Esercizi di istituzioni di analisi superiore*

Adriana Garroni

Aggiornato al: 16/12/2016

Attenzione: Gli esercizi con $*$ sono difficili o teorici (comunque “facoltativi”).

Esercizio 1. Provare che se $\psi \in C(\Omega)$ soddisfa $\int_\Omega \psi\varphi\, dx = 0$ per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, allora $\psi = 0$.

Esercizio 2. Mostrare che l'insieme di Cantor C non è numerabile e ha misura di Lebesgue nulla.

Suggerimento: Usare il fatto che $x \in C$ se e soltanto se $x = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{3^n}$ con $a_n \in \{0, 2\}$.

Esercizio 3. Mostrare che la successione F_n definita per ricorrenza da

$$F_0(x) = x \qquad F_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}F_n(3x) & \text{se } \ 0 \le x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{se } \ \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}F_n(3x-2) + \frac{1}{2} & \text{se } \ \frac{2}{3} \le x \le 1\,. \end{cases}$$

è di Cauchy rispetto alla norma del sup.

Suggerimento: Provare che $|F_n(x) - F_{n+1}(x)| \le \frac{1}{3\cdot 2^n}$.

Esercizio 4. Mostrare che la funzione $\frac{F(x)+x}{2}$ (dove F è la funzione di Cantor-Vitali) è un omomeomorfismo di $[0, 1]$ in $[0, 1]$.

Esercizio 5. Se f è una funzione monotona non decrescente su $[a, b]$, allora è misurabile e limitata (quindi sommabile).

Suggerimento: Notare che gli insiemi $\{x :\ f(x) < c\}$ sono degli intervalli.

Esercizio 6. Notare che le funzioni monotone su $[a, b]$ hanno solo discontinuità di salto (di prima specie). Inoltre mostrare che l'insieme delle discontinuità di una funzione monotona è al più numerabile.

Suggerimento: Stimare la cardinalità dell'insieme dei punti di discontinuità con salto maggiore o uguale a $1/n$, al variare di n e usare che la somma dei salti è controllata da $|f(b) - f(a)|$.

---

*Alcuni verranno svolti in aula. Da questa lista, con piccole modifiche verranno selezionati buona parte gli esercizi della prova scritta.

Esercizio 7. Fissiamo un insieme numerabile in $[a,b]$ e indicizziamo i punti di questo insieme

$$x_1, \ldots, x_n, \ldots$$

e fissiamo una successione di numeri positivi h_n che verifichino $\sum_{n=1}^{\infty} h_n < \infty$. Definiamo la funzione di salto

$$H(x) = \sum_{x < x_n} h_n \,. \tag{0.1}$$

Mostrare che H è monotona non decrescente e continua a sinistra. Come l'avrei dovuta definire in modo che venga continua a destra?

Esercizio 8. Mostrare che se f è una funzione continua a sinistra e monotona non decrescente, allora si può scrivere come

$$f(x) = H(x) + G(x)\,,$$

dove H è una funzione di salto continua a sinistra e G è continua.

Suggerimento: Si costruisca H come nell'Esercizio 7.

Esercizio 9. Sia F_n una successione di funzioni monotone definite in $[a,b]$ tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) = F(x) \qquad \forall\, x \in [a,b]\,,$$

ossia la cui serie è convergente in tutti i punti. Proviamo in vari passi che

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n'(x) = F'(x) \qquad \forall \text{ q.o. in } \; [a,b]\,.$$

1. Mostrare che, da qui in poi, non è restrittivo supporre che $F_n(x) \geq 0$ e $F_n(a) = 0$.

2. Mostrare che per ogni $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{N} F_n'(x) \leq F'(x) \qquad \forall \text{ q.o. in } \; [a,b]\,.$$

   Suggerimento: Scrivere la somma dei rapporti incrementali di F_n e stimarla con il rapporto incrementale di F usando la monotonia e la convergenza della serie delle F_n, quindi passare al limite nell'incremento.

3. Mostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n'(x) \leq F'(x) \qquad \forall \text{ q.o. in } \; [a,b]\,.$$

   In particolare la serie $\sum_n F_n'(x)$ converge q.o. in $[a,b]$.

4. Mostrare che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k \in \mathbb{N}$ tale che

$$0 \leq \sum_{n>n_k} F_n(x) < \frac{1}{2^k} \qquad \text{uniformemente in } x$$

Suggerimento: Usare la convergenza della serie in b e la monotonia.

5. Concludere che

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n'(x) = F'(x) \qquad \forall \text{ q.o. in } [a,b]\,.$$

Suggerimento: Applicare il punto 2 alla serie $\sum_k G_k(x)$ con $G_k(x) = F(x) - \sum_{n \leq n_k} F_n(x)$. La tesi seguie dalla convergenza della serie $\sum G_k'(x)$.

Esercizio 10. Usare l'Esercizio 9 per provare che data $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $h_n > 0$ tale che $\sum_n h_n < \infty$ la funzione di salto $H(x) = \sum_{x_n<x} h_n$ ha derivata q.o. nulla.

Esercizio 11. Provare che $\mathrm{Var}(f,[a,b]) = 0$ se e solo se f è costante e che $\mathrm{Var}(\alpha f,[a,b]) = |\alpha|\mathrm{Var}(f,[a,b])$.

Esercizio 12. Data $f(x) = \sin x$ in $[0,2\pi]$, trovare due funzioni monotone non decrescenti h e g tali che $f(x) = h(x) - g(x)$.

Esercizio 13. Sia f_n una successione di funzioni su $[a,b]$ che converge puntualmente a f in $[a,b]$. Provare che

$$\mathrm{Var}(f,[a,b]) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathrm{Var}(f_n,[a,b])\,.$$

Mostrare con un esempio che anche se f_n converge uniformemente può valere la disuguaglianza stretta.

Esercizio 14. Dati α e β positivi e $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^\beta}\right) & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0\,. \end{cases}$$

Provare che se $\alpha > \beta$, allora f è a variazione limitata in $[0,1]$, mostrando che f' è sommabile in $[0,1]$. Provare che se $\alpha \leq \beta$, allora f non è a variazione limitata in $[0,1]$.

Suggerimento: Usare per il primo punto che la funzione è $C^1((0,1)) \cap C([0,1])$ e quindi vale il teorema fondamentale del calcolo. Per il secondo punto trovare una successioni di partizioni per cui la variazione non viene limitata.

Esercizio 15. Provare che l'insieme delle funzioni assolutamente continue è uno spazio vettoriale.

Esercizio 16. Mostrare che se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione Lipschitz, allora anche $\mathrm{Var}(f,[a,x])$ è Lipschitz (con la stessa costante).

Esercizio 17. Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ assolutamente continue. Mostrare che fg è assolutamente continua.

Esercizio 18. Consideriamo le funzioni f e g definite in $[-1,1]$ come $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ e

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{\pi}{2x}) & \text{se } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$$

1. Mostrare che sia f che g sono assolutamente continue in $[-1,1]$.
2. Considerare la partizione $P_n = \{-1, 0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$ e valutare $V(f \circ g, P_n)$.
3. Provare che $f \circ g$ non è a variazione limitata e quindi non è assolutamente continua.

Esercizio 19. Sia f una funzione Lipschitz su $\mathbb{R}$ e g assolutamente continua in $[a,b]$. Mostrare che la composizione $f \circ g$ è assolutamente continua in $[a,b]$.

Esercizio 20. Sia f una funzione assolutamente continua su $\mathbb{R}$ e g assolutamente continua e strettamente monotona in $[a,b]$. Mostrare che la composizione $f \circ g$ è assolutamente continua in $[a,b]$.

Esercizio 21. Provare che se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è monotona e verifica

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)\,,$$

allora è assolutamente continua.

Esercizio 22. Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni assolutamente continue. Provare che vale la formula di integrazione per parti

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx\,,$$

dove f' e g' denotano rispettivamente le derivate q.o. di f e g.

