Esercizi di istituzioni di analisi superiore*

Adriana Garroni

Aggiornato al: 24/06/2016

Attenzione: Gli esercizi con $*$ sono difficili o molto teorici.

Esercizio 1. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $u \in L^p(\Omega)$. Denotiamo con $C_c(\Omega)$ l'insieme delle funzioni continue a supporto compatto in Ω. Assumiamo che

$$\int_\Omega u\varphi \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c(\Omega) . \tag{0.1}$$

1. Nel caso $p = 2$ provare che $u = 0$ q.o. in Ω.
2. Provare lo stesso risultato assumendo che $p \in (1, +\infty)$.
3. Analizzare il caso $p = +\infty$.

Nota: usando la convoluzione si fanno in una volta sola tutti i casi $p \geq 1$.

Esercizio 2. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia μ una misura di Radon su Ω. Assumiamo che

$$\int_\Omega \varphi \, d\mu = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c(\Omega) . \tag{0.2}$$

Provare che se μ è una misura positiva, allora $\mu(K) = 0$ per ogni compatto K. E quindi $\mu = 0$.

Esercizio 3. Provare che le affermazioni degli Esercizi 1 e 2 sono ancora vere se le (0.1) e (0.2) sono vere solo per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ (probabilmente li avete già mostrati sotto queste condizioni).

Esercizio 4. Dimostrare che la delta di Dirac δ_0 non può essere identificata con una funzione $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, ossia mostrare che non esiste $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) \, dx = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) .$$

*Alcuni verranno svolti in aula. Da questa lista, con piccole modifiche verranno selezionati gli esercizi della prova scritta.

Esercizio 5. Provare che la distribuzione *dipolo* su $\mathbb{R}$, δ', definita come

$$\langle \delta', \varphi \rangle := \varphi'(0)$$

non può essere rappresentata da una misura (ossia non può essere scritta nella forma data da

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu$$

per alcuna misura μ).

Suggerimento: Provarlo per assurdo testando il dipolo con la successione

$$\psi_k(x) = (\sin(kx))\varphi(x)\,.$$

Esercizio 6. Mostrare che se T è una distribuzione allora

$$\partial_{x_i x_k} T = \partial_{x_k x_i} T \qquad \forall\; i, k \in \{1, ..., n\}$$

Esercizio 7. Provare che se $f \in C^1((a, b))$, allora la sua derivata nel senso delle distribuzioni coincide con la derivata classica. In questo senso la nozione di derivata che abbiamo introdotto estende quella classica.

Esercizio 8. Data una distribuzione T scrivere esplicitamente attraverso la sua azione su elementi di $\mathcal{D}$ o $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ (ossia n-ple di funzioni in $\mathcal{D}$) le seguente operazioni differenziali: ∇T (gradiente distribuzionale); div$\mathbf{T}$ (divergenza distribuzionale per distribuzioni vettoriali, $\mathbf{T} = (T_1, T_2, ..., T_n)$, con $T_i \in \mathcal{D}$); ΔT (Laplaciano distribuzionale), se $n = 3$ rot$T$ (rotore distribuzionale).

Esercizio 9. Verificare che la funzione $g(x) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|}$ è soluzione nel senso delle distribuzioni di $-\Delta g = \delta_0$.

Suggerimento: Si prenda φ con supporto in B_R e si usi che

$$\int_{B_R} \frac{1}{|x|} \Delta\varphi(x)\, dx = \lim_{r \to 0} \int_{B_R \setminus B_r} \frac{1}{|x|} \Delta\varphi(x)\, dx\,,$$

più qualche integrazione per parti e qualche stima.

Esercizio 10. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{D}_K$ denotiamo con

$$\|f\|_{m,K} = \sum_{\alpha\,,\; |\alpha| \le m} \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)|$$

(con $D^0 f$ intendiamo f).

1. Mostrare che la che $\|\cdot\|_{m,K}$ è una norma in $\mathcal{D}_K$;

2. Provare che
$$d_K(\varphi, \psi) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|\varphi - \psi\|_{m,K}}{1 + \|\varphi - \psi\|_{m,K}}$$
definisce una distanza, e quindi una topologia metrizzabile $\mathcal{T}_K$, in $\mathcal{D}_K$;

Esercizio 11. Dato un compatto K e sia $L : \mathcal{D}_K \to \mathbb{R}$ è un funzionale lineare, allora L è continuo su $\mathcal{D}_K$ se e soltanto se esistono $C > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tali che

$$|\langle L, \varphi \rangle| \leq C\|\varphi\|_{N,K} \qquad \varphi \in \mathcal{D}_K \,.$$

Suggerimento: Un verso è facile. Provare l'implicazione $\Longrightarrow$ per assurdo, usando che $\|\varphi\|_{m,K} \leq \|\varphi\|_{N,K}$ per ogni $m \leq N$.

Esercizio 12. Mostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti

i) $T \in \mathcal{D}'$;

ii) Per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ esistono $C > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tali che

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C\|\varphi\|_{N,K} \qquad \varphi \in \mathcal{D}_K \,.$$

Esercizio 13. Provare che per ogni $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ esiste una soluzione (unica a meno di costanti) dell'equazione nel senso delle distribuzioni

$$T' = G \,.$$

In questo senso ogni distribuzione ammette una primitiva in $D'(\mathbb{R})$.

Esercizio 14. Data una funzione discontinua $a(x) = 1 + \chi_{(\frac{1}{2},1)}(x)$ definita nell'intevallo $(0, 1)$. Determinare la soluzione in $W^{1,1}$ dell'equazione $(au')' = 0$ con la condizione $u(0) = 0$ e $u(1) = 3$ (le derivate vanno intese nel senso delle distribuzioni)[1].

Esercizio 15. • Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona, allora

$$\mu((c, d)) = f(d^-) - f(c^+)$$

è una misura esterna e può essere estesa a una misura di Radon su $[a, b]$ (misura di Stieltjes associata a f, si veda [3]). Provare che μ è la derivata distribuzionale di f. Dedurne che se f è BV allora $f' \in \mathcal{M}$.

Esercizio 16. Sia $B_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ la palla unitaria in $\mathbb{R}^2$. Determinare le derivate prime distribuzionali della funzione $f(x) = \chi_{B_1}(x)$. Possiamo dire che sono delle misure? Come è caratterizzano?

Esercizio 17. Si consideri la funzione di Cantor Vitali definita come limite uniforme della successione iterata

$$f_0(x) = x \quad x \in [0, 1] \qquad\qquad f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_n(3x) & x \in [0, \frac{1}{3}) \\ \frac{1}{2} & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_n(3x - 2) & x \in [\frac{2}{3}, 1] \,. \end{cases}$$

[1] $W^{1,1}$ denota lo spazio delle funzioni in L^1 con derivata distribuzionale in L^1.

Provare che il limite f non è assolutamente continua ma è BV. Definiamo *supporto* di una misura positiva di Borel su Ω, μ, l'insieme

$$\operatorname{supp}\mu = \{x \in \Omega \,:\, \forall N \text{ intorno di } x \implies \mu(N) > 0\}\,.$$

Provare che se $\mu = f'$ (derivata nel senso delle distribuzioni della funzione di Cantor Vitali) allora $|\operatorname{supp}\mu| = 0$, nonostante che $|\mu|(0,1) = 1$.

Esercizio 18. Consideriamo la distribuzione (pettine di Dirac)

$$T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k\,.$$

Provare che T è una distribuzione e determinarne il supporto.

Esercizio 19. Se una successione f_k di funzioni $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, converge a f in $L^1_{loc}(\Omega)$, ossia

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega'} |f_k - f|\,dx = 0 \qquad \forall\, \Omega' \subset\subset \Omega\,,$$

allora

$$\int_{\Omega} f_k\varphi\,dx \to \int_{\Omega} f\varphi\,dx \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ossia converge in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Esercizio 20. Mostrare che la successione

$$f_k(x) = k\sin(kx)$$

converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a zero, questo si vede facilmente testando con una funzione in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ e integrando per parti, mentre non converge debolmente in alcun $L^p_{loc}(\mathbb{R})$, ossia per ogni $p \in [1,+\infty)$ esiste $g \in L^{p'}((a,b))$ tali che

$$\int_a^b f_k(x)g(x)\,dx$$

non converge.

Esercizio 21. Data $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$ è 1-periodica e definiamo $f_k(x) := f(kx)$.

1. Provare che f_k converge in $\mathcal{D}'$ alla sua media, ossia alla distribuzione costante uguale a $\int_0^1 f(x)\,dx$;

2. Provare che f_k converge alla sua media debolmente in $L^p((a,b))$, con $p > 1$;

3. *Provare che f_k converge alla sua media debolmente in $L^1((a,b))$;

4. Provare che f_k converge forte in qualche L^p_{loc} se e soltanto se f è costante.

Lo stesso risultati vale per $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathbb{Z}^n$-periodica (ossia tale che $f(x+z) = f(x)$ per ogni $z \in \mathbb{Z}^n$).

Esercizio 22. Consideriamo le distribuzioni in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$T_n = n(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n}) \,.$$

Si può determinare il limite nel senso delle distribuzioni di T_n? In caso affermativo, determinarlo.

Esercizio 23. Provare che

$$\langle T, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \, dx \qquad \varphi \in \mathcal{D}$$

è una distribuzione.

Suggerimento: Usare il teorema fondamentale del calcolo per rappresentare $\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}$ e ricordare che φ ha supporto compatto in $\mathbb{R}$.

Esercizio 24. Sia u_k una successione delta approssimante (ossia della forma $u_k(x) = k^n u(kx)$, con u a supporto compatto, e convergente alla delta in distribuzioni). Provare che la successione u_k^2 non può convergere in distribuzioni.

Esercizio 25. Se consideriamo la funzione $\psi(x) = x^3$, questa è biunivoca da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, C^∞ ma $\psi^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$ non è C^∞. Data $u_k(x) = k\chi_{[0,1/k]}(x)$ (che è una delta approssimante), provare che la successione $u_k(x^3)$ non converge nel senso delle distribuzioni.

Esercizio 26. Determinare la distribuzione $\delta \circ \psi$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, per le seguenti scelte di ψ:

1. $\psi(x) = ax$ con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
2. $\psi(x) = Ax$ con $A \in \mathbb{M}^{n\times n}$, $\det A \neq 0$
3. $\psi(x) = Ax + b$ con $A \in \mathbb{M}^{n\times n}$, $\det A \neq 0$, e $b \in \mathbb{R}^n$

Esercizio 27. Mostrare che data $T \in \mathcal{D}'$, la distribuzione

$$\frac{T - \tau_{he_i} T}{h}$$

converge in $\mathcal{D}'$ a $\partial_{x_i} T$

Esercizio 28. Provare che se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ allora

1. $\tau_x(T * \phi) = (\tau_x T) * \phi = T * \tau_x \phi \,;$

2. Per ogni multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$
$$D^\alpha(T * \phi) = (D^\alpha T) * \phi = T * D^\alpha \phi\,.$$
In particolare $T * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$[2].

