzioni del sistema lineare omogeneo*

$$y' = A(t)y$$

è uno spazio vettoriale di dimensione N.

DIM. È chiaro che V_0 è uno spazio vettoriale. Definiamo un'applicazione lineare $T : \mathbf{R}^N \to V_0$ come l'applicazione che a $v \in \mathbf{R}^N$ associa la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(t)y \\ y(t_0) = v; \end{cases}$$

sappiamo che essa esiste ed è definita su tutto I. L'applicazione T è iniettiva: infatti se $Tv = Tw$ allora in particolare le due soluzioni Tv, Tw coincidono per $t = t_0$, quindi $v = w$. T è suriettiva: infatti se $y(t) \in V_0$, cioè se $y(t)$ è una qualunque soluzione dell'equazione, allora posto $v = y(t_0)$ si deve avere $y = Tv$ per l'unicità. In conclusione, T è un isomorfismo da $\mathbf{R}^N$ in V_0, quindi V_0 ha dimensione N. Notiamo che, come conseguenza, una base di V_0 è data dai vettori Te_j, dove $e_1, \dots, e_N$ sono i vettori della base canonica di $\mathbf{R}^N$.

3. Osservazione Il teorema precedente ci permette anche di descrivere l'insieme di tutte le soluzioni di un sistema lineare non omogeneo, ossia della forma

$$y' = A(t)y + b(t) \tag{1}$$

se conosciamo almeno una soluzione $\widetilde{y}(t)$ (che viene detta allora *soluzione particolare*). Infatti se $y(t)$ è un'altra soluzione, si ha

$$(y - \widetilde{y})' = A(t)y + b - A(t)\widetilde{y} - b = A(t)(y - \widetilde{y}),$$

cioè $y - \widetilde{y}$ risolve il sistema omogeneo corrispondente. In altri termini, una qualunque soluzione di (1) si ottiene sommando ad una soluzione particolare una soluzione dell'equazione omogenea corrispondente. Si può anche dire che l'insieme di tutte le soluzioni del sistema non omogeneo dato è lo spazio affine $\widetilde{y} + V_0$, dove $\widetilde{y}$ è una soluzione particolare e V_0 è lo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo corrispondente.

Quanto detto finora si può generalizzare alle equazioni (e ai sistemi) di ordine superiore.

4. Definizione Un'equazione *lineare* di ordine m è un'equazione della forma

$$y^{(m)} + a_1(t)y^{(m-1)} + \cdots + a_{m-1}(t)y' + a_m(t)y = f(t).$$

L'equazione si dice *omogenea* se $f \equiv 0$. È elementare verificare che, riducendo l'equazione ad un sistema di ordine 1 e dimensione m con i metodi del Paragrafo 1, si ottiene un sistema lineare, omogeneo se l'equazione lo è. Quindi si può applicare il Teorema 2, ottenendo che l'insieme delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea di ordine m è uno spazio vettoriale di dimensione m (stiamo supponendo che i coefficienti $a_j(t)$ siano funzioni continue su un comune intervallo di definizione I).

Inoltre l'Osservazione 3 vale anche per un'equazione lineare di ordine m: una qualunque soluzione si ottiene sommando ad una soluzione particolare una generica soluzione dell'equazione omogenea corrispondente.

5. Esempio (Variazione delle costanti arbitrarie)

Come si risolve esplicitamente un sistema lineare del I ordine

$$y' = A(t)y + b \tag{1}$$

o un'equazione lineare di ordine m

$$y^{(m)} = a_1(t)y^{(m-1)} + \cdots + a_m(t)y + f(t)? \tag{2}$$

In genere è impossibile. Se però si conosce la soluzione generale del sistema (o dell'equazione) omogeneo associato, ossia

$$y' = A(t)y, \tag{3}$$

si può applicare il metodo della *variazione delle costanti arbitrarie* per trovare una soluzione particolare di (1) (o di (2)) e quindi *tutte* le soluzioni, per quanto visto nell'osservazione precedente.