Esercizio 23. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $u \in L^p(\Omega)$. Denotiamo con $C_c(\Omega)$ l'insieme delle funzioni continue a supporto compatto in Ω. Assumiamo che

$$\int_\Omega u\varphi\,dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c(\Omega)\,. \tag{0.2}$$

1. Nel caso $p = 2$ provare che $u = 0$ q.o. in Ω.

2. Provare lo stesso risultato assumendo che $p \in (1, +\infty)$.

3. Analizzare il caso $p = +\infty$.

Nota: Usare la densità delle funzioni continue in L^p.

Esercizio 24. Se $\{x_h\}$ è un insieme numerabile di punti in $\mathbb{R}^n$ e $c_h \in \mathbb{R}$ tale che $\sum_h |c_h| < \infty$ e $\mu = \sum_h c_h \delta_{x_h}$, mostrare che $|\mu| = \sum_h |c_h| \delta_{x_h}$.

Un atomo di una misura è un punto x per cui $\mu(\{x\}) \neq 0$. Provare che se μ è una misura positiva σ-finita allora ha al più una quantità numerabile di atomi.

Esercizio 25. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia μ una misura di Radon su Ω. Assumiamo che

$$\int_\Omega \varphi \, d\mu = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c(\Omega) . \tag{0.3}$$

Se μ è una misura positiva provare che $\mu = 0$.

Suggerimento: Basta provare che $\mu(K) = 0$ per ogni compatto K e quindi concludere usando la regolarità.

Esercizio 26. Data la funzione di Haeviside $H(x) = \chi_{[0,+\infty)}$ e la funzione $g_a(x) = \frac{1}{2a}\chi_{[-a,a]}$. Determinare $H * g_a$. Calcolare anche $f * g_a$ con $f(x) = |x|$ e stimare la norma L^∞ di $f - f * g_a$ al variare di $a > 0$.

Esercizio 27. Provare che le affermazioni degli Esercizi 23 (per $p \geq 1$) e 25 sono ancora vere se le (0.2) e (0.3) sono vere solo per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Esercizio 28. Dimostrare che la delta di Dirac δ_0 non può essere identificata con una funzione $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, ossia mostrare che non esiste $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) \, dx = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) .$$

Esercizio 29. Provare che la distribuzione *dipolo* su $\mathbb{R}$, δ', definita come

$$\langle \delta', \varphi \rangle := \varphi'(0)$$

non può essere rappresentata da una misura (ossia non può essere scritta nella forma data da

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu$$

per alcuna misura μ).

Suggerimento: Provarlo per assurdo testando il dipolo con la successione

$$\psi_k(x) = (\sin(kx))\varphi(x) .$$

Esercizio 30. Mostrare che se T è una distribuzione allora

$$\partial_{x_i x_k} T = \partial_{x_k x_i} T \qquad \forall\, i, k \in \{1, ..., n\}$$

Esercizio 31. Provare che se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione Lipschitz, allora la sua derivata nel senso delle distribuzioni coincide con la derivata q.o..

Suggerimento: Mostrare che $\int_a^b D_h f \varphi \, dx = -\int_a^b f D_{-h} \varphi \, dx$ e quindi passare al limite giustificando il passaggio.

Esercizio 32. Data una distribuzione T scrivere esplicitamente attraverso la sua azione su elementi di $\mathcal{D}$ o $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ (ossia n-ple di funzioni in $\mathcal{D}$) le seguente operazioni differenziali: ∇T (gradiente distribuzionale); div$\mathbf{T}$ (divergenza distribuzionale per distribuzioni vettoriali, $\mathbf{T} = (T_1, T_2, ..., T_n)$, con $T_i \in \mathcal{D}$); ΔT (Laplaciano distribuzionale), se $n = 3$ rot$T$ (rotore distribuzionale).

Esercizio 33. Verificare che la funzione $g(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}$ è soluzione nel senso delle distribuzioni di $-\Delta g = \delta_0$.

Suggerimento: Si prenda φ con supporto in B_R e si usi che

$$\int_{B_R} \frac{1}{|x|} \Delta \varphi(x) \, dx = \lim_{r \to 0} \int_{B_R \setminus B_r} \frac{1}{|x|} \Delta \varphi(x) \, dx \,,$$

più qualche integrazione per parti e qualche stima.

Esercizio 34. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{D}_K$ denotiamo con

$$\|f\|_{m,K} = \sum_{\alpha\,,\ |\alpha| \le m} \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)|$$

(con $D^0 f$ intendiamo f).

1. Mostrare che la che $\| \cdot \|_{m,K}$ è una norma in $\mathcal{D}_K$;
2. Provare che
$$d_K(\varphi, \psi) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|\varphi - \psi\|_{m,K}}{1 + \|\varphi - \psi\|_{m,K}}$$
definisce una distanza, e quindi una topologia metrizzabile $\mathcal{T}_K$, in $\mathcal{D}_K$;

Esercizio 35. Dato un compatto K e sia $L : \mathcal{D}_K \to \mathbb{R}$ è un funzionale lineare, allora L è continuo su $\mathcal{D}_K$ se e soltanto se esistono $C > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tali che

$$|\langle L, \varphi \rangle| \le C \|\varphi\|_{N,K} \qquad \varphi \in \mathcal{D}_K \,.$$

Suggerimento: Un verso è facile. Provare l'implicazione $\Longrightarrow$ per assurdo, usando che $\|\varphi\|_{m,K} \le \|\varphi\|_{N,K}$ per ogni $m \le N$.

Esercizio 36. Mostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti

i) $T \in \mathcal{D}'$;

ii) Per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ esistono $C > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tali che

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{N,K} \qquad \varphi \in \mathcal{D}_K\,.$$

Suggerimento: Usare la caratterizzazione di $\mathcal{D}'_K$ data dall'Esercizio 35.

Esercizio 37. Provare che per ogni $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ esiste una soluzione (unica a meno di costanti) dell'equazione nel senso delle distribuzioni

$$T' = G\,.$$

In questo senso ogni distribuzione ammette una primitiva in $D'(\mathbb{R})$.
Suggerimento: Usare la decomposizione di $\mathcal{D}$ in....

Esercizio 38. Provare che se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e la sua derivata nel senso delle distribuzioni $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ allora f è derivabile q.o. e la sua derivata q.o. coincide con f'.

Esercizio 39. Data una funzione discontinua $a(x) = 1 + \chi_{(\frac{1}{2},1)}(x)$ definita nell'intevallo $(0,1)$. Determinare la soluzione continua in $W^{1,1}$ dell'equazione $(au')' = 0$ con la condizione $u(0) = 0$ e $u(1) = 3$ (le derivate vanno intese nel senso delle distribuzioni)[1].

Esercizio 40. Si consideri la funzione di Cantor Vitali F in $[0,1]$. Definiamo *supporto* di una misura positiva di Borel su Ω, μ, l'insieme

$$\operatorname{supp}\mu\, = \{x \in \Omega \,:\, \forall N \text{ intorno di } x \implies \mu(N) > 0\}\,.$$

Provare che se $\mu = T'_F$ (derivata nel senso delle distribuzioni della funzione di Cantor Vitali) allora $m(\operatorname{supp}\mu) = 0$, nonostante che $|\mu|(0,1) = 1$.

Esercizio 41. Sia $B_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ la palla unitaria in $\mathbb{R}^2$. Determinare le derivate prime distribuzionali della funzione $f(x) = \chi_{B_1}(x)$. Possiamo dire che sono delle misure? Come si caratterizzano?

Esercizio 42. Se una successione f_k di funzioni $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, converge a f in $L^1_{loc}(\Omega)$, ossia

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega'} |f_k - f|\, dx = 0 \qquad \forall\ \Omega' \subset\subset \Omega\,,$$

allora

$$\int_\Omega f_k \varphi\, dx \to \int_\Omega f \varphi\, dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ossia converge in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

[1] $W^{1,1}$ denota lo spazio delle funzioni in L^1 con derivata distribuzionale in L^1.