3. Mostrare che $T*\phi \equiv 0$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ se e soltanto se $T*\phi(x) = 0$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ per qualche $x \in \mathbb{R}^n$.

4. Se $T * \phi \equiv 0$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ allora $T = 0$;

5. Se T ha supporto compatto, allora $T * \phi$ con $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è a supporto compatto.

   Nota: basta dimostrare che il supporto di $T * \phi$ è limitato.

Esercizio 29. • *Date $\psi, \varphi \in \mathcal{D}$ e $T \in \mathcal{D}'$ provare

1. $((T * \psi) * \varphi)(0) = (T * (\psi * \varphi))(0)$.

   Suggerimento: Usare l'approssimazione dell'integrale con le somme di Riemann per approssimare $\psi*\varphi$ e usare la linearità delle distribuzioni.

   Attenzione: si usa che $T * \varphi(0) = \langle T, \check{\varphi}\rangle$.

2. $((T * \psi) * \varphi)(x) = (T * (\psi * \varphi))(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$

3. Sia φ_ε usa successione convergente a δ_0 in distribuzioni (ossia una δ approssimante), provare che
$$\langle T, \psi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\langle T * \varphi_\varepsilon, \psi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}((T * \varphi_\varepsilon) * \check{\psi})(0)$$
   Nota; Osservare che se φ_ε è una delta approssimante, lo è anche $\check{\varphi}_\varepsilon$.

4. Mostrare che se $\nabla T = 0$ allora esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che
$$\langle T, \phi\rangle = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} \phi\, dx \qquad \forall\ \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\,.$$
   Suggerimento: Usare che se $\nabla T = 0$ allora $\nabla(T * \varphi_\varepsilon) = 0$ e il passo precedente.

Esercizio 30. *Date due distribuzioni T e S, di cui almeno una a supporto compatto, provare che l'espressione
$$\langle T * S, \varphi\rangle := (T * (S * \check{\varphi}))(0) \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$
definisce una distribuzione e verifica
$$(T * S) * \varphi = T * (S * \varphi) \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\,.$$

[2] Suggerimento: fare il limite del rapporto incrementale

e

$$\langle T * S, \varphi\rangle = (S * (T * \check{\varphi}))(0) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

Suggerimento: Testare queste identità per $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2$ al variare di $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$ e usare che $\varphi_1 * \varphi_2 = \varphi_2 * \varphi_1$.

Esercizio 31. Provare che $(H * u)' = u$ per ogni $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (H è la funzione di Heaviside).

Esercizio 32. Data $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-r, r]$

1. Provare che $\hat{\varphi}$ (ossia la trasformata di Fourier di φ) è analitica (usando che $e^{-i2\pi\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\xi 2\pi)^n}{n!}$ e che $|\int_{-r}^{r} x^n \varphi(x)\, dx| \leq 2\|\varphi\|_\infty r^{n+1}$).
2. Dedurne che $\hat{\varphi}$ non può avere supporto compatto.
3. Mostrare che

$$|\varphi^{(n)}(\xi)| = o(|\xi|^{-m}) \qquad |x| \to +\infty \qquad \forall\, n, m \in \mathbb{N}\,.$$

Esercizio 33. Calcolare $\hat{x}$ in $\mathbb{R}$.

Esercizio 34. Calcolare la derivata nel senso delle distribuzioni delle seguenti distribuzioni

1. $T = 3H$, dove H è la funzione Heaviside, ossia $H(x) = \chi_{[0,+\infty)}$.
2. $T = \delta_0 + 3\delta_1$
3. $T = 2\delta_0'$.

Esercizio 35. Calcolare il gradiente delle seguenti distribuzioni in $\mathbb{R}^2$

1. $T = \chi_{\{x_1 > 0\}}$
2. $\langle T, \varphi\rangle = \int_0^1 \varphi(x_1, 0)\, dx_1$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

Esercizio 36. Data $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$ e $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\operatorname{supp} u \subseteq [0, 1]$.
Determinare $v = T * u$ e provare che v è una funzione periodica.

Esercizio 37. Data la funzione $u(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}$ mostrare che $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e che $u' = \mathrm{vp}\frac{1}{x}$.
Suggerimento: usare che $\int_{\mathbb{R}} \ln|x|\varphi'(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \ln|x|\varphi'(x)\, dx$.

Esercizio 38. Mostrare che $C^m(K)$ delle funzioni m-differenziabili sul compatto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è uno spazio di Banach con la norma (mostrare che è una norma)

$$\|u\|_{C^m} := \sum_{n=0}^{m} \sum_{|\alpha|=n} \sup_K |D^\alpha u|\,.$$

Esercizio 39. Sia $\alpha \in (0,1)$ e consideriamo l'insieme delle funzioni α-*hölderiane* sull'intervallo $[a,b] \in \mathbb{R}$

$$C^{0,\alpha}([a,b]) := \left\{ f \in C([a,b])\,;\ [f]_\alpha := \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}$$

1. Mostrare che $[f]_\alpha$ è un seminorma;

2. Provare che $C^{0,\alpha}([a,b])$ è denso in $C([a,b])$;

3. Mostrare che
$$\|f\|_{C^{0,\alpha}} = \|f\|_\infty + [f]_\alpha$$
è una norma e che rende $C^{0,\alpha}([a,b])$ uno spazio di Banach;

4. Provare che dato $r \in [a,b]$ la funzione $g_r(x) = |x-r|^\alpha$ è in $C^{0,\alpha}([a,b])$;

5. Provare che per ogni $r \neq s$
$$[g_r - g_s]_\alpha \geq 2\,.$$
Da questo dedurre che $C^{0,\alpha}([a,b])$ non è separabile (ossia non ammette un sottoinsieme numerabile denso).

Esercizio 40. Consideriamo il sottospazio di $C([0,1])$

$$X = \{u \in C([0,1])\ :\ u(0) = 0\}$$

e definiamo
$$F(u) = \int_0^1 u(t)\,dt\,.$$

Mostrare che non esiste alcuna funzione in X per la quale $\|F\|_{X'}$ è raggiunta.

Esercizio 41. Provare il seguente enunciato:

Sia X normato e M un suo sottospazio.

Allora M è denso se e solo se per ogni $f \in X'$ tale che $f_{|M} = 0$ si ha $f = 0$.

Esercizio 42. Dato X normato e $x_0 \in X$.

1. Se $x_0 \neq 0$, esiste $f_0 \in X'$, con $\|f_0\|_{X'} = 1$ e $f(x_0) = \|x_0\|_X$;

2. Se $f(x_0) = 0$ per ogni $f \in X'$, allora $x_0 = 0$;

3. Mostrare un esempio di uno spazio X in cui l'elemento f_0 del punto 1) non è unico.

4. Diciamo che uno spazio normato è *strettamente convesso* se per ogni $x, y \in X$, con $x \neq y$ e $\|x\| = \|y\| = 1$ si ha che $\|\frac{x+y}{2}\| < 1$. Mostrare che L^1 e L^∞ non sono strettamente concessi;

5. Provare che se X' è strettamente convesso allora l'elemento f_0 del punto 1) è unico.

Esercizio 43. Dato C convesso chiuso in $\mathbb{R}^n$ e dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, provare che esiste un unico elemento $P(x_0) \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\operatorname{dist}(x_0, C) = \|x_0 - P(x_0)\| = \min_{x \in C} \|x - x_0\| .$$

Seguire i seguenti passi:

1. Provare l'esistenza construendo una successione minimizzante e provando che converge a un minimo.

2. Mostrare l'unicità per assurdo usando la convessità di C

La mappa $P : \mathbb{R}^n \to C$ è la *proiezione* su C.

Osservare che se C è un sottospazio, allora P è lineare e continua (usando il punto 3).

Esercizio 44. Sia $C = \{f \in L^1((0,1)) \ : \ \int_0^1 f(x)\, dx = 1\}$. Evidentemente $0 \notin C$. Mostrare che C è convesso e che esistono infiniti $g \in C$ di norma minima, ossia che verificano $\|g\|_{L^1} = \min_{f \in C} \|f\|_{L^1} = \operatorname{dist}(0, C)$.

Esercizio 45 (Funzionale di Minkowski o Gauge di C)**.** Sia X normato e $C \subseteq X$ un convesso chiuso con $0 \in \operatorname{int}(C)$. Il funzionale di Minkowski di C è dato da

$$p_C(x) = \inf\left\{r > 0 \ : \ \frac{x}{r} \in C\right\} \qquad x \in X .$$

1. Provare che l'insieme su cui si fa l'inf è non vuoto;

2. • Mostrare che p_C è positivamente 1-omogeneo e subadditivo su X

3. Provare che esiste $M > 0$ tale che $p_C(x) \leq M\|x\|_X$;

4. Provare che $p_C(x) \leq 1 \iff x \in C$;

5. Provare che $p_C(x) < 1 \iff x \in \operatorname{Int}(C)$.

Nota: sotto ipotesi leggermente diverse questo esercizio è un risultato che sta sul Brezis.

Esercizio 46. Sia X normato e $C \subseteq X$ convesso aperto con $0 \in C$. Assumiamo che $C = -C$ (ossia C sia simmetrico) e che C sia limitato. Provare che p_C è una norma equivalente a $\| \cdot \|_X$.

Esercizio 47. Sia $X = C([0,1])$ con la norma del sup, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Per ogni $p \in (1, +\infty)$ consideriamo

$$C = \left\{f \in X \ : \ \int_0^1 |f|^p dx < 1\right\} .$$

1. Provare che C è aperto, simmetrico e convesso;
2. È limitato?
3. Calcolare p_C. È equivalente a $\|\cdot\|_\infty$?

Esercizio 48. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ considerare l'insieme di $L^2([-1,1])$

$$C_\alpha := \left\{ f \in L^2([-1,1]) \ : \ \text{continua e } f(0) = \alpha \right\} .$$

Mostrare che C_α è un convesso nè aperto, nè chiuso. Che per ogni α C_α è denso in $L^2([-1,1])$. Dedurne che se $\alpha \neq \beta$ C_α e C_β non possono essere separati da un iperpiano chiuso.