Ad esempio consideriamo un'equazione del secondo ordine

$$y'' = a(t)y' + b(t)y + f(t), \tag{4}$$

e supponiamo di conoscere la soluzione generale dell'equazione omogenea associata

$$y'' = a(t)y' + b(t)y. \tag{5}$$

Questo vuol dire che ne conosciamo due soluzioni y_1, y_2 linearmente indipendenti, e ogni altra soluzione si scrive come

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t),$$

$c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Si può allora cercare una soluzione particolare di (4) della forma

$$\widetilde{y}(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t). \tag{6}$$

Le funzioni $c_1(t), c_2(t)$ vanno determinate in modo che (6) risolva (4); dato che le funzioni sono 2, possiamo imporre ad arbitrio una seconda condizione. Ne scegliamo una particolarmente conveniente, e cioè

$$c_1'(t)y_1 + c_2'(t)y_2 = 0; \tag{7}$$

derivando $\widetilde{y}$ otteniamo allora

$$\widetilde{y}' = c_1y_1' + c_2y_2', \quad \widetilde{y}'' = c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_1y_1'' + c_2y_2''$$

(notare l'utilità della (7): non compaiono derivate seconde di c_1, c_2) e ricordando che y_1, y_2 risolvono l'omogenea, sostituendo in (4) otteniamo

$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(t).$$

In conclusione c_1, c_2 devono verificare il sistema

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(t) \end{cases} \tag{8}$$

che si può scrivere

$$W(t)k'(t) = b(t)$$

dove abbiamo posto

$$W(t) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}, \quad k(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix};$$

la matrice $W(t)$ è detta il *Wronskiano* delle soluzioni y_1, y_2. Si ha quindi

$$k'(t) = W(t)^{-1}b(t)$$

da cui si ricavano c_1, c_2 con una semplice integrazione (in concreto si lavora sul sistema (8), si ricavano c_1', c_2' e si integra).

In generale, per trovare una soluzione particolare $\widetilde{y}(t)$ (che ora sarà un vettore) del sistema di ordine N (1), conoscendo la soluzione generale del sistema omogeneo (3), quindi conoscendo N soluzioni linearmente indipendenti $y_1, \dots, y_N$, definiamo il Wronskiano $W(t)$ come la matrice che ha per colonne $y_1, \dots, y_N$, quindi la soluzione generale di (3) si scrive

$$y(t) = W(t)k$$

dove k è un vettore costante arbitrario; si cerca una soluzione particolare di (1) della forma

$$\widetilde{y}(t) = W(t)k(t).$$

Sostituendo in (1) si ottiene

$$(W(t)k(t))' \equiv W'k + Wk' = AWk + b$$

e dato che $W' = AW$, perché le colonne di W risolvono (3), otteniamo $Wk' = b$ da cui

$$k' = W^{-1}b.$$

Integrando si calcola $k(t)$ e finalmente $\widetilde{y}(t)$.

Analogamente, per risolvere (2) conoscendo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata

$$y^{(m)} = a_1(t)y^{(m-1)} + \cdots + a_m(t)y,$$

che è della forma $y(t) = c_1y_1(t) + \cdots + c_my_m(t)$, con $c_1, \dots, c_m \in \mathbf{R}$, si cerca una soluzione particolare del tipo

$$\widetilde{y}(t) = c_1(t)y_1 + \cdots + c_m(t)y_m. \tag{9}$$

A tale scopo scriviamo l'equazione sotto forma di sistema (1): posto z uguale al vettore di componenti $y, y', \dots, y^{(m-1)}$, possiamo scrivere (2) come

$$z' = A(t)z + b$$

dove

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_m \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Il Wronskiano è allora

$$W(t) = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_m \\ y_1' & \cdots & y_m' \\ & \cdots & \\ y_1^{(m-1)} & \cdots & y_m^{(m-1)} \end{pmatrix}$$

dove $y_1, \dots, y_m$ sono le m soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea, e otteniamo $k(t) = (c_1(t), \dots, c_m(t))$ dalla condizione