Esercizio 43. Mostrare che la successione

$$f_k(x) = k\sin(kx)$$

converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a zero, questo si vede facilmente testando con una funzione in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ e integrando per parti, mentre non converge debolmente in alcun $L^p_{loc}(\mathbb{R})$, ossia per ogni $p \in [1, +\infty)$ esiste $g \in L^{p'}((a,b))$ tali che

$$\int_a^b f_k(x)g(x)\,dx$$

non converge.

Esercizio 44. Data $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$ è 1-periodica e definiamo $f_k(x) := f(kx)$. Provare che f_k converge forte in qualche L^p_{loc} se e soltanto se f è costante.

Suggerimento: Mostrare che si può supporre che f sia a media nulla e che f_n converga a zero forte in $L^p((0,1))$.

Esercizio 45. Data $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$ $\mathbb{Z}^n$-periodica (ossia tale che $f(x+z) = f(x)$ per ogni $z \in \mathbb{Z}^n$), Definiamo $f_k(x) := f(kx)$.

Provare che f_k converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ alla sua media, ossia alla distribuzione costante uguale a $\int_{(0,1)^n} f(x)\,dx$.

Esercizio 46. Consideriamo la funzione in $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{se } |x| < \frac{5}{4} \\ |x| - \frac{3}{2} & \text{se } \frac{5}{4} \le |x| < \frac{3}{2} \\ 0 & \text{se } |x| \ge \frac{3}{2} \end{cases}$$

e definiamo $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x-2}{\varepsilon}\right)$. Determinare il limite in distribuzioni della successione f_ε.

Esercizio 47. Provare che se $\eta \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\,dx = 1$ allora

$$\eta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ a δ_0.

Esercizio 48. Consideriamo le distribuzioni in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$T_n = n(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n})\,.$$

Si può determinare il limite nel senso delle distribuzioni di T_n? In caso affermativo, determinarlo.

Esercizio 49. Provare che

$$\langle T, \varphi\rangle := \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx \qquad \varphi \in \mathcal{D}$$

è una distribuzione.

Suggerimento: Usare il teorema fondamentale del calcolo per rappresentare $\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}$ e ricordare che φ ha supporto compatto in $\mathbb{R}$.

Esercizio 50. Sia ρ_ε una successione delta approssimante. Determinare il limite in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ della successione

$$\frac{\rho_\varepsilon(x) - \rho_\varepsilon(x-\varepsilon)}{\varepsilon}\,.$$

Esercizio 51. Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti mappe da $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$ sono delle distribuzioni

$$\langle T_1, \varphi\rangle := \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k), \qquad \langle T_2, \varphi\rangle := \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^{(k)}(1),$$

$$\langle T_3, \varphi\rangle := \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^{(k)}(k), \qquad \langle T_4, \varphi\rangle := \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(x)\,dx.$$

Esercizio 52. Sia u_k una successione delta approssimante (ossia della forma $u_k(x) = k^n u(kx)$, con u a supporto compatto, e convergente alla delta in distribuzioni). Provare che la successione u_k^2 non può convergere in distribuzioni.

Esercizio 53. Se consideriamo la funzione $\psi(x) = x^3$, questa è biunivoca da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, C^∞ ma $\psi^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$ non è C^∞. Data $u_k(x) = k\chi_{[0,1/k]}(x)$ (che è una delta approssimante), provare che la successione $u_k(x^3)$ non converge nel senso delle distribuzioni.

Esercizio 54. Determinare la distribuzione $\delta \circ \psi$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, per le seguenti scelte di ψ:

1. $\psi(x) = ax$ con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$
2. $\psi(x) = Ax$ con $A \in \mathbb{M}^{n\times n}$, $\det A \neq 0$
3. $\psi(x) = Ax + b$ con $A \in \mathbb{M}^{n\times n}$, $\det A \neq 0$, e $b \in \mathbb{R}^n$

Esercizio 55. Mostrare che data $T \in \mathcal{D}'$, la distribuzione

$$\frac{T - \tau_{he_i} T}{h}$$

converge in $\mathcal{D}'$ a $\partial_{x_i} T$.

Esercizio 56. Provare che se T_n converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ a T allora per ogni multi-indice α, si ha che $D^\alpha T_n$ converge a $D^\alpha T$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Esercizio 57. Data la successione di distribuzioni in $\mathbb{R}$

$$T_n = n^2(\delta_{1/n} - 2\delta_0 + \delta_{-1/n})$$

dove δ_{x_0} è la delta Dirac in x_0. Verificare se T_n converge nel senso delle distribuzioni e eventualmente calcolarne il limite descrivendo la sua azione su $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Suggerimento: Usare lo sviluppo di Taylor.

Esercizio 58. Provare che se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ allora

1. $\tau_x(T * \phi) = (\tau_x T) * \phi = T * \tau_x \phi$;
2. Per ogni multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$
$$D^\alpha(T * \phi) = (D^\alpha T) * \phi = T * D^\alpha \phi\,.$$
In particolare $T * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Suggerimento: fare il limite del rapporto incrementale.
3. Mostrare che $T*\phi \equiv 0$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ se e soltanto se $T*\phi(x) = 0$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ per qualche $x \in \mathbb{R}^n$.
4. Se $T * \phi \equiv 0$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ allora $T = 0$;
5. Se T ha supporto compatto, allora $T * \phi$ con $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è a supporto compatto.
Nota: Basta dimostrare che il supporto di $T * \phi$ è limitato.

Esercizio 59. *Date $\psi, \varphi \in \mathcal{D}$ e $T \in \mathcal{D}'$ provare

1. $((T * \psi) * \varphi)(0) = (T * (\psi * \varphi))(0)$.
Suggerimento: Usare l'approssimazione dell'integrale con le somme di Riemann per approssimare $\psi*\varphi$ e usare la linearità delle distribuzioni.
Attenzione: si usa che $T * \varphi(0) = \langle T, \check{\varphi} \rangle$.
2. $((T * \psi) * \varphi)(x) = (T * (\psi * \varphi))(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$
3. Sia φ_ε usa successione convergente a δ_0 in distribuzioni (ossia una δ approssimante), provare che
$$\langle T, \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \langle T * \varphi_\varepsilon, \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} ((T * \varphi_\varepsilon) * \check{\psi})(0)$$
Nota: Usare il punto 1.
4. Mostrare che se $\nabla T = 0$ allora esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che
$$\langle T, \phi \rangle = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} \phi \, dx \qquad \forall\ \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\,.$$
Suggerimento: Usare che se $\nabla T = 0$ allora $\nabla(T * \varphi_\varepsilon) = 0$ e il passo precedente.

Esercizio 60. Provare che $(H * u)' = u$ per ogni $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (H è la funzione di Heaviside).

Esercizio 61. Calcolare la derivata nel senso delle distribuzioni delle seguenti distribuzioni

1. $T = 3H$, dove H è la funzione Heaviside, ossia $H(x) = \chi_{[0,+\infty)}$.
2. $T = \delta_0 + 3\delta_1$
3. $T = 2\delta_0'$.

Esercizio 62. Calcolare il gradiente delle seguenti distribuzioni in $\mathbb{R}^2$

1. $T = \chi_{\{x_1>0\}}$
2. $\langle T, \varphi\rangle = \int_0^1 \varphi(x_1, 0)\, dx_1$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

Esercizio 63. Data $T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$ e $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\operatorname{supp} u \subseteq [0, 1]$.
Determinare $v = T * u$ e provare che v è una funzione periodica.