Esercizio 49. Sia X uno spazio vettoriale normato di dimensione finita. Sia $C \in X$ non vuoto, convesso tale che $0 \notin C$.

1. Scegliere un insieme $\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq C$ denso in C (perché esiste?). Per ogni n poniamo

$$C_n = \text{co}\{x_1, x_2, ..., x_n\} := \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \ : \ t_i \in \mathbb{R} \ \ t_i \geq 0 \ \ \sum_i t_i = 1 \right\} .$$

   Mostrare che C_n è compatto e che $\cup_n C_n$ è denso in C.

2. Provare che esiste $f_n \in X'$ tale che $\|f_n\|_{X'} = 1$ e $\langle f_n, x\rangle \geq 0$ per ogni $x \in C_n$.
3. Dedurre che esiste $f \in X'$ tale che $\|f\|_{X'} = 1$ e $\langle f, x\rangle \geq 0$ per ogni $x \in C$.
4. Concludere che dati comunque due insiemi convessi disgiunti A e B in X, esiste un iperpiano chiuso che li separa (senza ulteriori ipotesi su A e B).

Esercizio 50. Provare che se $f_n, f \in L^2(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ verificano

$$\int_\Omega f_n g \, dx \to \int_\Omega f g \, dx \qquad \forall \ g \in L^2(\Omega)$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$$

allora f_n converge a f in $L^2(\Omega)$.

Esercizio 51. Fissiamo un insieme X e una collezione $\mathcal{S}$ di sottoinsiemi di X. Supponiamo che $\cup_{W\in\mathcal{S}} = X$. Consideriamo quindi la famiglia $\mathcal{B}$ di insiemi ottenuti facendo intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}$

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{k=1}^{N} W_k \ : \ N \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \, , \ W_k \in \mathcal{S} \, , \ \forall k \in \{1, ..., N\} \right\} .$$

Consideriamo la collezione di insiemi di X

$$\tau := \left\{ \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \; : \; A \text{ un insieme } V_\alpha \in \mathcal{B} \; \forall \alpha \in A \right\} \cup \emptyset \, .$$

1. Provare che τ è una topologia in τ (ossia è chiusa rispetto a unioni qualsiasi e intersezioni finite, $\emptyset \in \tau$ and $X \in \tau$).

2. Provare che τ è la topologia meno fine che contiene $\mathcal{S}$ (ossia che presa un'altra topologia $\tau' \supset \mathcal{S}$ allora $\tau' \supset \tau$).

Esercizio 52. Mostrare che in uno spazio normati di dimensione finita la topologia debole e la forte coincidono e quindi

$$x_n \rightharpoonup x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_n \to x \, .$$

Suggerimento: Usare che in dimensione finita tutte le norme sono equivalenti e la caratterizzazione degli intorni di $\sigma(X, X')$.

Esercizio 53. Dare un esempio di una successione f_k in $L^2((0,1))$ che converge q.o. a 0, che converge debolmente in L^2 ma non converge fortemente.

Esercizio 54. Date due successioni $\{f_k\} \subset L^\infty((0,1))$ e $\{g_k\} \subset L^2((0,1))$ e dati f e g tali che f_k converge a f q.o. in $(0,1)$ e g_k converge a g debolmente in L^2. Provare che $f_k g_k$ converge debolmente a fg in L^2.

Esercizio 55. Consideriamo lo spazio $\ell^2 = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=0}^\infty x_n^2 < +\infty\}$ munito della norma

$$\|x\|_{\ell^2} = \sum_{n=0}^\infty |x_n|^2 \, .$$

1. Mostrare che ℓ^2 è uno spazio di Banach (in realtà vedremo che è meglio, è uno spazio di Hilbert);

2. Mostrare che il duale di ℓ^2 è ℓ^2 (cosa che potremmo dedurre dalla sua struttura Hilbertiana, ma che si può fare esplicitamente in questo caso), ossia mostrare che per ogni $F \in (\ell^2)'$, esiste $y \in \ell^2$ tale che

$$F(x) = \sum_{n=0}^\infty x_n y_n \qquad \forall \; x \in \ell^2 \, ;$$

   Suggerimento: definire $y_n = F(e_n)$.

3. Mostrare che se $y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ verifica $\sup_n |y_n| < +\infty$ allora la successione di elementi di ℓ^2

$$y^{(k)} = y_k e_k \, ,$$

   dove $(e_k)_n = 0$ per ogni $n \neq k$ e $(e_k)_k = 1$, converge debole a 0 in ℓ^2.

4. Usando il punto precedente mostrare che per ogni $x \in \ell^2$ con $\|x\|_{\ell^2} < 1$ esiste una successione $x^{(k)}$ in ℓ^2 con $\|x^{(k)}\|_{\ell^2} = 1$ che converge debole a x.

Esercizio 56. Sia $1 < p < +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Consideriamo una successione $\{f_k\} \subset L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, provare che

$$f_k \rightharpoonup f \text{ in } L^p \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|f_k\|_{L^p} \leq C \qquad \int_Q f_k\, dx \to \int_Q f\, dx \quad \forall Q \text{ cubo } \subset \Omega\,.$$

Esercizio 57 (Lemma di Mazur)**.** Sia X uno spazio di Banach e $x_n \rightharpoonup x$.

1. Provare che esiste una successione y_n tale che

$$y_n \in \mathrm{co}\,\{x_1, x_2, ...\} \qquad y_n \to x\,,$$

in altre parole che $x \in \overline{\mathrm{co}\,\{x_1, x_2, ...\}}^{\|\cdot\|}$

2. Provare che esiste z_n tale che

$$z_n \in \mathrm{co}\,\{x_1, ..., x_n\} \qquad z_n \to x\,,$$

Suggerimento: Usare il punto precedente reindicizzando la successione.

Esercizio 58. Siano X e Y due spazi di Banach e consideriamo lo spazio prodotto $Z = X \times Y$ con la norma prodotto $\|(x, y)\|_Z = \|x\|_X + \|y\|_Y$.

1. Provare che Z è un Banach.

2. Provare che per ogni $f \in Z'$ esistono $g \in X'$ e $h \in Y'$ tali che $f(x, y) = g(x) + h(y)$ per ogni $x \in X$ e $y \in Y$. Dedurne che

$$(x_n, y_n) \overset{Z}{\rightharpoonup} (x, y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_n \overset{X}{\rightharpoonup} x \;\text{ e }\; y_n \overset{Y}{\rightharpoonup} y\,.$$

3. Sia W un sottospazio chiuso di X e $\{w_n\} \subset W$ allora

$$w_n \overset{W}{\rightharpoonup} w \qquad \Longleftrightarrow \qquad w_n \overset{X}{\rightharpoonup} w\,.$$

4. Sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ invertibile, allora

$$x_n \overset{X}{\rightharpoonup} x \qquad \Longleftrightarrow \qquad T(x_n) \overset{Y}{\rightharpoonup} T(x)\,.$$

Esercizio 59. Dato $1 \leq p < +\infty$, definiamo lo spazio di Sobolev (su cui torneremo)

$$W^{1,p}((0,1)) = \big\{f \in L^p((0,1)) \;:\; f' \in L^p((0,1))\big\}$$

(con f' intendiamo la derivata nel senso delle distribuzioni). Consideriamo in questo spazio la norma

$$\|f\|_{W^{1,p}} := \|f\|_{L^p} + \|f'\|_{L^p}\,.$$

1. Provare che $W^{1,p}((0,1))$ è uno spazio di Banach.

2. Provare che
$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{in } W^{1,p}((0,1))$$
se e soltanto se
$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{in } L^p((0,1)) \quad \text{e} \quad f_n' \rightharpoonup f' \quad \text{in } L^p((0,1)).$$

Suggerimento: Usare l'esercizio 58 e la mappa $T : W^{1,p} \to (L^p)^2$ che a $f \in L^p((0,1))$ associa $T(f) = (f, f')$.

Esercizio 60. *Provare che il sottoinsieme E delle misure di Radon finite in $[0,1]$, $\mathcal{M}([0,1])$, definito da
$$E := \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{x_i} \ : \ x_i \in [0,1] \text{ e } c_i \in \mathbb{R} \right\}$$
è denso in $\mathcal{M}([0,1])$ rispetto alla topologia $*$-debole, ma non rispetto alla topologia forte (indotta dalla variazione totale).

Suggerimento: Data $\mu \in \mathcal{M}([0,1])$ considerare partizioni di $[0,1]$, $\cup_i I_i$, e definire $c_i = \mu(I_i)$.

Esercizio 61. Sia X uno spazio di Banach. Mostrare che se X è riflessivo allora
$$\|f\|_{X'} = \max_{\|x\| \le 1} \langle f, x \rangle \qquad \forall f \in X'.$$
ossia la norma duale è raggiunta da qualche $x \in X$.

Esercizio 62. Dato $p \in (1, +\infty)$ e $g(x) = n^{1/p} e^{-nx}$ in $L^p((0,1))$ provare che

1. $g_n \to 0$ q.o in $(0,1)$

2. g_n è limitata in L^p

3. $g_n \not\to 0$ fortemente in L^p

4. $g_n \rightharpoonup 0$ in L^p

5. Cosa si può dire nel caso $p = 1$?

Esercizio 63. Siano $f_n, f \in L^p(\Omega)$ con $p \in (1, +\infty)$ tali che $f_n \to f$ q.o. in Ω e $\|f_n\|_{L^p} \to \|f\|_{L^p}$. Provare che f_n converge fortemente a f in L^p.

Suggerimento: Usare l'uniforme convessità e riflessività di L^p (vedi Esercizio 80)

Esercizio 64. Siano $f_n, f \in L^1(\Omega)$ tali che $f_n \to f$ q.o. in Ω e $\|f_n\|_{L^1} \to \|f\|_{L^1}$. Provare che f_n converge fortemente a f in L^1.

Suggerimento: Si deve fare a mano perchè L^1 non è uniformemente convesso. Usare il Teorema di convergenza dominata (usare che $||a|+|b|-|b-a|| \leq 2|b|$).

Esercizio 65. Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ semicontinua inferiormente che verifica $f(x) \geq C$, $C \in \mathbb{R}$ (ossia limitata dal basso), per ogni $\lambda \in [0, +\infty]$ e $x \in [a, b]$ definiamo la *trasformata di Yosida di* f come

$$f_\lambda(x) = \min \{f(y) + \lambda|x - y| : y \in [a, b]\} \ .$$

1. Provare f_λ è ben definito e che il minimo è raggiunto;
2. Provare che f_λ è λ-Lipschtziana;
3. Mostrare che $f_\lambda(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$
4. Provare che $f(x) = \sup_\lambda f_\lambda(x) = \lim_{\lambda\to+\infty} f_\lambda(x)$;
5. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è convessa, provare che f_λ è convessa;
6. Provare che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha supporto compatto, allora anche f_λ ha supporto compatto.