$$W(t)k'(t) = b(t).$$

Vediamo un esempio: risolviamo l'equazione

$$y'' + \frac{1}{t}y' = t^3 \quad (t > 0).$$

L'equazione omogenea

$$y'' + \frac{1}{t} y' = 0$$

si risolve ponendo $z = y'$, si ha

$$z' + \frac{1}{t} z = 0,$$

ed usando i metodi dell'Esempio 6 seguente si ottiene la soluzione generale $z(t) = c/t$ da cui

$$y(t) = c_1 + c_2 \log t \quad (t > 0)$$

ossia prendiamo come base dello spazio delle soluzioni $y_1 = 1, y_2 = \log t$. Il sistema $Wk' = b$ è allora

$$\begin{cases} c_1'(t) \cdot 1 + c_2'(t) \log t = 0 \\ c_1'(t) \cdot 0 + c_2'(t) \frac{1}{t} = t^3 \end{cases}$$

($b = (0, t^3)$). Si ha così

$$c_2'(t) = t^4 \quad \Rightarrow \quad c_2(t) = \frac{t^5}{5}$$

(notare che si può prendere una qualunque primitiva di t^4: perché?) e

$$c_1'(t) = -t^4 \log t \quad \Rightarrow \quad c_1(t) = \frac{t^5}{5} \left(\frac{1}{5} - \log t \right).$$

Dunque la soluzione particolare è

$$\widetilde{y}(t) = \frac{t^5}{5} \left(\frac{1}{5} - \log t \right) + \frac{t^5}{5} \log t = \frac{t^5}{25}$$

da cui la soluzione generale

$$y(t) = \frac{t^5}{25} + k_1 + k_2 \log t, \quad k_1, k_2 \in \mathbf{R}.$$

Se poi dobbiamo risolvere un Problema di Cauchy con le condizioni iniziali $y(t_0) = \alpha_1, \quad y'(t_0) = \alpha_2$, basta sostituirle nella formula precedente e ricavare k_1, k_2.

6. Esempio (Equazioni lineari del I ordine)
Le equazioni lineari del primo ordine

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

si possono sempre risolvere esplicitamente: ponendo

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s) ds$$

si ha

$$\left(e^{A(t)}y\right)' = e^{A(t)}(y' + a(t)y) = e^{A(t)}b(t)$$

e integrando tra t_0 e t

$$e^{A(t)}y(t) - y_0 = \int_{t_0}^{t} e^{A(s)}b(s)ds$$

dato che $A(t_0) = 0$; otteniamo allora

$$y(t) = e^{-A(t)}y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(s)-A(t)}b(s)ds$$

ossia

$$y(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} a(\sigma)d\sigma}b(s)ds.$$

7. Esempio (Equazioni lineari a coefficienti costanti.)

Per un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti

$$y^{(m)} + a_1 y^{(m-1)} + \cdots + a_m y = 0, \quad a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{R},$$

si può calcolare la soluzione generale. Definiamo il *polinomio caratteristico*

$$P(\lambda) = \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\lambda + a_m$$

e indichiamo con $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ le sue radici (reali o complesse, eventualmente coincidenti), che si dicono *radici caratteristiche.* Vale la regola seguente: se λ_k ha molteplicità p, allora sono soluzioni le funzioni della forma

$$y = t^j e^{\lambda_k t}, \quad j = 0, \ldots, p-1;$$

in questo modo una radice di molteplicità p dà p soluzioni, e in totale abbiamo m soluzioni. Notare che l'esponenziale va inteso in senso complesso ($e^{\alpha+i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)$); se vogliamo soluzioni reali basta prendere parte reale e parte immaginaria. Notare anche che così facendo *non* si raddoppia il numero delle soluzioni: infatti se $\lambda_k = \alpha + i\beta$ è radice complessa di $P(z)$ anche $\overline{\lambda_k} = \alpha - i\beta$ lo è (perché?), ed è indifferente considerare la coppia di soluzioni $e^{(\alpha\pm i\beta)t}$ oppure la coppia $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$. Possiamo allora dare una regola ancora più esplicita per le soluzioni *reali*:

1) se λ_k è una radice reale semplice, allora $e^{\lambda_k t}$ è soluzione;