Esercizio 64. Data la funzione $u(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}$ mostrare che $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e che $u' = \mathrm{vp}\frac{1}{x}$.
Suggerimento: usare che $\int_{\mathbb{R}} \ln|x|\varphi'(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \ln|x|\varphi'(x)\, dx$.

Esercizio 65. Mostrare con un esempio che $C^1([-1, 1])$ con la norma $\sup |f|+ \sup |f'|$ non è uno spazio di Hilbert (la norma non verifica l'identità del parallelogramma). Mostrare che la successione $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ appartiene a $C^1([-1, 1])$ ed è di Cauchy rispetto alla norma

$$\|f\|_{L^2} + \|f'\|_{L^2} ,$$

ma non ha limite in $C^1([-1, 1])$.

Esercizio 66. Sia $f_n \in L^1_{loc}(\Omega)$ e α derivabili debolmente con α un multiindice in $\mathbb{N}^n$. Supponiamo che $f_n \to f$ in $L^1_{loc}(\Omega)$ e $g_n \to g$ in $L^1_{loc}(\Omega)$, allora f è derivabile debolmente all'ordine α e $D^\alpha f = g$ q.o. in Ω.

Esercizio 67. Supponiamo che $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ammetta derivata seconda debole nel senso che esista $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}} f\varphi''\, dx = \int_{\mathbb{R}} g\varphi\, dx \qquad \forall\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) .$$

Provare che f ammette derivata prima debole.

Esercizio 68. Sia $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$. Consideriamo $f : \Omega \to \mathbb{R}$ data da $f(x) := |x|^\alpha$.

1. Provare che f è derivabile in senso debole (ossia il suo gradiente nel senso delle distribuzioni appartiene a $(L^1_{loc}(\Omega))^n$) se e soltanto se $\alpha > -n + 1$.

   Suggerimento: Considerare prima $\int_{B(0,1)\setminus B(0,\varepsilon)} f\partial_{x_i}\varphi\, dx$ e poi passare al limite per $\varepsilon \to 0$.

2. Dato $p \in [1, +\infty)$, determinare α in modo che f appartenga a $W^{1,p}(\Omega)$.

Esercizio 69. Mostrare che la norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ è equivalente alla norma

$$\|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{n} \|\partial_{x_i} u\|_{L^p} \,.$$

Suggerimento: Per mostrare l'equivalenza bisogna mostrare due disuguaglianze. Una si fa applicando la disuguaglianza di Hölder, l'altra usando la subadditività[2] di $\varphi(t) = t^{\frac{1}{p}}$

Esercizio 70. Sia Q il quadrato aperto $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x_1| < 1\,,\ |x_2| < 1\}$. Definiamo

$$u(x) = \begin{cases} 1 - x_1 & \text{se } x_1 > 0\,,\ |x_2| < x_1 \\ 1 + x_1 & \text{se } x_1 < 0\,,\ |x_2| < -x_1 \\ 1 - x_2 & \text{se } x_2 > 0\,,\ |x_1| < x_2 \\ 1 + x_2 & \text{se } x_2 < 0\,,\ |x_1| < -x_2\,. \end{cases}$$

Stabilire se u è in $W^{1,\infty}(Q)$.

Suggerimento: Determinare le derivate deboli di u.

Esercizio 71. Sia

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 2 \end{cases} \qquad \zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\,. \tag{0.4}$$

Come si prova che esiste una funzione fatta così?

Definiamo la funzione $\zeta_k(x) = \zeta\left(\frac{x}{k}\right)$ e $g_k = \zeta_k g$ con $g \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

1. Provare che $g_k \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ e che $\operatorname{supp} g_k$ è compatto.

2. Provare che g_k converge a g in $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

3. Provare che $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso in $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

Esercizio 72. Data $u \in W^{1,p}((0, +\infty))$ estendiamo la funzione per riflessione[3]

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \geq 0 \\ u(-x) & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

Provare che $u^* \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ e $\|u^*\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R})} = 2\|u\|^p_{W^{1,p}((0,+\infty))}$.

Suggerimento: Usare il teorema fondamentale del calcolo, provando che

[2] Mostrare che una funzione $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, concava e che verifica $\varphi(0) = 0$ soddisfa

$$\varphi(a + b) \leq \varphi(a) + \varphi(b) \qquad \forall\ a\,,\ b\ \in [0, +\infty)\,,$$

ossia φ è subadditiva.

[3] Notare che u è assolutamente continua e si può estendere in 0 per continuità

$$v(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{se } x \geq 0 \\ -u'(-x) & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

è la derivata debole di u^*.

Nel caso $u \in W^{2,p}((0,+\infty))$ come si fa a estenderla a una funzione in $W^{2,p}(\mathbb{R})$ controllando la sua norma?

Esercizio 73. * Sia $Q = (-1,1)^n \subset \mathbb{R}^n$ e siano $Q^+ = \{x \in Q : \; x_n > 0\}$ e $Q^- = \{x \in Q : \; x_n < 0\}$. Data $u \in W^{1,p}(Q^+)$ definiamo

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in Q^+ \\ u(x_1, ..., x_{n-1}, -x_n) & \text{se } x \in Q^-\,. \end{cases}$$

1. Mostrare che
$$\int_{Q^+} u(x)\partial_{x_i}\psi(x)\,dx = -\int_{Q^+} \partial_{x_i}u(x)\psi(x)\,dx$$
per ogni $\psi \in C^1(\overline{Q}^+)$ e $\psi = 0$ su ∂Q^+.

   Suggerimento: Usare un argomento di densità.

2. Provare che se $\zeta \in C_c^\infty(Q)$ allora per ogni $i \neq n$
$$\int_{Q^+} u(x)\partial_{x_i}\zeta(x)\,dx = -\int_{Q^+} \partial_{x_i}u(x)\zeta(x)\,dx$$
   Suggerimento: Scegliere nella definizione di derivata debole $\varphi(x) = \eta_k(x_n)\zeta(x)$, con $\eta \in C_c^\infty((0,1))$ e $\eta_k \nearrow 1$ per $k \to +\infty$ in $(0,1)$ e passare al limite per $k \to +\infty$.

3. Mostrare che esiste la derivata debole rispetto a x_n ed è data da
$$\partial_{x_n}\bar{u} = \begin{cases} \partial_{x_n}u(x) & \text{se } x \in Q^+ \\ -\partial_{x_n}u(x_1, ..., x_{n-1}, -x_n) & \text{se } x \in Q^-\,. \end{cases}$$
   Suggerimento: Nella definizione di derivata debole cambiare variabili e usare che la funzione $\psi(x', x_n) = \varphi(x', x_n) - \varphi(x', -x_n)$, dove x' denota le prime $n-1$ variabili, verifica le ipotesi del punto 1.

4. Mostrare che esiste la derivata debole rispetto a x_i con $i \neq n$ ed è data da
$$\partial_{x_i}\bar{u} = \begin{cases} \partial_{x_i}u(x) & \text{se } x \in Q^+ \\ \partial_{x_i}u(x_1, ..., x_{n-1}, -x_n) & \text{se } x \in Q^-\,. \end{cases}$$
   Suggerimento: Integrale per parti, cambiare variabili e usare che la funzione $\zeta(x', x_n) = \varphi(x', x_n) + \varphi(x', -x_n)$, dove x' denota le prime $n-1$ variabili, verifica le ipotesi del punto 2.

5. Dedurre che $\bar{u}$ è derivabile in senso debole e $\bar{u} \in W^{1,p}(Q)$.

Esercizio 74 (Regola del prodotto)**.** Sia $p \in [1, +\infty]$ e p' il suo esponente coniugato (ossia tale che $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$). Sia $f \in W^{1,p}(\Omega)$ e $g \in W^{1,p'}(\Omega)$. Provare che $fg \in W^{1,1}(\Omega)$ e

$$\partial_{x_i}(fg) = g\partial_{x_i} f + f\partial_{x_i} g\,. \tag{0.5}$$

Dedurne che se Ω è limitato e $f, g \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, allora $fg \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e vale (0.5).