Mostrare che le stesse proprietà sono ancora vere per $f : \Omega \to \mathbb{R}$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f(x) \geq -C|x|$ (attenzione che f_λ con questa ipotesi di limitatezza da basso più debole non è definita per tutti i λ. Per quali?).

Esercizio 66. Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ L-lipschitziana, mostrare che la funzione definita per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$f_L(x) = \min \{f(y) + L|x - y| : y \in [a, b]\} \ .$$

è lipschitziana di costante L ed è un'estensione di f a tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 67. Data una successione di misure in $\mathcal{M}(\Omega)$, μ_h che convergono $*$-debolmente a μ, provare che

1. Per ogni funzione $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ semicontinua inferiormente si ha
$$\int_\Omega \varphi \, d\mu \leq \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega \varphi \, d\mu_h$$
2. Per ogni funzione $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ semicontinua superiormente si ha
$$\int_\Omega \varphi \, d\mu \geq \limsup_{h\to+\infty} \int_\Omega \varphi \, d\mu_h$$

Suggerimento: Utilizzare l'approssimazione di Yosida costruita nell'Esercizio 65.

Dedurne che per ogni aperto A in Ω

$$\mu(A) \le \liminf_{h\to+\infty} \mu_h(A)$$

e per ogni compatto K in Ω

$$\mu(K) \ge \limsup_{h\to+\infty} \mu_h(K)\,.$$

*Se E è un boreliano che verifica $\mu(\partial E) = 0$, allora

$$\mu(E) = \lim_{h\to+\infty} \mu_h(E)\,,$$

(Quest'ultimo punto usa che se $\mu(\partial E) = 0$, allora $\mu(\overline{E}) = \mu(Int(E))$).

Esercizio 68. Consideriamo il sottospazio di $L^2([1,+\infty))$ dato da

$$V = \left\{ f \in L^2([1,+\infty)) \ : \ \int_1^{+\infty} x^2 f^2(x)\,dx < +\infty \right\}$$

1. Provare che V è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare
$$(f,g)_V = \int_1^{+\infty} x^2 fg\,dx\,;$$
2. Mostrare che $V \subsetneq L^2([1,+\infty))$;
3. Mostrare che $V' \supsetneq L^2([1,+\infty))$.
Suggerimento: Trovare un funzionale lineare su V che non sia limitato in $L^2([1,+\infty))$ (nota che le funzioni in V devono 'decadere più velocemente' all'infinito).

Esercizio 69. Data una misura di Radon in $\mathbb{R}^2$ data da $\mu = \delta_0 \times \mathcal{L}^1$ (ossia la misura prodotto tra la delta in $\mathbb{R}$ e la misura di Lebesgue 1-dimensionale), definiamo

$$\langle T, \varphi\rangle := \int_{\mathbb{R}^2} \varphi d\mu \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)\,. \tag{0.3}$$

Verificare che T è lineare e continua su $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, ossia è una distribuzione. Mostrare che $\partial_y T = 0$.

Facoltativo: Mostrare che la derivata $\partial_x T$ non può essere rappresentata da una misura di Radon.

Suggerimento per la parte facoltativa: Testare $\partial_x T$ con la successione

$$\psi_k(x,y) = (\sin(kx))\varphi(x)\Phi(y)\,.$$

Esercizio 70. Per ognuna delle seguenti successioni mostrare se sono limitate in $L^p(\Omega)$, con $1 \leq p \leq +\infty$. Dire se convergono forte o debole in $L^p(\Omega)$, con $1 \leq p < +\infty$. Dire se convergono *debolmente in $L^\infty(\Omega)$ o in $\mathcal{M}(\Omega)$. Determinarne, quando esiste, il limite.

1. $\Omega = [0,1]$ e $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ data da
$$f_k(x) = \begin{cases} k^{\frac{1}{4}} - k^{\frac{5}{4}}x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{k} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
2. $\Omega = \mathbb{R}$ e $f_k(x) = k^{-\frac{1}{2}}\varphi(\frac{x}{k})$ con $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-1,1]$.

Esercizio 71. Sia X uno spazio di Banach e $T \in \mathcal{L}(X,X)$ tale che per ogni $x \in X$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $T^n(x) = 0$. Mostrare che esiste n_0 tale che $T^{n_0} = 0$.

Suggerimento: Scrivere $X = \cup(T^n)^{-1}(0)$ e usare il lemma della categoria di Baire.

Esercizio 72. Sia X uno spazio di Banach e $\{x_n\}$ una successione convergente a x debolmente (ossia nella topologia $\sigma(X,X')$). Definiamo
$$\sigma_n = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}.$$
Provare che σ_n converge debolmente a x.

Dare un esempio in cui σ_n converge fortemente, ma tale che x_n non converge fortemente.

Suggerimento per l'esempio: Considerare in $L^2(\mathbb{R})$ una successione $f_k(x) = \phi(x-k)$ scegliendo ϕ opportunamente. Vedi anche Esercizio 82.

Esercizio 73. Provare che se H è un Hilbert e $v : \mathbb{N} \to H$ è tale che v_k è limitata (nel senso che $\sup_k \|v_k\| < +\infty$) e $(v_k, v_h) = 0$ per ogni $k \neq h$, allora la successione v_k converge debole a zero per $k \to \infty$.

Esercizio 74. Provare che $L^p(\Omega)$, con $p \geq 1$ e $p \neq 2$, non è uno spazio di Hilbert.

Suggerimento Provare che $\|\cdot\|_{L^p}$ non verifica l'identità del parallelogramma.

Esercizio 75. Sia Ω limitato e $f_n \in L^p(\Omega)$ con $p \in (1,+\infty)$ e supponiamo che f_n converga q.o. a f in Ω e che f_n sia limitata in $L^p(\Omega)$. Provare che f_n converge fortemente a f in $L^r(\Omega)$ per ogni $r \in [1,p)$.

Suggerimento: Usare la proprietà di Egorov della convergenza quasi uniforme.[3]

[3] Se $f_n \to f$ q.o. in Ω, allora per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un insieme misurabile A_ε tale che $|A_\varepsilon| < \varepsilon$ e $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N_\varepsilon$ si ha
$$\sup_{\Omega \setminus A_\varepsilon} |f_n - f| < \varepsilon.$$

Esercizio 76. Sia $f_n \in L^p(\Omega)$ con $p \in [1, +\infty)$ e supponiamo che f_n converga q.o. a f in Ω e che f_n sia limitata in L^p.

1. Mostrare che $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(\Omega)$, per $p \in (1, +\infty)$.

2. Se sappiamo che $f_n \rightharpoonup g$ in $L^1(\Omega)$, mostrare che $g = f$ q.o. in Ω.

Suggerimento: Usare l'Esercizio 75.

Esercizio 77. Data la successione di distribuzioni in $\mathbb{R}$

$$T_n = n^2(\delta_{1/n} - 2\delta_0 + \delta_{-1/n})$$

dove δ_{x_0} è la delta Dirac in x_0. Verificare se T_n converge nel senso delle distribuzioni e eventualmente calcolarne il limite descrivendo la sua azione su $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Suggerimento: Usare lo sviluppo di Taylor.

Esercizio 78. Supponiamo che X e Y siano normati, con $X \neq \{0\}$.

1. Provare che esiste $F \in X'$, con $F \neq 0$;

2. Data $F \in X'$ e $y \in Y$, mostrare che $T(x) := F(x)y$ appartiene a $\mathcal{L}(X, Y)$, con $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|F\|_{X'}\|y\|_Y$;

3. Provare che se $\mathcal{L}(X, Y)$ è completo, allora Y è di Banach.

Suggerimento: 1) Usare Hahn Banach. 3) Usare il punto 2).

Esercizio 79. Data una successione di funzioni $\{\phi_k\} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ con $\operatorname{supp} \phi_k \subseteq [-1, 1]$, che converge uniformemente a ϕ in $\mathbb{R}$, con $\phi \neq 0$.

1. Provare che ϕ_k converge a ϕ in L^p per ogni $1 \leq p \leq +\infty$;

2. Definiamo la successione

$$f_k(x) = \phi_k(x - k)\,.$$

   Provare che f_k è limitata in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty]$.

3. Provare che f_k converge debolmente a zero in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in (1, +\infty)$.

4. Mostrare che f_k non converge debolmente a zero in $L^1(\mathbb{R})$.

5. La successione converge *debolmente in L^∞?

Esercizio 80. Provare la disuguaglianza di Clarkson

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2}\left(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p\right) \qquad \forall\, f,g \in L^p$$

se $p \in [2,+\infty)$[4]

Dedurne che L^p per $p \in [2,+\infty)$ è uniformemente convesso[5]

Suggerimento: Basta dimostrare

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}\left(|a|^p + |b|^p\right) \qquad \forall\, a,b \in \mathbb{R}\,.$$

Questa è conseguenza del fatto che la funzione $g(x) = (x^2+1)^{p/2} - x^p - 1$ è crescente in $[0,+\infty)$ (provarlo).

Esercizio 81. Mostrare che L^1 e L^∞ non sono uniformemente convessi.

Esercizio 82. Sia H uno spazio di Hilbert.

1. Sia $\{u_n\}$ una successione in H che converge debolmente a 0. Si costruisca induttivamente una sottosuccessione tale che $u_{n_1} = u_1$ e

$$|(u_{n_k}, u_{n_j})| \leq \frac{1}{k} \qquad \forall\, j = 1,2,...,k-1\,.$$

   Provare che la successione delle medie aritmetiche di u_{n_k},

$$\sigma_k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} u_{n_j}\,,$$

   converge fortemente a zero per $k \to +\infty$[6].

   Suggerimento: Stimare $\|\sigma_k\|^2$.

2. Assumiamo che u_n sia una successione limitata in H. Provare che esiste una sottosuccessione u_{n_k} tale che $\sigma_k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} u_{n_j}$ converge fortemente per $k \to +\infty$.

Esercizio 83. Mostrare con un esempio che $C^1([-1,1])$ con la norma $\sup|f| + \sup|f'|$ non è uno spazio di Hilbert (la norma non verifica l'identità del parallelogramma). Mostrare che la successione $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ appartiene a $C^1([-1,1])$ ed è di Cauchy rispetto alla norma

$$\|f\|_{L^2} + \|f'\|_{L^2}\,,$$

ma non ha limite in $C^1([-1,1])$.