2) se λ_k è una radice reale di molteplicità p, allora $e^{\lambda_k t}$, $te^{\lambda_k t}$, …, $t^{p-1}e^{\lambda_k t}$ sono soluzioni;

3) se $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ è una radice complessa semplice, e quindi anche $\overline{\lambda_k} = \alpha_k - i\beta_k$ lo è, allora

$$e^{\alpha_k t}\sin(\beta_k t), \quad e^{\alpha_k t}\cos(\beta_k t)$$

sono soluzioni;

4) se $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ è una radice complessa di molteplicità p ($\Rightarrow$ anche $\overline{\lambda_k}$), allora

$$e^{\alpha_k t}\sin(\beta_k t),\ te^{\alpha_k t}\sin(\beta_k t),\dots,t^{p-1}e^{\alpha_k t}\sin(\beta_k t)$$

e

$$e^{\alpha_k t}\cos(\beta_k t),\ te^{\alpha_k t}\cos(\beta_k t),\dots,t^{p-1}e^{\alpha_k t}\cos(\beta_k t)$$

sono soluzioni.

La verifica che le funzioni precedenti sono effettivamente soluzioni dell'equazione data si fa direttamente sostituendo nell'equazione; dal momento che si ottengono m soluzioni linearmente indipendenti, ogni soluzione dell'equazione omogenea è combinazione lineare di esse.

Un'ultima osservazione sull'equazione omogenea: ricordando la forma complessa delle soluzioni $t^j e^{\lambda t}$, vediamo che la soluzione generale si può scrivere come

$$y(t) = Q_1(t)e^{\lambda_1 t} + \cdots + Q_\ell(t)e^{\lambda_\ell t},$$

dove $\lambda_1,\dots,\lambda_\ell$ sono le radici *distinte* del polinomio caratteristico, e $Q_j(t)$ è un polinomio qualunque di grado minore o uguale alla molteplicità di λ_j.

Consideriamo ora l'equazione lineare a coefficienti costanti non omogenea

$$y^{(m)} + a_1 y^{(m-1)} + \cdots + a_m y = f(t).$$

Possiamo applicare il metodo delle costanti arbitrarie per risolverla; tuttavia, se $f(t)$ ha la forma speciale

$$f(t) = R(t)e^{\gamma t}$$

con $\gamma \in \mathbf{C}$ e $R(t)$ polinomio di grado r, allora c'è un metodo più semplice per trovare una soluzione particolare. Infatti in questo caso deve esistere una soluzione della forma

$$\widetilde{y}(t) = Q(t)e^{\gamma t}$$

dove $Q(t)$ è un opportuno polinomio. Il grado di Q sarà $p+r$, dove r è il grado di $R(t)$, mentre p è la molteplicità con cui γ è radice del polinomio caratteristico; se γ non è radice poniamo per convenzione $p=0$. Notare che i $p-1$ termini di grado più basso di Q sono indeterminati (perché se $S(t)$ è un polinomio di grado $p-1$, $S(t)e^{\gamma t}$ è soluzione dell'omogenea). Quindi basta sostituire $Qe^{\gamma t}$ nell'equazione e trovare i coefficienti di Q: si ottiene l'identità

$$\sum_{k=p}^{m} \frac{1}{k!} P^{(k)}(\gamma) Q^{(k)}(t) = R(t).$$

È ovvio che se il termine noto dell'equazione ha la forma $f(t) = \sum_{j=1}^{s} R_j(t)e^{\gamma_j t}$, si considera un addendo alla volta e si sommano i risultati per avere la soluzione particolare.