Suggerimento: Supporre che $p \neq +\infty$ e usare l'approssimazione C^∞ di f e la definizione di derivata debole.

Esercizio 75. Sia $G \in C^1(\mathbb{R})$ con $G(0) = 0$ e $|G'(t)| \leq M$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Dato $f \in W^{1,p}(\Omega)$, provare che $G \circ f \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$\partial_{x_i}(G \circ f) = (G' \circ f)\partial_{x_i} f\,. \tag{0.6}$$

Suggerimento: Mostrare che $G \circ f \in L^p(\Omega)$ e $(G' \circ f)\partial_{x_i} f \in L^p(\Omega)$. Infine provare (0.6) per approssimazione.

Esercizio 76. Sia $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Provare che le funzioni

$$f^+ := \max\{f, 0\} \quad f^- := \max\{-f, 0\} \quad |f| = f^+ - f^-$$

sono in $W^{1,p}(\Omega)$, cone derivate deboli date da

$$\partial_{x_i} f^+ = \chi_{E^+}\partial_{x_i} f \quad \partial_{x_i} f^- = -\chi_{E^-}\partial_{x_i} f \quad \partial_{x_i}|f| = \chi_{E^+}\partial_{x_i} f - \chi_{E^-}\partial_{x_i} f\,,$$

con

$$E^+ := \{x \in \Omega \,:\, f(x) > 0\} \qquad E^- := \{x \in \Omega \,:\, f(x) < 0\}\,.$$

Dedurre che per ogni $M > 0$ la funzione *troncata*

$$T_M f = f \wedge M \vee M = \max\{\min\{f, M\}, -M\}$$

appartiene a $W^{1,p}(\Omega)$.

Suggerimento: È sufficiente fare il caso f^+. Data la funzione

$$g_k(t) = \frac{k}{2}\int_{t-\frac{1}{k}}^{t+\frac{1}{k}} s^+ ds,$$

provare che $g_k \in C^1(\mathbb{R})$, che $|g_k(t) - t^+| \leq \frac{1}{k}$, $|g_k'(t)| \leq 1$, $g_k' \to 0$ in $(-\infty, 0)$ e $g_k' \to 1$ in $(0, +\infty)$. Definire quindi $\tilde{g}_k(t) = g_k(t - \frac{1}{k})$. Osservare che $\tilde{g}_k'(0) = 0$, $\tilde{g}_k' \to 0$ in $(-\infty, 0]$ e $\tilde{g}_k' \to 1$ in $(0, +\infty)$. Quindi usare la regola della catena e passare al limite (giustificando i passaggi) per $k \to \infty$.

Esercizio 77. Sia $p \in [1, +\infty]$ e $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Sia $E \subseteq \Omega$ misurabile e $a \in \mathbb{R}$. Provare che

$$f = a \quad \text{in } E \qquad \Longrightarrow \qquad \partial_{x_i} f = 0 \quad \forall\, i\,.$$

Suggerimento: Usare l'Esercizio 76 e il fatto che $f = (f-a)^+ - (f-a)^- + a$.

Esempio 78. *Fissiamo* $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ 0 < |x| < 1\,,\ 0 < y < 1\}$ *e consideriamo la funzione*

$$u(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

Evidentemente questa funzione è in $W^{1,p}(\Omega)$ *ma non può essere estesa a una funzione in* $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$. *Provare che non è possibile approssimare* u *in* $W^{1,p}(\Omega)$ *con una successione in* $C^\infty(\mathbb{R}^2) \cap W^{1,p}(\Omega)$.

Esercizio 79. Consideriamo la funzione

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| \le 1 \\ t & \text{se } |t| \ge 2\,, \end{cases}$$

con $G \in C^1(\mathbb{R})$, $|G(t)| \le |t|$ e $|G'(t)| \le M$ (è facile vedere che questa funzione esiste, basta mollificare $g(x) = x\chi_{\mathbb{R}\setminus(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})}$). Data $f \in W^{1,p}((a,b))$, con f continua in (a,b) e estesa per continuità in $[a,b]$, supponiamo che $f(a) = f(b) = 0$. Poniamo

$$f_n(x) = \frac{1}{n} G(nf(x))\,.$$

1. Provare che f_n è a supporto compatto in (a,b).

   Suggerimento: Mostrare che $\operatorname{supp} f_n \subseteq \{x \in (a,b) \ :\ |f(x)| \ge \frac{1}{n}\}$.

2. Provare che $f_n \in W^{1,p}_0((a,b))$ e che converge a f in $W^{1,p}$.

3. Dedurre che $f \in W^{1,p}_0((a,b))$.

Esercizio 80. Mostrare che se $f \in W^{1,p}_0(\Omega)$ allora la funzione

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{altrimenti in } \mathbb{R}^n\,, \end{cases}$$

appartiene a $W^{1,p}_0(\mathbb{R}^n)$.

Suggerimento: Basta usare la definizione di $W^{1,p}_0(\Omega)$.

Esercizio 81. Provare che esiste un'unica soluzione debole $u \in H^1_0(\Omega)$ del problema

$$\int_\Omega a(x)\nabla u(x)\nabla v(x)\,dx + \int_\Omega c(x)u(x)v(x)\,dx = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx \quad \forall\, v \in H^1_0(\Omega)\,,$$

con $a, c \in L^\infty(\Omega)$ e $c(x) \geq c > 0$ e $a(x) \geq \alpha > 0$ q.o. in Ω.

Suggerimento: Provare che $\int_\Omega a\nabla u\nabla v\,dx + \int_\Omega cuv\,dx$ definisce un prodotto scalare equivalente a $(\cdot,\cdot)_{H^1}$ e usare il Teorema di Riezs.

Esercizio 82. Data $f \in L^2(a,b)$.

1. Provare che esiste un'unica funzione $u \in H^1(a,b)$ che verifica

$$\int_a^b u'v'\,dx + \int_a^b uv\,dx = \int_a^b fv\,dx \qquad \forall v \in H^1(a,b)\,.$$

2. Mostrare che u è anche l'unico punto di minimo di

$$\min\{\frac{1}{2}\int_a^b |u'|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b |u|^2\,dx - \int_a^b fu \;:\; u \in H^1(a,b)\}\,.$$

3. Provare che $u \in H^2$.

4. Integrando per parti mostrare che u verifica

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{q.o. in } (a,b) \\ u'(a) = u'(b) = 0 \end{cases}$$

(le condizioni al bordo $u'(a) = u'(b) = 0$ si chiamano *condizioni di Neumann* e si dice che sono le condizioni al bordo *naturali*, nel senso che si ottengono come conseguenza dell'equazione in forma debole senza imporre ulteriori vincoli).

Esercizio 83. Dato un insieme aperto $E \subset\subset \Omega$ con Ω aperto limitato in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$, definiamo

$$\mathrm{Cap}(E,\Omega) := \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx : u \in H^1_0(\Omega)\,,\ u \geq \chi_E \text{ q.o. in } \Omega\right\}.$$

Questa si chiama la *capacità (armonica) di E in Ω*.

a) Provare che l'insieme $\{u \in H^1_0(\Omega)\,,\ u \geq \chi_E \text{ q.o. in } \Omega\}$ è non vuoto.

b) Mostrare che $\mathrm{Cap}(E,\Omega) < +\infty$. Dedurne che il problema che definisce $\mathrm{Cap}(E,\Omega)$ ammette minimo, u_E (potenziale capacitario).

   Suggerimento: Usare il teorema della proiezione.

c) Provare che il minimo è unico.

d) Provare che $u_E = 1$ q.o. in E.