[4] Per $1 < p \leq 2$, la disuguaglianza di Clarkson è

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^{p'} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^{p'} \leq \left(\frac{1}{2}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\|g\|_{L^p}^p\right)^{1/(p-1)} \qquad \forall\, f,g \in L^p\,.$$

[5] Analogamente questo è vero per $1 < p \leq 2$.

[6] Confrontare con l'Esercizio 57

Esercizio 84. Sia $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$. Consideriamo $f : \Omega \to \mathbb{R}$ data da $f(x) := |x|^\alpha$.

1. Provare che f è derivabile in senso debole (ossia il suo gradiente nel senso delle distribuzioni appartiene a $(L^1_{loc}(\Omega))^n$) se e soltanto se $\alpha > -n+1$.

   Suggerimento: Considerare prima $\int_{B(0,1)\setminus B(0,\varepsilon)} f \partial_{x_i}\varphi \, dx$ e poi passare al limite per $\varepsilon \to 0$.

2. Dato $p \in [1, +\infty)$, determinare α in modo che f appartenga a $W^{1,p}(\Omega)$.

Esercizio 85. Sia $I = (0,1)$, mostrare che $W^{1,1}(I)$ non è riflessivo. Sapreste mostrarlo anche per $W^{1,1}(B(0,1))$ con $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$?

Suggerimento: Usare il fatto che se fosse riflessivo tutte le successioni limitate sarebbero debolmente convergenti. Trovare una successione che non verifica questa proprietà.

Esercizio 86. Sia $I = (0,1)$. Supponiamo che u_n sia una successione limitata in $W^{1,p}(I)$, $1 < p \leq +\infty$. Mostrare che esiste una sottosuccessione u_{n_k} e una funzione u in $W^{1,p}(I)$ tali che $\|u_{n_k} - u\|_\infty \to 0$ (ossia u_{n_k} converge uniformemente a u e quindi fortemente in L^p) e $u'_{n_k} \rightharpoonup u'$ debolmente in $L^p(I)$, se $p < +\infty$, mentre $u'_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ $*$debolmente in $L^\infty(I)$.

Suggerimento: Ricordare che $W^{1,p}(I) \subseteq W^{1,1}(I)$ e che le funzioni in $W^{1,1}(I)$ sono assolutamente continue.

Esibire una successione in $W^{1,1}(I)$ che non ammette sottosuccessioni convergenti fortemente in $L^\infty(I)$.

Suggerimento: Si veda l'esercizio sulla non riflessività di $W^{1,1}(I)$.

Esercizio 87. Data $u \in W^{1,p}((0,+\infty))$ estendiamo la funzione per riflessione[7]

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \geq 0 \\ u(-x) & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

Provare che $u^* \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ e $\|u^*\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} = 2\|u\|_{W^{1,p}((0,+\infty))}$.

Suggerimento: Usare il teorema fondamentale del calcolo.

Nel caso $u \in W^{2,p}((0,+\infty))$ come si fa a estenderla a una funzione in $W^{2,p}(\mathbb{R})$ controllando la sua norma?

Esercizio 88. Consideriamo le funzioni di troncatura $\xi_h(x) = \xi\left(\frac{x}{h}\right)$, con $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 2\,. \end{cases}$$

1. Mostrare che $\xi_h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

[7] Notare che u è assolutamente continua e si può estendere in 0 per continuità

2. Mostrare che se $g \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, con $p \in [1, +\infty]$ e allora $\xi_k g \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e $\xi_k g$ converge a g fortemente in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

3. Sapendo che $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, mostrare che anche $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ lo è.

Esercizio 89 (Regola del prodotto)**.** Sia $p \in [1, +\infty]$ e p' il suo esponente coniugato (ossia tale che $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$). Sia $f \in W^{1,p}(\Omega)$ e $g \in W^{1,p'}(\Omega)$. Provare che $fg \in W^{1,1}(\Omega)$ e

$$\partial_{x_i}(fg) = g\partial_{x_i} f + f\partial_{x_i} g \,. \tag{0.4}$$

Dedurne che se Ω è limitato e $f, g \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, allora $fg \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e vale (0.8).

Suggerimento: Supporre che $p \neq +\infty$ e usare l'approssimazione C^∞ di f e la definizione di derivata debole.

Esercizio 90 (Regola della catena)**.** Sia $G \in C^1(\mathbb{R})$ con $G(0) = 0$ e $|G'(t)| \leq M$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Dato $f \in W^{1,p}(\Omega)$, provare che $G \circ f \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$\partial_{x_i}(G \circ f) = (G' \circ f)\partial_{x_i} f \,. \tag{0.5}$$

Suggerimento: Mostrare che $G \circ f \in L^p(\Omega)$ e $(G' \circ f)\partial_{x_i} f \in L^p(\Omega)$. Infine provare (0.5) per approssimazione.

Esercizio 91. Sia $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Provare che le funzioni

$$f^+ := \max\{f, 0\} \quad f^- := \max\{-f, 0\} \quad |f| = f^+ - f^-$$

sono in $W^{1,p}(\Omega)$, cone derivate deboli date da

$$\partial_{x_i} f^+ = \chi_{E^+}\partial_{x_i} f \quad \partial_{x_i} f^- = -\chi_{E^-}\partial_{x_i} f \quad \partial_{x_i}|f| = \chi_{E^+}\partial_{x_i} f - \chi_{E^-}\partial_{x_i} f \,,$$

con

$$E^+ := \{x \in \Omega \,:\, f(x) > 0\} \qquad E^- := \{x \in \Omega \,:\, f(x) < 0\} \,.$$

Dedurre che per ogni $M > 0$ la funzione *troncata*

$$T_M f = f \wedge M \vee M = \max\{\min\{f, M\}, -M\}$$

appartiene a $W^{1,p}(\Omega)$.

Suggerimento: È sufficiente fare il caso f^+. Data la funzione

$$g_k(t) = 2k \int_{t-\frac{1}{k}}^{t+\frac{1}{k}} s^+ ds,$$

provare che $g_k \in C^1(\mathbb{R})$, che $|g_k(t) - t^+| \leq \frac{1}{k}$, $|g_k'(t)| \leq 1$, $g_k' \to 0$ in $(-\infty, 0)$ e $g_k' \to 1$ in $(0, +\infty)$. Quindi usare l'Esercizio .

Esercizio 92. Sia $p \in [1, +\infty]$ e $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Sia $E \subseteq \Omega$ misurabile e $a \in \mathbb{R}$. Provare che

$$f = a \quad \text{in } E \qquad \Longrightarrow \qquad \partial_{x_i} f = 0 \quad \forall\, i\,.$$

Suggerimento: Usare l'Esercizio 91 e il fatto che $f = (f-a)^+ - (f-a)^- + a$.

Esercizio 93 (Criterio di selezione di Helly)**.** Sia u_n una successione limitata in $W^{1,1}((0,1))$. L'obiettivo è provare che esiste una sottosuccessione u_{n_k}, tale che $u_{n_k}(x)$ converge per ogni $x \in [0,1]$

1. Mostrare che si può assumere che per ogni n la funzione u_n sia non decrescente in $[0,1]$.

   Suggerimento: Basta definire $v_n(x) = \int_0^x |u_n'(t)|\, dt$ e $w_n = v_n - u_n$.

2. Provare che esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ e un insieme misurabile $E \subset [0,1]$ con $|E| = 0$ tale che $u_{n_k}(x)$ converge a un limite $u(x)$ per ogni $x \in [0,1] \setminus E$.

   Suggerimento: Usare che l'immersione di $W^{1,1}((0,1))$ in $L^1((0,1))$ è compatta.

3. Assumendo che u_n è non decrescente, mostrare che il limite u è non decrescente in $[0,1] \setminus E$ e dedurre che c'è un insieme numerabile $D \subset (0,1)$ e una funzione $\bar{u} : (0,1) \setminus D \to \mathbb{R}$ non decrescente tale che $\bar{u}(x+0) = \bar{u}(x-0)$ per ogni $x \in (0,1) \setminus D$ e $\bar{u}(x) = u(x)$ per ogni $x \in (0,1) \setminus (E \cup D)$.

4. Provare che $u_{n_k}(x) \to \bar{u}(x)$ per ogni $x \in (0,1) \setminus D$.

5. Costruire una successione $\{u_{n_k}\}$ che converge per ogni x in $[0,1]$.

   Suggerimento: Usare un argomento diagonale.

Esercizio 94. Sia $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < n$.

- Definiamo $u_k : \Omega \to \mathbb{R}$ come

  $$u_k(x) = \begin{cases} k^{\frac{n-p}{p}}(1 - k|x|) & \text{se } |x| < \frac{1}{k} \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

  Provare che u_k è limitata in $W^{1,p}(\Omega)$ ma non ammette una sottosuccessione convergente in $L^{p^*}(\Omega)$ con $p^* = \frac{np}{n-p}$.

- Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ data da $u(x) = \log(\log(1 + \frac{1}{|x|}))$ se $x \in \Omega \setminus \{0\}$ e $u(0) = 0$. Provare che $u \in W^{1,n}(\Omega)$ ma non a $L^\infty(\Omega)$.

Esercizio 95. Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, semicontinua inferiormente, che verifica $f(t) \geq -C$, con $C > 0$. Mostrare che il funzionale

$$F(u) = \int_0^1 f(u')\, dx$$

è semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia debole in $W^{1,p}((0,1))$ se e soltanto se f è convessa.

Suggerimento: In un verso si può usare il lemma di Fatou o il teorema di Hahn Banach. Per mostrare che la semicontinuità inferiore debole di F implica la convessità di f usare una successione la cui derivata è periodica e oscilla tra due valori.

Esercizio 96. Sia Ω un aperto di classe C^1 (eventualmente $\Omega = \mathbb{R}^n$). Usando i risultati di immersione per $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mostrare che valgono i seguenti risultati:

1. Se $2p < n$ allora $W^{2,p}(\Omega)$ si immerge in modo continuo in $L^q(\Omega)$ per ogni $p \leq q \leq \frac{np}{n-2p}$. L'immersione è compatta per ogni $p \leq q < \frac{np}{n-2p}$, se Ω è limitato.

2. Se $2p = n$ allora $W^{2,p}(\Omega)$ si immerge in modo continuo in $L^q(\Omega)$ per ogni $p \leq q \leq +\infty$. L'immersione è compatta per ogni $p \leq q < +\infty$, se Ω è limitato.

3. Se $2p > n$ allora $W^{2,p}(\Omega)$ si immerge in modo continuo in $L^\infty(\Omega)$. L'immersione è compatta per ogni se Ω è limitato.