8. Esempio Trovare tutte le soluzioni di

$$y^{IV} - y = \cos t.$$

Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 1 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i),$$

quindi le radici caratteristiche sono $\pm 1, \pm i$, tutte semplici. La soluzione generale dell'omogenea è allora

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t$$

(al posto di $\cos t, \sin t$ si possono mettere e^{it}, e^{-it}, soluzioni equivalenti). Per trovare la soluzione particolare, osserviamo che $\cos t = \mathrm{Re}(e^{it})$, quindi applichiamo il metodo dell'Esempio 7 a $f(t) = e^{it}$, cioè con $\gamma = i$; poi prenderemo la parte reale della soluzione ottenuta. Abbiamo $p = 1$, dato che $\gamma = i$ è radice semplice del polinomio caratteristico; $R(t) = 1$, quindi $r = 0$; cerchiamo una soluzione del tipo $(p + r = 1)$

$$\widetilde{y}(t) = (At + B)e^{it};$$

sostituendo

$$\widetilde{y}^{IV} - \widetilde{y} \equiv [A(t - 4i) + B]e^{it} - (At + B)e^{it} = -4iAe^{it}$$

(notare che il coefficiente B è indeterminato; si poteva anche non metterlo nell'espressione di $\widetilde{y}$); uguagliando a $f(t) = e^{it}$ otteniamo $A = i/4$ e B qualunque, prendiamo ad esempio $B = 0$. La soluzione particolare per $f(t) = e^{it}$ è allora

$$\widetilde{y}(t) = \frac{i}{4} t e^{it} = -\frac{1}{4} t \sin t + \frac{i}{4} t \cos t$$

e prendendo la parte reale si ottiene la soluzione particolare per $f(t) = \cos t$

$$\widetilde{y}(t) = -\frac{1}{4} t \sin t$$

da cui

$$y(t) = -\frac{1}{4} t \sin t + c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t.$$

ESERCIZI

1 Dimostrare che sono linearmente indipendenti le funzioni

$$t^{p_1}e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{p_N}e^{\lambda_N t}$$

se $p_1, \dots, p_N$ sono numeri reali non negativi distinti e $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sono numeri reali distinti.

2 Verificare che $t^j e^{\lambda t}$ è soluzione dell'equazione omogenea $y^{(m)} + a_1 y^{(m-1)} + \dots + a_m y = 0$, se λ è radice del polinomio caratteristico di molteplicità p, e $0 \le j \le p-1$.

3 Dato un polinomio $P(z)$ a coefficienti reali, se λ è una radice anche $\overline{\lambda}$ lo è.

4 Per i seguenti Problemi di Cauchy lineari, fare uno studio qualitativo delle soluzioni al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, quindi risolvere esplicitamente.

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y + t^5}{t} \\ y(1) = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} y' + y \log t = \sin(2t) \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 y' = y^2 + 4ty \\ y(1) = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} y' + \dfrac{2y}{t} = t^3 \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{t} - \dfrac{e^t}{t} = 0 \\ y(1) = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} y' - \dfrac{y}{1-t^2} - 1 - t = 0 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{\tan t} \\ y(\pi/4) = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} y' + ty = \sin t \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' - \dfrac{y}{t} = t \\ y(1) = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = ty + t \sin t \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' + \dfrac{t}{1+t^2} y + \dfrac{1}{t} = 0 \\ y(1) = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} y' + \dfrac{1+t+t^2}{1+t^2} y + t = 0 \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

5 Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni lineari a coefficienti costanti:

$$y'' - 3y + 2y = te^t, \qquad y'' + 3y' + 2 = te^t,$$

$$y'' + y = (t^5 + t^4 + t^3)\cos t, \qquad y'' + y' = \cos t,$$

$$y'' - y' = 5 + \cos t, \qquad y''' + 2y'' + y' = (1+t)e^{-t},$$

$$y^{(5)} - 7y^{IV} + 19y''' - 25y'' + 16y' - 4y = te^t$$

[nell'ultima equazione le radici caratteristiche sono 1,1,1,2,2].

C-5 PRINCIPALI METODI DI SOLUZIONE

1. Esempio *(Equazioni a variabili separabili.)*

Un'equazione si dice a *variabili separabili* se ha la forma

$$\begin{cases} y' = a(t)f(y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Supporremo che $a(t)$ sia continua e $f(y)$ localmente lipschitziana. Notiamo anzitutto che se $f(y_0) = 0$, la soluzione del problema è la funzione costante $y(t) = y_0$. È chiaro che tutte le soluzioni costanti corrispondono esattamente agli zeri di $f(y)$; per l'unicità locale le altre soluzioni dell'equazione non possono attraversarle. Supponiamo ora che $f(y_0) \neq 0$; l'esistenza di una soluzione massimale $y(t)$ è assicurata dalla teoria, e per quanto appena detto lungo tale soluzione $f(y(t))$ non può cambiare di segno: cioè il segno di $f(y(t))$ è lo stesso di $f(y_0)$ su tutto l'intervallo di esistenza. Per risolvere l'equazione poniamo