   Suggerimento: Usare che $u_E \wedge 1$ è una funzione test ammissibile

e) Provare che se $F \subset E$ con F aperto, allora $\mathrm{Cap}(F, \Omega) \leq \mathrm{Cap}(E, \Omega)$.

f) (Facoltativo) Per $n = 2$ calcolare $\mathrm{Cap}(B_r, B_R)$ (dove $0 < r < R$ e B_r denota la palla di raggio r e centro 0).

   Suggerimento: Usare che u_{B_r} minimizza

$$\min \left\{ \int_{B_R \setminus B_r} |\nabla u|^2 dx : u \in H_0^1(\Omega) \, , \; u = 1 \text{ q.o. in } B_r \right\}$$

   è a simmetria radiale e calcolarla usando l'equazione di Eulero.

Esercizio 84. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale ordinaria $-u'' = \lambda u$, con $u : (0, 1) \to \mathbb{R}$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Quindi provare che il problema ai limiti

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u & \text{in } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{0.7}$$

   per $\lambda < 0$ ammette soluzione unica $u = 0$.

2. Determinare per quali $\lambda \geq 0$ (0.7) ammette soluzione non nulla.

Esercizio 85. Dato K convesso chiuso in $\mathbb{R}^n$ e dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e sia $\| \cdot \|$ una norma in $\mathbb{R}^n$. Consideriamo il seguente problema

$$\inf_{x \in K} \|x - x_0\| \, .$$

1. Data una successione minimizzante (ossia tale che $\|x_0 - x_n\| \to \inf_{x \in K} \|x - x_0\|$ provare che ammette una sottosuccessione convergente a un elemento $\bar{x}$.

2. Provare che $\bar{x}$ è soluzione del problema di minimo e quindi $\|x_0 - \bar{x}\| = \mathrm{dist}\,(x_0, K)$.

3. Provare che se $\| \cdot \|$ è la norma euclidea la soluzione del problema di minimo (ossia la proiezione) è unica.

4. Mostrare un esempio di norma e di K per cui la proiezione non è unica.

Esercizio 86. Sia $K = \{f \in L^1((0, 1)) \; : \; \int_0^1 f(x)\, dx = 1\}$. Evidentemente $0 \notin K$. Mostrare che K è convesso e che esistono infiniti $g \in K$ di norma minima, ossia che verificano $\|g\|_{L^1} = \min_{f \in K} \|f\|_{L^1} = \mathrm{dist}\,(0, K)$.

Esercizio 87. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto limitato. Dati $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e $f \in L^2(\Omega)$, considerare il seguente problema di minimo

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega a_1|\partial_{x_1}u|^2 + a_2|\partial_{x_2}u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega a_0|u|^2\, dx - \int_\Omega fu\, dx : u \in H_0^1(\Omega)\right\}$$

1. Mostrare che se $a_1, a_2 > 0$ e $a_0 \geq 0$ allora il problema ammette un solo minimo.

2. Scrivere l'equazione di Eulero Lagrange corrispondente.

3. Mostrare che se $a_1, a_2 > 0$ e $a_0 < 0$, ma con $|a_0|$ sufficientemente piccolo, esiste un unico minimo.

4. *Mostrare che in generale se $a_2 < 0$ il problema non ammette minimo.

   Suggerimento: Testare l'energia con una funzione della forma $u_n(x_1, x_2) = \psi(x_1)\phi(nx_2)$ con ψ e ϕ a supporto compatto e C^1.

Esercizio 88. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia A una matrice $n \times n$ definita positiva.

1. Provare che esistono $\alpha, \beta > 0$ tali che

$$\alpha|\xi|^2 \leq A\xi \cdot \xi \leq \beta|\xi|^2 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n\,.$$

2. Dato $f \in (L^2(\Omega))^n$, considerare il seguente problema di Dirichlet (formale)

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(A\nabla u) = \mathrm{div}\,(f) & \text{in } \Omega \\ u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{0.8}$$

   Scrivere la formulazione debole del problema (0.8) e provare che ammette un'unica soluzione.

3. Mostrare che se A è simmetrica (0.8) è l'equazione di Eulero Lagrange di un problema di minimo. Scrivere il problema di minimo.

Esercizio 89. Sia $I = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Dato $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f \in L^2(I)$.

a) Si provi che esiste un'unica soluzione $u \in H^1(I)$, tale che $u(0) = \alpha$ e $u(1) = \beta$ (intendendo con u l'estensione continua a $[0,1]$ del rappresentante continuo di u) del problema

$$\int_0^1 u'v'dx + \int_0^1 uv\, dx = \int_0^1 fv\, dx \qquad \forall v \in H_0^1(I)\,.$$

e che è il punto di minimo di

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 (|u'|^2 + |u|^2)dx - \int_0^1 fu\, dx \; : \; u \in H^1(I)\,,\ \text{con } u(0) = \alpha \text{ e } u(1) = \beta\right\} \tag{0.9}$$

Suggerimento: Considerare la funzione $w = u - u_0$ con $u_0(x) = (\beta - \alpha)x + \alpha$ e determinare il problema di cui è soluzione w.

b) Dedurre che $u \in H^2$ e che u è la soluzione debole del problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{in } I \\ u(0) = \alpha \quad u(1) = \beta \,. \end{cases}$$

Esercizio 90. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato e $f \in L^2(\Omega)$. Fissato $i \in \{1, \dots, n\}$ mostrare che esiste un'unica funzione $w_i \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega \nabla w_i \nabla v \, dx = \int_\Omega f \partial_{x_i} v \, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \,. \tag{0.10}$$

Suggerimento: Mostrare che $F(v) = \int_\Omega f \partial_{x_i} v \, dx$ è un elemento del duale di $H_0^1(\Omega)$.

Esercizio 91. Mostrare che $C^m(K)$ delle funzioni m-differenziabili sul compatto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è uno spazio di Banach con la norma (mostrare che è una norma)

$$\|u\|_{C^m} := \sum_{n=0}^{m} \sum_{|\alpha|=n} \sup_K |D^\alpha u| \,.$$

Esercizio 92. Sia $\alpha \in (0, 1)$ e consideriamo l'insieme delle funzioni α-*hölderiane* sull'intervallo $[a, b] \in \mathbb{R}$

$$C^{0,\alpha}([a,b]) := \left\{ f \in C([a,b]) \,;\; [f]_\alpha := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}$$

1. Mostrare che $[f]_\alpha$ è un seminorma;

2. Provare che $C^{0,\alpha}([a, b])$ è denso in $C([a, b])$;

3. Mostrare che
$$\|f\|_{C^{0,\alpha}} = \|f\|_\infty + [f]_\alpha$$
è una norma e che rende $C^{0,\alpha}([a, b])$ uno spazio di Banach;

4. Provare che dato $r \in [a, b]$ la funzione $g_r(x) = |x - r|^\alpha$ è in $C^{0,\alpha}([a, b])$;

5. Provare che per ogni $r \neq s$
$$[g_r - g_s]_\alpha \geq 2 \,.$$
Da questo dedurre che $C^{0,\alpha}([a, b])$ non è separabile (ossia non ammette un sottoinsieme numerabile denso).

Esercizio 93. Consideriamo il sottospazio di $C([0,1])$

$$X = \{u \in C([0,1]) \,:\, u(0) = 0\}$$

e definiamo

$$F(u) = \int_0^1 u(t)\,dt\,.$$

Mostrare che non esiste alcuna funzione in X per la quale $\|F\|_{X'}$ è raggiunta.

Esercizio 94. Dimostrare che una funzione positivamente 1-omogenea $p : X \to \mathbb{R}$, con X spazio vettoriale, verifica $p(0) = 0$ ed è subadditiva se e solo se è convessa.

Esercizio 95. Provare il seguente enunciato:

Sia X normato e M un suo sottospazio.

Allora M è denso se e solo se per ogni $f \in X'$ tale che $f_{|M} = 0$ si ha $f = 0$.

Esercizio 96. Dato X normato e $x_0 \in X$.