Esercizio 97. Mostrare che $W^{2,4}(\mathbb{R}^2)$ si immerge in modo continuo in $C^{1,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)$ (ossia funzioni derivabili con derivate $\frac{1}{2}$-hölderiane).

Esercizio 98. Sia Q il quadrato aperto $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x_1| < 1\,,\ |x_2| < 1\}$. Definiamo

$$u(x) = \begin{cases} 1 - x_1 & \text{se } x_1 > 0\,,\ |x_2| < x_1 \\ 1 + x_1 & \text{se } x_1 < 0\,,\ |x_2| < -x_1 \\ 1 - x_2 & \text{se } x_2 > 0\,,\ |x_1| < x_2 \\ 1 + x_2 & \text{se } x_2 < 0\,,\ |x_1| < -x_2\,. \end{cases}$$

Stabilire se u è in $W^{1,\infty}(Q)$.

Suggerimento: Determinare le derivate deboli di u.

Esercizio 99. Fissato $\alpha > 0$ e $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$. Mostrare che esiste una costante che dipende solo da α e n, tale che

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leq c \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

per ogni $u \in H^1(\Omega)$ tale che $|\{x \in \Omega \,:\, u(x) = 0\}| \geq \alpha$.

Suggerimento: Procedere per assurdo.

Esercizio 100. Sia $\Omega = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Mostrare che la funzione

$$f(x) = (1 + |\log|x||)^\alpha ,$$

appartiene ad $H^1(\Omega)$. Mostrare che $f \in L^q(B(0,1))$ per ogni $q < +\infty$ ma che $f \notin L^\infty(B(0,1))$.

Esercizio 101. Sia $\Omega = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $p \geq 1$ e $\alpha > 0$.

1. Mostrare che la funzione

   $$u(x) = |x|^{-\alpha} \quad \text{per } x \neq 0 ,$$

   appartiene ad $W^{1,p}(\Omega)$ se e solo se $(\alpha + 1)p < n$. In particolare $u \notin W^{1,p}(\Omega)$ se $p > n$.

2. Sia $\{r_k\}$ un insieme numerabile denso in Ω e definiamo

   $$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |x - r_k|^{-\alpha}$$

   Mostrare che v appartiene ad $W^{1,p}(\Omega)$ se $(\alpha+1)p < n$. In particolare v è un esempio di funzione in $W^{1,p}(\Omega)$ che è illimitata in ogni intorno contenuto in Ω.

Esercizio 102.

1. Supponiamo che $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ con trasformata di Fourier

   $$\mathcal{F}(f)(k) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i2\pi xk} f(x)\, dx$$

   in $H^1(\mathbb{R}^n)$. Mostrare che per ogni $j = 1, ..., n$ si ha che $\mathcal{F}(\partial_{x_j} f) = i2\pi k_j \mathcal{F}(f)(k)$ per ogni $k \in \mathbb{R}^n$.

2. Supponiamo che $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ con $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Provare che $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ se e solo se $k \to |k|\mathcal{F}(f)$ è in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Mostrare che se $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, allora

   $$\|f\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |k|^2)|\mathcal{F}(f)(k)|^2 dk .$$

Esercizio 103. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$.

1. Provare la seguente disuguaglianza di interpolazione

   $$\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \leq \left(\int_\Omega |D^2 u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{0.6}$$

   per ogni $u \in C_c^\infty(\Omega)$ (dove $D^2 u$ denota la matrice delle derivate seconde di u).

   Suggerimento: Integrare per parti.

2. Provare la disuguaglianza (0.6) per tutte le funzioni $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$.

   Suggerimento: Approssimare u in H^1 con funzioni $u_n \in C^1_c(\Omega)$ e con funzioni $w_n \in C^\infty(\Omega)$ in H^2 e usare l'integrazione per parti.

3. Provare per ogni funzione $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$ la seguente disuguaglianza

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \leq \left(\int_\Omega |D^2 u|^p dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Esercizio 104. Sia $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ e consideriamo una partizione $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ di Ω. Poniamo $I^n_k = (x_k, x_{k+1})$, $0 \leq k \leq n-1$.

1. Mostrare che se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con $f \in H^1(I^n_k)$ per ogni $0 \leq k \leq n-1$, allora $f \in H^1(\Omega)$ se e soltanto se $f \in C(\overline{\Omega})$.

2. Mostrare che se $\sup_k |I^n_k| \to 0$ quando $n \to +\infty$ (per esempio $|I^n_k| = \frac{b-a}{n}$ per ogni n), allora per ogni $u \in H^1(\Omega)$ esiste una successione $u_n \in H^1(\Omega)$ che converge forte a u in $H^1(\Omega)$ e tale che u'_n è costante in ogni I^n_k al variare di $0 \leq k \leq n-1$ (ossia u_n è affine a tratti).

3. Chiamiamo $\mathcal{A}_n$ l'insieme delle funzioni affini a tratti descritte nel punto 2. (in corrispondenza di $I^n_k = (a + \frac{k(b-a)}{n}, a + \frac{(k+1)(b-a)}{n})$.

   Mostrare che data $f \in L^2(\Omega)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un'unica funzione $u_n \in \mathcal{A}_n$ che realizza il minimo

$$\min_{u \in \mathcal{A}_n} \left\{ \int_a^b |u'|^2 dx - \int_a^b f u \, dx \; : \; u(a) = 0 \, , \; u(b) = 0 \right\} .$$

   Suggerimento: Usare che $\mathcal{A}_n$ si può identificare con $\mathbb{R}^{n+1}$, ossia è uno spazio finito dimensionale.

   Mostrare che la successione u_n converge debolmente in $H^1(\Omega)$ al minimo u di

$$\min_{u \in H^1_0(\Omega)} \left\{ \int_a^b |u'|^2 dx - \int_a^b f u \, dx \right\} .$$

Esercizio 105. Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti con bordo regolare (quanto basta per poter applicare il teorema della divergenza, e.g. Lipschitz) tali che $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ e $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $u_{|\Omega_1} \in C^1(\Omega_1) \cap H^1(\Omega_1)$ e $u_{|\Omega_2} \in C^1(\Omega_2) \cap H^1(\Omega_2)$. Allora $u \in H^1(\Omega)$ se e soltanto se $u \in C(\Omega)$.

Suggerimento: usare il teorema della divergenza (ossia integrare per parti).

Esercizio 106. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto considerare lo spazio

$$H(\mathrm{div}, \Omega) = \left\{ u = (u_1, ..., u_n) \in (L^2(\Omega))^n \ : \ \mathrm{div}\, u = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} u_i \in L^2(\Omega) \right\},$$

dove quindi la divergenza va intesa nel senso delle distribuzioni, munito della norma

$$\|u\|_{H(\mathrm{div},\Omega)} := \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\mathrm{div}\, u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1. Mostrare che $H(\mathrm{div}, \Omega)$ è uno spazio di Hilbert.
2. Mostrare che la funzione $u : Q \to \mathbb{R}^2$, con Q il cubo di lato 1 in $\mathbb{R}^2$ centrato in 0, definita da

$$u(x) = \begin{cases} (0,0) & \text{se } x_1 < 0 \\ (0,1) & \text{se } x_1 \geq 0 \end{cases}$$

appartiene a $H(\mathrm{div}, Q)$. Osservare che $u \notin (H^1(Q))^2$.

Esercizio 107. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una funzione che verifica

- la mappa $x \to f(x, v)$ è misurabile per ogni $v \in \mathbb{R}^m$
- la mappa $v \to f(x, v)$ è continua per quasi ogni $x \in \Omega$

(una funzione che verifica queste due proprietà si dice di Caratheodory). Supponiamo inoltre che dato $p \in [1, +\infty)$

$$|f(x, v)| \leq a|v|^p + b(x) \qquad \text{q.o. } x \in \Omega$$

con $a \in \mathbb{R}_+$ e $b \in L^1(\Omega)$. Allora la mappa $u \to \int_\Omega f(x, u(x))\, dx$ è continua rispetto alla topologia forte in $L^p(\Omega)$.

Esercizio 108. Dato Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, consideriamo una funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$, con $p \in [1, +\infty)$. Per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$ e $|h| \leq \mathrm{dist}\,(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$, definiamo la derivata parziale discreta di u

$$D_h^i u = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}.$$

1. Mostrare che
$$\|D_h^i u\|_{L^p(\Omega')} \leq \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)}$$
2. Mostrare che $D_h^i u \in W^{1,p}(\Omega')$ e se $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ allora $v = \psi D_h^i u \in W^{1,p}(\Omega')$. Inoltre scrivere il gradiente di v.

3. Mostrare che
$$\lim_{h\to 0} \|D_h^i u - \partial_i u\|_{L^p(\Omega')} = 0\,.$$
Suggerimento: Usare il fatto che se $v \in C^\infty(\Omega)$ allora $D_h^i v - \partial_i v \to 0$ uniformemente in Ω' e la densità di C^∞. Quindi usare il punto 1.

Esercizio 109. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $u \in L^p(\Omega)$, con $p \in (1, +\infty)$. Supponiamo che esista una costante $K > 0$ tale che per ogni $i = 1, ..., n$ si abbia
$$\|D_h^i u\|_{L^p(\Omega')} \leq K$$
per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$ e $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^n \backslash \Omega)$. Sappiamo che quindi $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Provare che per ogni $i = 1, ..., n$
$$\|\partial_i u\|_{L^p(\Omega')} \leq K\,.$$

Esercizio 110. Dato $R > 0$ e $\Phi \in (0, 2\pi]$, poniamo $\alpha := \pi/\Phi$ e il settore circolare
$$\Omega_{R,\Phi} := \{(r\cos\phi, r\sin\phi)\ :\ 0 < r < R\,,\ 0 < \phi < \Phi\} \subset \mathbb{R}^2\,.$$
Definiamo la funzione $u : \Omega_{R,\Phi} \to \mathbb{R}$ che in coordinate polari scriviamo
$$u = r^\alpha \sin(\alpha\phi)\,.$$

1. Mostrare che $\Delta u = 0$ in $\Omega_{R,\Phi}$.
2. Dato $p \in [1, +\infty)$ determinare per quali Φ, $\nabla u \in L^p(\Omega_{R,\Phi})$.

Esercizio 111. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $f_k \in L^2(\Omega)$. Sia $u_k \in H_0^1(\Omega)$ la soluzione debole di $-\Delta u_k = f_k$ in Ω, ossia tale che
$$\int_\Omega \nabla u_k \nabla v\, dx = \int_\Omega f_k v\, dx \qquad v \in H_0^1(\Omega).$$
Mostrare che se f_k converge debolmente in L^2 a f allora u_k converge fortemente a u in $H_0^1(\Omega)$, con u soluzione debole di $-\Delta u = f$ in Ω.