$$G(r) = \int_{y_0}^{r} \frac{dy}{f(y)};$$

se $y(t)$ è la soluzione, si deve avere

$$[G(y(t))]' = \frac{y'}{f(y)} = a(t)$$

e integrando fra t_0 e t ($G(y_0) = 0$)

$$G(y(t)) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds.$$

Ricordiamo ora che $f(y(t))$ non cambia di segno, quindi G è strettamente monotona e invertibile, per cui

$$y(t) = G^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right).$$

2. Esempio *(Metodo del fattore integrante.)*
Tale metodo si applica alle equazioni della forma

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{A(t,y)}{B(t,y)} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con $B(t_0, y_0) \neq 0$. Notiamo che se la forma nel piano (t, y)

$$\omega = A(t,y)dt + B(t,y)dy$$

è esatta ed ha per primitiva $F(t, y)$, allora la soluzione del Problema di Cauchy dato deve soddisfare

$$F(t, y(t)) = F(t_0, y_0).$$

Infatti derivando rispetto a t e dato che $A = D_t F$, $B = D_y F$, si ha

$$\frac{d}{dt}F(t, y(t)) = D_t F(t, y(t)) + D_y F(t, y(t))y' = A + By'$$

che è uguale a 0 se $y' = -A/B$. Dunque, se la forma ω è esatta, per risolvere il problema basta calcolarne una primitiva e poi se possibile ricavare y dall'equazione $F(t, y) = F(t_0, y_0)$; quando non è possibile ricavare $y(t)$, l'equazione si considera risolta *in forma implicita.* Quando ω è esatta anche l'equazione di partenza si dice *esatta.* Se invece ω non è esatta, si può cercare un *fattore integrante*, ossia una funzione $\mu(t, y)$ tale che la forma

$$\mu\omega = \mu A dt + \mu B dy$$

sia esatta. Infatti è chiaro che se moltiplichiamo A e B per la stessa funzione l'equazione di partenza non cambia. Una tale funzione esiste sempre ma calcolarla esplicitamente non è sempre possibile. Dobbiamo imporre la condizione

$$D_y(\mu A) = D_t(\mu B)$$

ossia

$$\mu_y A - \mu_t B = \mu(B_t - A_y);$$

questa equazione solitamente è più difficile da risolvere di quella di partenza. In un caso però si può trovare esplicitamente una funzione μ che la risolve: cioè quando le funzioni A, B sono tali che

$$B_t - A_y = \phi(y)A - \psi(t)B$$

per due opportune funzioni ϕ, ψ; infatti si può prendere

$$\mu(t, y) = e^{\Psi(t)+\Phi(y)}$$

con Ψ primitiva di ψ e Φ primitiva di ϕ, perché allora si ha

$$\mu_y A - \mu_t B = e^{\Psi+\Phi}(\phi A - \psi B)$$

mentre

$$\mu(B_t - A_y) = e^{\Psi+\Phi}(B_t - A_y).$$

Ad esempio risolviamo

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2ty}{y^6 + t^2} \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Dato che $D_y(2ty) = 2t = D_t(y^6 + t^2)$, l'equazione è esatta. Troviamo una primitiva F di ω:

$$F_t = A = 2ty \quad \Rightarrow \quad F = t^2 y + \rho(y) \quad \Rightarrow \quad F_y = t^2 + \rho'(y)$$

dove $\rho(y)$ è una funzione da determinare; ma

$$F_y = B = y^6 + t^2 \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{y^7}{7}$$

(come ρ si può prendere qualunque primitiva di y^6). Quindi $F(t, y) = t^2 y + y^7/7$ e la soluzione è espressa in forma implicita come

$$7t^2 y + y^7 = \alpha^7.$$

Risolviamo adesso il problema

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2t\sin y}{t^2\cos y + \sin y} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