1. Se $x_0 \neq 0$, esiste $f_0 \in X'$, con $\|f_0\|_{X'} = 1$ e $f(x_0) = \|x_0\|_X$;
2. Se $f(x_0) = 0$ per ogni $f \in X'$, allora $x_0 = 0$;
3. Diciamo che uno spazio normato è *strettamente convesso* se per ogni $x, y \in X$, con $x \neq y$ e $\|x\| = \|y\| = 1$ si ha che $\|\frac{x+y}{2}\| < 1$. Mostrare che L^1 e L^∞ non sono strettamente concessi;
4. Provare che se X' è strettamente convesso allora l'elemento f_0 del punto 1) è unico.
5. Mostrare un esempio di uno spazio X in cui l'elemento f_0 del punto 1) non è unico.

Esercizio 97. Sia X normato e consideriamo la *mappa di dualità*

$$F(x) = \{f \in X' :\ \|f\| = \|x\| \text{ e } f(x) = \|x\|^2\}\,.$$

1. Provare che $F(x)$ è non vuoto, chiuso e convesso.

   Suggerimento: Mostrare che

   $$F(x) = \{f \in X' :\ \|f\| \leq \|x\| \text{ e } f(x) = \|x\|^2\}\,.$$

2. Mostrare che se X' è strettamente convesso allora $F(x)$ è costituito da un solo punto.

Esercizio 98. Supponiamo che X e Y siano normati, con $X \neq \{0\}$.

1. Provare che esiste $F \in X'$, con $F \neq 0$;

2. Data $F \in X'$ e $y \in Y$, mostrare che $T(x) := F(x)y$ appartiene a $\mathcal{L}(X,Y)$, con $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \|F\|_{X'}\|y\|_Y$;

3. Provare che se $\mathcal{L}(X,Y)$ è completo, allora Y è di Banach.

Suggerimento: 1) Usare Hahn Banach. 3) Usare il punto 2).

Esercizio 99. Sia $C = \{f \in L^1((0,1)) \, : \, \int_0^1 f(x)\,dx = 1\}$. Evidentemente $0 \notin C$. Mostrare che C è convesso e che esistono infiniti $g \in C$ di norma minima, ossia che verificano $\|g\|_{L^1} = \min_{f\in C} \|f\|_{L^1} = \operatorname{dist}(0,C)$.

Esercizio 100 (Funzionale di Minkowski o Gauge di C)**.** Sia X normato e $C \subseteq X$ un convesso aperto con $0 \in C$. Il funzionale di Minkowski di C è dato da

$$p_C(x) = \inf\left\{r > 0 \, : \, \frac{x}{r} \in C\right\} \qquad x \in X\,.$$

1. Provare che l'insieme su cui si fa l'inf è non vuoto;

2. Mostrare che p_C è positivamente 1-omogeneo e subadditivo su X

3. Provare che esiste $M > 0$ tale che $p_C(x) \leq M\|x\|_X$;

4. Provare che $p_C(x) < 1 \iff x \in C$.

Esercizio 101. Sia X normato e $C \subseteq X$ convesso aperto con $0 \in C$. Assumiamo che $C = -C$ (ossia C sia simmetrico) e che C sia limitato. Provare che p_C è una norma equivalente a $\|\cdot\|_X$.

Esercizio 102. Sia $X = C([0,1])$ con la norma del sup, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Per ogni $p \in (1,+\infty)$ consideriamo

$$C = \left\{f \in X \, : \, \int_0^1 |f|^p dx < 1\right\}\,.$$

1. Provare che C è aperto, simmetrico e convesso;

2. È limitato?

3. Calcolare p_C. È equivalente a $\|\cdot\|_\infty$?

Esercizio 103. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ considerare l'insieme di $L^2([-1,1])$

$$C_\alpha := \left\{f \in L^2([-1,1]) \, : \, \text{continua e } f(0) = \alpha\right\}\,.$$

Mostrare che C_α è un convesso nè aperto, nè chiuso. Che per ogni α C_α è denso in $L^2([-1,1])$. Dedurne che se $\alpha \neq \beta$ C_α e C_β non possono essere separati da un iperpiano chiuso.

Esercizio 104. Sia X uno spazio vettoriale normato di dimensione finita. Sia $C \in X$ non vuoto, convesso tale che $0 \notin C$.

1. Scegliere un insieme $\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq C$ denso in C (perché esiste?). Per ogni n poniamo

$$C_n = \mathrm{co}\{x_1, x_2, ..., x_n\} := \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \ : \ t_i \in \mathbb{R} \ t_i \geq 0 \ \sum_i t_i = 1 \right\}.$$

   Mostrare che C_n è compatto e che $\cup_n C_n$ è denso in C.

2. Provare che esiste $f_n \in X'$ tale che $\|f_n\|_{X'} = 1$ e $\langle f_n, x \rangle \geq 0$ per ogni $x \in C_n$.

3. Dedurre che esiste $f \in X'$ tale che $\|f\|_{X'} = 1$ e $\langle f, x \rangle \geq 0$ per ogni $x \in C$.

4. Concludere che dati comunque due insiemi convessi disgiunti A e B in X, esiste un iperpiano chiuso che li separa (senza ulteriori ipotesi su A e B).

Esercizio 105. Siano X e Y due spazi di Banach e sia $\{T_n\}$ una successione in $\mathcal{L}(X, Y)$. Assumiamo che per ogni $x \in X$, $T_n x$ converge per $n \to +\infty$ a un limite che denotiamo con Tx.

1. Provare che $T \in \mathcal{L}(X, Y)$;

2. Mostrare che se x_n converge a x in X allora $T_n x_n$ converge a Tx in Y.

Suggerimento: Usare il Teorema di Banach-Steinhaus.

Esercizio 106. Sia X uno spazio di Banach e $T \in \mathcal{L}(X, X)$ tale che per ogni $x \in X$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $T^n(x) = 0$. Mostrare che esiste n_0 tale che $T^{n_0} = 0$.

Suggerimento: Scrivere $X = \cup (T^n)^{-1}(0)$ e usare il lemma della categoria di Baire.

Esercizio 107. Provare che se $f_n, f \in L^2(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ verificano

$$\int_\Omega f_n g \, dx \to \int_\Omega f g \, dx \qquad \forall \ g \in L^2(\Omega)$$

e

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$$

allora f_n converge a f in $L^2(\Omega)$.

Esercizio 108. Sia Ω limitato in $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile.

1. Supponiamo che dato $p \in (1, +\infty)$ si abbia

$$\int_\Omega |f||g|\, dx < +\infty \qquad \forall\, g \in L^{p'}(\Omega)$$

con p' esponente coniugato di p. Provare che $f \in L^p(\Omega)$.

Suggerimento: Per ogni $k \in \mathbb{N}$ considerare

$$F_k(g) = \int_\Omega f_k g\, dx$$

con $f_k(x) = f(x) \vee (-k) \wedge k$ e quindi $F_k \in (L^{p'}(\Omega))'$. Usare il Teorema di Banach Steinhaus.

2. Che si può dire nel caso Ω non limitato?

Esercizio 109. Sia $p \in [1, +\infty)$. Provare che se f_k converge a f in $L^p(\Omega)$, ossia converge in norma, allora converge debolmente in $L^p(\Omega)$ a f, ossia verifica

$$\int_\Omega f_k g\, dx \to \int_\Omega f g\, dx \qquad \forall\ g \in L^{p'}(\Omega)\,.$$

Esercizio 110. Fissiamo un insieme X e una collezione $\mathcal{S}$ di sottoinsiemi di X. Supponiamo che $\cup_{W \in \mathcal{S}} = X$. Consideriamo quindi la famiglia $\mathcal{B}$ di insiemi ottenuti facendo intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}$

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{k=1}^{N} W_k \ :\ N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\,,\ W_k \in \mathcal{S}\,,\ \forall k \in \{1, ..., N\} \right\}\,.$$

Consideriamo la collezione di insiemi di X

$$\tau := \left\{ \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \ :\ A \text{ un insieme } V_\alpha \in \mathcal{B}\ \forall \alpha \in A \right\} \cup \emptyset\,.$$

1. Provare che τ è una topologia in τ (ossia è chiusa rispetto a unioni qualsiasi e intersezioni finite, $\emptyset \in \tau$ and $X \in \tau$).