Suggerimento: Provare la seguente stima *a priori*:
$$\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f_k\|_{L^2(\Omega)}\,.$$
Usare la riflessività per mostrare la convergenza debole delle u_k. Per la convergenza forte usare l'immersione compatta di $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ (testando l'equazione di u con u_k e l'equazione di u_k con u). Il fatto che tutta la successione converge è conseguenza dell'unicità della soluzione.

Esercizio 112. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto limitato. Dati $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e $f \in L^2(\Omega)$, considerare il seguente problema di minimo
$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega a_1|\partial_{x_1}u|^2 + a_2|\partial_{x_2}u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega a_0|u|^2\, dx - \int_\Omega fu\, dx : u \in H_0^1(\Omega)\right\}$$

1. Mostrare che se $a_1, a_2 > 0$ e $a_0 \geq 0$ allora il problema ammette un solo minimo.
2. Scrivere l'equazione di Eulero Lagrange corrispondente.
3. Mostrare che se $a_1, a_2 > 0$ e $a_0 < 0$, ma con $|a_0|$ sufficientemente piccolo, esiste un unico minimo.
4. *Mostrare che in generale se $a_2 < 0$ il problema non ammette minimo.

   Suggerimento: Testare l'energia con una funzione della forma $u_n(x_1, x_2) = \psi(x_1)\phi(nx_2)$ con ψ e ϕ a supporto compatto e C^1.

Esercizio 113. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia A una matrice $n \times n$ definita positiva.

1. Provare che esistono $\alpha, \beta > 0$ tali che
$$\alpha|\xi|^2 \leq A\xi \cdot \xi \leq \beta|\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n .$$
2. Dato $f \in (L^2(\Omega))^n$, considerare il seguente problema di Dirichlet (formale)
$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A\nabla u) = \mathrm{div}\,(f) & \text{in } \Omega \\ u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{0.7}$$
   Scrivere la formulazione debole del problema (0.7) e provare che ammette un'unica soluzione.
3. Mostrare che se A è simmetrica (0.7) è l'equazione di Eulero Lagrange di un problema di minimo. Scrivere il problema di minimo.

Esercizio 114. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sia di Carathèodory[8], ossia, $f(\cdot, v)$ misurabile per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ e $f(x, \cdot)$ continua per quasi ogni $x \in \Omega$ e che soddisfi
$$f(x, v) \geq c_1|v|^p - c_2 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n \ \text{ q.o. } x \in \Omega\,,$$
per $p \in (1, +\infty)$ e $c_1, c_2 > 0$.

1. Provare che se $u_n \to u$ fortemente in $W^{1,p}(\Omega)$ allora
$$\int_\Omega f(x, \nabla u)\,dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f(x, \nabla u_n)\,dx\,.$$
   Suggerimento: Usare Fatou.

[8] NOTA: Si dimostra che se f è di Carathèodory, allora per ogni $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ misurabile, si ha che $f(x, v(x))$ è quasi ovunque uguale a una funzione Borel misurabile

2. Provare che se $f(x,\cdot)$ è convessa per q.o. $x \in \Omega$ allora per ogni $u_n \rightharpoonup u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$ allora
$$\int_\Omega f(x,\nabla u)\,dx \le \liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega f(x,\nabla u_n)\,dx\,.$$
Suggerimento: Usare Hahn-Banach o il lemma di Mazur.

3. Provare che esiste
$$\min\left\{\int_\Omega f(x,\nabla u)\,dx\ :\ u \in W_0^{1,p}(\Omega)\right\}.$$

4. Se f è C^1, scrivere la corrispondente equazione di Eulero Lagrange.

Esercizio 115. Provare che per una funzione $u \in W^{1,p}(I)$, con $I=(0,1)$, vale la formula di integrazione per parti:
$$\int_0^1 u'\varphi\,dx = u(1)\varphi(1) - u(0)\varphi(0) - \int_0^1 u\varphi'\,dx$$
per ogni $\varphi \in C^1(\bar I)$ e dove u è il rappresentante continuo.

Esercizio 116. Sia $I=(-1,1)\subset\mathbb{R}$ e siano $I^+=(0,1)$ e $I^-=(-1,0)$.

1. Data $u \in W^{1,p}(I^+)$ definiamo
$$\bar u(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in I^+\\ u(-x) & \text{se } x \in I^-\,.\end{cases}$$
Mostrare che $\bar u$ è derivabile in senso debole, calcolarne la derivata e mostrare che $\bar u \in W^{1,p}(I)$.

2. Data $u \in W_0^{1,p}(I^+)$ definiamo
$$\tilde u(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in I^+\\ -u(-x) & \text{se } x \in I^-\,.\end{cases}$$
Mostrare che $\tilde u$ è derivabile in senso debole, calcolarne la derivata e mostrare che e $\tilde u \in W_0^{1,p}(I)$.

Esercizio 117. Sia $Q=(-1,1)^n\subset\mathbb{R}^n$ e siano $Q^+=\{x\in Q:\ x_n>0\}$ e $Q^-=\{x\in Q:\ x_n<0\}$.

a) Data $u \in W^{1,p}(Q^+)$ definiamo
$$\bar u(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in Q^+\\ u(x_1,...,x_{n-1},-x_n) & \text{se } x \in Q^-\,.\end{cases}$$
Mostrare che $\bar u$ è derivabile in senso debole, calcolarne la derivata e mostrare che $\bar u \in W^{1,p}(Q)$.

b) Data $u \in W_0^{1,p}(Q^+)$ definiamo

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in Q^+ \\ -u(x_1, ..., x_{n-1}, -x_n) & \text{se } x \in Q^- . \end{cases}$$

Mostrare che $\tilde{u}$ è derivabile in senso debole, calcolarne la derivata e mostrare che e $\tilde{u} \in W_0^{1,p}(Q)$.

Esercizio 118. Dato un insieme aperto $E \subset\subset \Omega$ con Ω aperto limitato in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$, definiamo

$$\mathrm{Cap}(E, \Omega) := \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx : u \in H_0^1(\Omega)\,,\ u \geq \chi_E \text{ q.o. in } \Omega \right\} .$$

Questa si chiama la *capacità (armonica) di E in Ω.*

a) Provare che l'insieme $\{u \in H_0^1(\Omega)\,,\ u \geq \chi_E \text{ q.o. in } \Omega\}$ è non vuoto.

b) Mostrare che $\mathrm{Cap}(E, \Omega) < +\infty$. Dedurne che il problema che definisce $\mathrm{Cap}(E, \Omega)$ ammette minimo, u_E (potenziale capacitario).

   Suggerimento: Usare Lax Milgram o il metodo diretto.

c) Provare che il minimo è unico.

d) Provare che $u_E = 1$ q.o. in E.

   Suggerimento: Usare che $u_E \wedge 1$ è una funzione test ammissibile

e) Provare che se $F \subset E$ con F aperto, allora $\mathrm{Cap}(F, \Omega) \leq \mathrm{Cap}(E, \Omega)$.

f) *Per $n = 2$ calcolare $\mathrm{Cap}(B_r, B_R)$ (dove $0 < r < R$ e B_r denota la palla di raggio r e centro 0).

   Suggerimento: Usare che u_{B_r} minimizza

$$\min \left\{ \int_{B_R \setminus B_r} |\nabla u|^2 dx : u \in H_0^1(\Omega)\,,\ u = 1 \text{ q.o. in } B_r \right\}$$

   è a simmetria radiale e calcolarla usando l'equazione di Eulero.

Esercizio 119. Sia $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ e consideriamo il funzionale

$$F(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + a|u(x)|^p\, dx$$

su $H^1(\Omega)$, con $a \in \mathbb{R}$ e $p \in [1, 6]$.

a) Mostrare che $F(u)$ è debolmente semicontinuo inferiormente in H^1 se $a \geq 0$ o se $a < 0$ ma $p \in [1, 6)$.

   Suggerimento: Usare l'immersione di Sobolev.

b) Se $p = 6$ and $a < 0$ mostrare che F è fortemente continuo.

c) Usare la successione $u_n(x) = cn^\alpha \max\{0, 1 - n^2|x|\}$ con una scelta opportuna di c e α per contraddire la semicontinuità inferiore debole di F nel caso $a < 0$ e $p = 6$.

Esercizio 120. Sia $I = (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in L^2(I)$ e sia $H = \{u \in H^1(I)\,,\ \text{con } u(0) = 0\}$.

a) Si provi che H è un sottospazio (debolmente) chiuso di $H^1(I)$.

b) Si provi che esiste un'unica soluzione del problema di minimo

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 (|u'|^2 + |u|^2)\,dx - \int_0^1 fu\,dx + \alpha u(1)\ :\ u \in H^1(I)\,,\ \text{con } u(0) = 0\right\}$$

c) Si mostri che l'equazione di Eulero Lagrange del problema di minimo è

$$\int_0^1 u'v'dx + \int_0^1 uv\,dx = \int_0^1 fv\,dx + \alpha v(1) \qquad \forall v \in H\,.$$

Dedurne che $u \in H^2$ e che u è la soluzione debole del problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{in } I \\ u(0) = 0 \quad u'(1) = \alpha\,. \end{cases}$$

Esercizio 121. Sia $\{f_k\}$ una successione in $W^{1,p}(\Omega)$, con $p > 1$ e Ω aperto limitato. Supponiamo che $f \in W^{1,p}(\Omega)$ verifichi $|\{x \in \Omega\ :\ f(x) = 0\}| = 0$.

1. Provare che se f_k converge fortemente a f in $L^p(\Omega)$, allora $\chi_{\{f_k \geq 0\}}$ converge a $\chi_{\{f \geq 0\}}$ in $L^q(\Omega)$, per ogni $q \in [1, +\infty)$. È ancora vero in $L^\infty(\Omega)$? Provarlo o mostrare un controesempio.

2. Provare che se f_k converge fortemente a f in $W^{1,p}(\Omega)$, allora f_k^+ converge fortemente a f^+ in $W^{1,p}(\Omega)$.

   Suggerimento: Dare per noto che $\nabla f^+ = \chi_{\{f \geq 0\}} \nabla f$.

3. Assumiamo solo che f_k converga ad f debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$, è vero che f_k^+ converge debolmente a f^+ in $W^{1,p}(\Omega)$? (giustificare la risposta)

Esercizio 122. Sia $\{f_k\}$ una successione in $W^{1,p}(\Omega)$, con $p > 1$ e Ω aperto limitato.

1. Provare che se f_k converge fortemente a f in $W^{1,p}(\Omega)$, allora f_k^+ converge fortemente a f^+ in $W^{1,p}(\Omega)$.