(non definito per $\alpha = k\pi$). In questo caso $A = -2t\sin y$, $B = t^2\cos y + \sin y$. Dato che $A_y \neq B_t$, la forma non è esatta. Verifichiamo la (1):

$$B_t - A_y = 2t\cos y + 2t\cos y = 4t\cos y = -2\,\mathrm{cotan}\, y \cdot A$$

quindi $\phi = -2\,\mathrm{cotan}\, y$, $\psi = 0$ e

$$\Phi = -2\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = -2\log|\sin y| \quad \Rightarrow \quad \mu(t,y) = (\sin y)^{-2}$$

da cui

$$\mu\omega = \frac{2t}{\sin y} dt + \left(t^2 \frac{\cos y}{\sin^2 y} + \frac{1}{\sin y} \right) dy$$

che è esatta. La primitiva F si calcola come prima [$F_t = 2t/\sin y \Rightarrow F = t^2/\sin y + \rho(y)$ $\Rightarrow F_y = t^2\cos y/\sin^2 y + \rho' \Rightarrow \rho' = 1/\sin y$]; si ottiene

$$F(t,y) = \frac{t^2}{\sin y} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos y - 1}{\cos y + 1}\right|$$

e la soluzione è espressa da

$$F(t,y) = F(0,\alpha).$$

Notare che l'espressione ottenuta non è definita per $\alpha = k\pi$; inoltre il modulo si può risolvere osservando che l'espressione $(\cos y - 1)/(\cos y + 1)$ deve conservare lo stesso segno su tutto l'intervallo di esistenza di $y(t)$ (e quando si annulla, la soluzione si interrompe).

ESERCIZI

1 Per i seguenti Problemi di Cauchy a variabili separabili, fare uno studio qualitativo delle soluzioni al variare di α e poi risolvere. (In qualche caso si otterrà una soluzione in forma implicita).

$$\begin{cases} y' = -\frac{y}{t} \\ y(1) = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \frac{y + y^3}{t} \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = -\frac{\log t}{y} \\ y(1) = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \sin t \cdot (1 + y^2) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = \cos^2 y \cdot \sin t \\ y(0) = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \frac{y - y^3}{\cos^2 t} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = (t + t^2)(y + y^2) \\ y(0) = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} e^t y' + ty^2 = 0 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = (1+y^2)te^t \\ y(0) = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{t}{10y^4+6} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-t^2)y' = (1-y^2)t \\ y(0) = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} (1+e^t)yy' = e^t \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y^2+1}{2ty} \\ y(1) = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = -p\frac{y}{t} \quad (p \in \mathbf{R}) \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{\tan t} \\ y(1) = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} (10y^4+6)y' = t(y^5+3y+2) \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

2 Fare uno studio qualitativo dei problemi seguenti. Poi osservando che un'equazione della forma $y' = g(y/t)$ diventa a variabili separabili se si pone $y = t \cdot w(t)$, risolverli.

$$\begin{cases} t^2y' = y^2+4ty \\ y(1) = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} (y+t)y' = y \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

3 Studiare e risolvere i seguenti problemi (esatti o trovando un fattore integrante):

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{2ty+y^2}{2ty+t^2} \\ y(1) = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{\sin y - y\cos t}{\sin t - t\cos y} \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y-4t^2y^3}{4t^3y^2-2t} \\ y(1) = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{t-y}{t+y} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y(2\sin t + t\cos t)}{2t\sin t} \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

[$F = yt^2 + y^2t$; $F = t\sin y - y\sin t$; $F = \frac{4}{3}t^3y^3 - 2ty$; $F = y^2 - 2yt - t^2$; $\mu = ty$, $F = t^2y^2\sin t$.]

4 Studiare e risolvere i seguenti Problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{|y|}{1+t^2} \\ y(0) = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{1+t^2}{|y|} \\ y(0) = \alpha \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = e^y(|t| + |t-1|) \\ y(0) = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = a|y| + b \qquad (a, b \geq 0) \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$