   Suggerimento: Dare per noto che $\nabla f^+ = \chi_{\{f \geq 0\}} \nabla f$ e che quindi $|\nabla f_k^+| \leq |\nabla f_k|$.

2. Assumiamo solo che f_k converga ad f debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$, è vero che f_k^+ converge debolmente a f^+ in $W^{1,p}(\Omega)$? (giustificare la risposta)

Esercizio 123. Dato Ω aperto connesso limitato di $\mathbb{R}^n$ sia ω un sottoinsieme misurabile di Ω con $|\omega| > 0$. Provare che esiste C_ω tale che

$$\int_\Omega \left| u(x) - \frac{1}{|\omega|} \int_\omega u(y)\, dy \right|^2 dx \le C_\omega \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \qquad \forall u \in H^1(\Omega) \qquad (*)$$

usando la seguente strategia:

1. Provare che se non vale $(*)$ allora si può trovare una successione $u_n \in H^1(\Omega)$ tale che $\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \to 0$, $\int_\omega u_n\, dx = 0$ e $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

2. Mostrare, usando la compattezza dell'immersione di $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$, che il punto 1) porta a una contraddizione.

Esercizio 124.
Sia $I = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Dato $f \in L^2(I)$, sia $H = \{u \in H^1(I) \ \text{con}\ u(0) = u(1)\}$[9].

1. Si provi che H è un sottospazio chiuso di $H^1(I)$.

2. Sia $a > 0$; si provi che esiste un'unica soluzione del problema di minimo

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 (|u'|^2 + a|u|^2)\, dx - \int_0^1 f u\, dx \ :\ u \in H \right\}$$

3. Si mostri che l'equazione di Eulero Lagrange del problema di minimo è

$$\int_0^1 u'v' dx + a \int_0^1 uv\, dx = \int_0^1 fv\, dx \qquad \forall v \in H\,.$$

Dedurne che $u \in H^2(I)$ e che u è la soluzione debole del problema

$$\begin{cases} -u'' + au = f & \text{in } I \\ u(0) = u(1) \quad u'(0) = u'(1)\,. \end{cases}$$

Mostrare che la funzione u estesa per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ appartiene a $H^2_{loc}(\mathbb{R})$.

4. Provare che se $f \in C(\bar{I})$, allora la soluzione è classica.

Esercizio 125. Sia $I = (-1,1) \subset \mathbb{R}$ e consideriamo $a_1(x) = 1 + x^2$ e $a_2(x) = 2 + x$.

[9] È sottointeso che u è il rappresentante continuo.

1. Provare che esiste un'unico punto di minimo del problema
$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} a_1(x)|u'|^2dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} a_2(x)|u'|^2dx - \int_{-1}^{1} u\,dx \;:\; u\in H_0^1(-1,1)\right\}.$$
Suggerimento: Usare il metodo diretto o Lax Milgram provando la coercività della forma quadratica associata al problema.

2. Scrivere l'equazione di Eulero Lagrange (in forma debole) che il minimo u deve verificare.

3. Indichiamo con $I_1 = (-1,0)$ e $I_2 = (0,1)$ e denotiamo rispettivamente con u_1 e u_2 la restrizione di u a I_1 e I_2. Provare che $u_k \in H^2(I_k)$, $k = 1,2$.
Suggerimento: Usare le equazioni in forma debole risolte da u_1 e u_2, prendendo funzioni test $v \in H_0^1(I_k)$.

4. Mostrare che u_1 e u_2 ammettono un rappresentante $C^1(\bar{I}_k)$, $k = 1,2$. Provare che
$$u_1(0) = u_2(0) \qquad u_1'(0) = 2u_2'(0)\,.$$

Esercizio 126. Sia $\{f_k\}$ una successione in $W^{1,p}(\Omega)$, con $p > 1$ e Ω aperto limitato. Supponiamo che $f \in W^{1,p}(\Omega)$ verifichi $|\{x \in \Omega \;:\; f(x) = 0\}| = 0$.

1. Provare che se f_k converge fortemente a f in $L^p(\Omega)$, allora $\chi_{\{f_k\geq 0\}}$ converge a $\chi_{\{f\geq 0\}}$ in $L^q(\Omega)$, per ogni $q \in [1,+\infty)$. È ancora vero in $L^\infty(\Omega)$? Provarlo o mostrare un controesempio.

2. Provare che se f_k converge fortemente a f in $W^{1,p}(\Omega)$, allora f_k^+ converge fortemente a f^+ in $W^{1,p}(\Omega)$.
Suggerimento: Dare per noto che $\nabla f^+ = \chi_{\{f\geq 0\}}\nabla f$.

3. Assumiamo solo che f_k converga ad f debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$, è vero che f_k^+ converge debolmente a f^+ in $W^{1,p}(\Omega)$? (giustificare la risposta)

Esercizio 127. Dato Ω aperto limitato in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$, sia $p \in (1,+\infty)$ e f_k una successione di funzioni in $L^{p'}(\Omega)$, con p' l'esponente coniugato di p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). Consideriamo il funzionale
$$F_k(u) := \int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega f_k u\,dx\,.$$

1. Provare che per ogni k esiste un unico punto minimo $u_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$ del problema
$$\min\left\{F_k(u) : u \in W_0^{1,p}(\Omega)\right\}$$
Suggerimento: Usare il metodo diretto provando che $F_k : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ è debolmente semicontinuo inferiormente e coercivo.

2. Scrivere l'equazione di Eulero Lagrange in forma debole soddisfatta dalla funzione u_k.

   Suggerimento: Per ogni $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ porre $g_k(t) = F_k(u_k + t\varphi)$ e calcolare $g'(0)$.

3. Mostrare che
$$\int_\Omega |\nabla u_k|^p dx \le \|f_k\|_{L^{p'}} \|u_k\|_{L^p}\,.$$

4. Provare che se f_k converge a zero fortemente in $L^{p'}(\Omega)$, allora u_k converge fortemente a zero in $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Esercizio 128. Sia $I = (0,1) \subset \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Si provi che $F(u) := \alpha(u(1) - u(0))$ appartiene al duale di $H^1(I)$ (con $u(0)$ e $u(1)$ si intendono rispettivamente il limite destro in 0 e il limite in 1 del rappresentante continuo di u).

   Suggerimento: Usare il teorema fondamentale del calcolo.

2. Si provi che esiste un'unica soluzione del problema di minimo
$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 (|u'|^2 + |u|^2)\,dx + \alpha(u(0) - u(1))\ :\ u \in H^1(I)\right\}$$

3. Si mostri che l'equazione di Eulero Lagrange in forma debole del problema di minimo è
$$\int_0^1 u'v'dx + \int_0^1 uv\,dx = \alpha v(1) - \alpha v(0) \qquad \forall v \in H^1(I)\,.$$
   Dedurne che $u \in H^2(I)$ e che u è la soluzione debole del problema
$$\begin{cases} -u'' + u = 0 & \text{in } I \\ u'(0) = u'(1) = \alpha\,. \end{cases}$$

Esercizio 129. Sia $\varphi \in C(\mathbb{R})$ una funzione periodica di periodo 1 a media nulla (ossia $\int_0^1 \varphi(y)\,dy = 0$) e sia
$$f_k(x) = k\varphi(kx)\,.$$

1. Mostrare che f_k converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a zero.

   Suggerimento: Integrare per parti e usare il Lemma di Riemann-Lebesgue (provando che la primitiva di una funzione periodica a media nulla è periodica).

2. Provare che in generale, se $\varphi \neq 0$, la successione f_k non converge debolmente in alcun $L^p_{loc}(\mathbb{R})$.

   Suggerimento: Dato un intervallo (a,b), calcolare la norma $L^p((a,b))$ di f_k.

Esercizio 130. Siano X e Y due spazi di Banach e sia $\{T_n\}$ una successione in $\mathcal{L}(X,Y)$. Assumiamo che per ogni $x \in X$, $T_n x$ converge per $n \to +\infty$ a un limite che denotiamo con Tx.

1. Provare che $T \in \mathcal{L}(X,Y)$;

2. Mostrare che se x_n converge a x in X allora $T_n x_n$ converge a Tx in Y.

Suggerimento: Usare il Teorema di Banach-Steinhaus.

Esercizio 131. Sia $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ e $1 \leq p < 2$. Definiamo $u_k : \Omega \to \mathbb{R}$ come

$$u_k(x) = \begin{cases} k^{\frac{2-p}{p}}(1-k|x|) & \text{se } |x| < \frac{1}{k} \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

1. Provare che u_k è limitata in $W^{1,p}(\Omega)$

2. Provare che u_k converge fortemente a zero in $L^p(\Omega)$

3. Mostrare che u_k non ammette una sottosuccessione convergente fortemente in $L^{p^*}(\Omega)$ con $p^* = \frac{2p}{2-p}$.

Esercizio 132. Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti mappe sono ben definite da $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$ e sono delle distribuzioni

$$\langle T_1, \varphi\rangle := \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k), \qquad \langle T_2, \varphi\rangle := \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^{(k)}(0),$$

$$\langle T_3, \varphi\rangle := \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^{(k)}(k), \qquad \langle T_4, \varphi\rangle := \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2\, dx,$$

dove $\varphi^{(k)}$ denota la derivata k-esima.
Suggerimento: Per T_2 testare con una funzione della forma $\varphi(x) = e^x g(x)$ con $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e $g = 1$ in un intorno di 0. Mostrare che $\varphi^{(k)}(0) = 1$ per ogni k.

Esercizio 133. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con $n \geq 1$, $p \in [1, +\infty]$ e p' il suo esponente coniugato (ossia tale che $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$).

1. Sia $f \in W^{1,p}(\Omega)$ e $g \in W^{1,p'}(\Omega)$. Provare che $fg \in W^{1,1}(\Omega)$ e

$$\partial_{x_i}(fg) = g\partial_{x_i} f + f\partial_{x_i} g\,. \tag{0.8}$$

   Suggerimento: Supporre che $p \neq +\infty$ e usare l'approssimazione C^∞ di f e la definizione di derivata debole.

2. Dedurre che se $f, g \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$, allora $fg \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ e vale (0.8).

Riferimenti bibliografici

[1] Brezis H.: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer.

[2] Evans C. e Gariepy R.: *Measure theory and fine properties of functions.* CRC Press 1992

[3] Fomin A.N. e Kolmogorov S.V.: *Elementi di teoria delle funzioni e analisi funzionale*

[4] Rudin W.: *Functional Analysis.* Second edition, McGraw-Hill International Editions, 1991.