2. Provare che τ è la topologia meno fine che contiene $\mathcal{S}$ (ossia che presa un'altra topologia $\tau' \supset \mathcal{S}$ allora $\tau' \supset \tau$).

Esercizio 111. Mostrare che in uno spazio normati di dimensione finita la topologia debole e la forte coincidono e quindi

$$x_n \rightharpoonup x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_n \to x\,.$$

Suggerimento: Usare che in dimensione finita tutte le norme sono equivalenti e la caratterizzazione degli intorni di $\sigma(X, X')$.

Esercizio 112. Dare un esempio di una successione f_k in $L^2((0,1))$ che converge q.o. a 0, che converge debolmente in L^2 ma non converge fortemente.

Esercizio 113. Date due successioni $\{f_k\} \subset L^\infty((0,1))$ e $\{g_k\} \subset L^2((0,1))$ e dati f e g tali che f_k converge a f q.o. in $(0,1)$, $\sup_k \|f_k\|_{L^\infty(0,1)} < +\infty$ e g_k converge a g debolmente in L^2. Provare che $f_k g_k$ converge debolmente a fg in L^2.

Esercizio 114. Sia $1 < p < +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Consideriamo una successione $\{f_k\} \subset L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, provare che

$$f_k \rightharpoonup f \text{ in } L^p \quad \Longleftrightarrow \quad \|f_k\|_{L^p} \leq C \quad \int_Q f_k\, dx \to \int_Q f\, dx \quad \forall Q \text{ cubo } \subset \Omega\,.$$

Esercizio 115. Consideriamo lo spazio $\ell^2 = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=0}^\infty x_n^2 < +\infty\}$ munito della norma

$$\|x\|_{\ell^2} = \sum_{n=0}^\infty |x_n|^2\,.$$

1. Mostrare che ℓ^2 è uno spazio di Banach (in realtà vedremo che è meglio, è uno spazio di Hilbert);

2. Mostrare che il duale di ℓ^2 è ℓ^2 (cosa che potremmo dedurre dalla sua struttura Hilbertiana, ma che si può fare esplicitamente in questo caso), ossia mostrare che per ogni $F \in (\ell^2)'$, esiste $y \in \ell^2$ tale che

   $$F(x) = \sum_{n=0}^\infty x_n y_n \qquad \forall\, x \in \ell^2\,;$$

   Suggerimento: definire $y_n = F(e_n)$.

3. Mostrare che se $y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ verifica $\sup_n |y_n| < +\infty$ allora la successione di elementi di ℓ^2

   $$y^{(k)} = y_k e_k\,,$$

   dove $(e_k)_n = 0$ per ogni $n \neq k$ e $(e_k)_k = 1$, converge debole a 0 in ℓ^2.

4. Usando il punto precedente mostrare che per ogni $x \in \ell^2$ con $\|x\|_{\ell^2} < 1$ esiste una successione $x^{(k)}$ in ℓ^2 con $\|x^{(k)}\|_{\ell^2} = 1$ che converge debole a x.

Esercizio 116. Mostrare che per ogni $f \in L^2(0,1)$ con $\|f\|_{L^2(0,1)} < 1$ si può trovare una successione $f_k \in L^2(0,1)$ con $\|f_k\|_{L^2(0,1)} = 1$ e che converge debolmente a f.

Esercizio 117. Sia X uno spazio di Banach e $\{x_n\}$ una successione convergente a x debolmente (ossia nella topologia $\sigma(X, X')$). Definiamo

$$\sigma_n = \frac{x_1 + ... + x_n}{n} .$$

Provare che σ_n converge debolmente a x.

Dare un esempio in cui σ_n converge fortemente, ma tale che x_n non converge fortemente.

Suggerimento per l'esempio: Considerare in $L^2(\mathbb{R})$ una successione $f_k(x) = \phi(x-k)$ scegliendo ϕ opportunamente. Vedi anche Esercizio 120.

Esercizio 118. Provare che se H è un Hilbert e $v : \mathbb{N} \to H$ è tale che v_k è limitata (nel senso che $\sup_k \|v_k\| < +\infty$) e $(v_k, v_h) = 0$ per ogni $k \neq h$, allora la successione v_k converge debole a zero per $k \to \infty$.

Esercizio 119 (Lemma di Mazur)**.** Sia X uno spazio di Banach e $x_n \rightharpoonup x$. Il convessificato di $\{x_n\}$ è l'insieme di tutte le combinazioni convesse (finite) di elementi di $\{x_n\}$, ossia

$$\mathrm{co}\,\{x_1, x_2, ...\} := \left\{ x = \sum_{i=1}^{N} t_i x_{k_i} \ : \ x_{i_k} \in \{x_n\} \text{ e } t_i \geq 0 \ \ \sum_{i=1}^{N} t_i = 1\,,\ N \in \mathbb{N} \right\} .$$

Considerare l'insieme

$$C_n := \mathrm{co}\,\{x_n, x_{n+1}, ...\}$$

1. Provare che gli insiemi C_n sono convessi.

2. Dato $K_n = \overline{C_n}^{\|\cdot\|}$, provare che

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$$

3. Provare che esiste una successione y_n tale che

$$y_n \in C_n \qquad y_n \to x .$$

4. Provare che esiste z_n tale che

$$z_n \in \mathrm{co}\,\{x_1, ..., x_n\} \qquad z_n \to x .$$

Suggerimento: Usare il punto precedente reindicizzando la successione.

Esercizio 120. Sia H uno spazio di Hilbert.

1. Sia $\{u_n\}$ una successione in H che converge debolmente a 0. Si costruisca induttivamente una sottosuccessione tale che $u_{n_1} = u_1$ e
$$|(u_{n_k}, u_{n_j})| \leq \frac{1}{k} \qquad \forall\ j = 1, 2, ..., k-1\,.$$
Provare che la successione delle medie aritmetiche di u_{n_k},
$$\sigma_k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} u_{n_j}\,,$$
converge fortemente a zero per $k \to +\infty$[4].
Suggerimento: Stimare $\|\sigma_k\|^2$.

2. Assumiamo che u_n sia una successione limitata in H. Provare che esiste una sottosuccessione u_{n_k} tale che $\sigma_k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} u_{n_j}$ converge fortemente per $k \to +\infty$.

Esercizio 121. Siano X e Y due spazi di Banach e consideriamo lo spazio prodotto $Z = X \times Y$ con la norma prodotto $\|(x, y)\|_Z = \|x\|_X + \|y\|_Y$.

1. Provare che Z è un Banach.

2. Provare che per ogni $f \in Z'$ esistono $g \in X'$ e $h \in Y'$ tali che $f(x, y) = g(x) + h(y)$ per ogni $x \in X$ e $y \in Y$. Dedurne che
$$(x_n, y_n) \stackrel{Z}{\rightharpoonup} (x, y) \quad\Longleftrightarrow\quad x_n \stackrel{X}{\rightharpoonup} x \ \text{ e } \ y_n \stackrel{Y}{\rightharpoonup} y\,.$$

3. Sia W un sottospazio chiuso di X e $\{w_n\} \subset W$ allora
$$w_n \stackrel{W}{\rightharpoonup} w \quad\Longleftrightarrow\quad w_n \stackrel{X}{\rightharpoonup} w\,.$$

4. Sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ invertibile, allora
$$x_n \stackrel{X}{\rightharpoonup} x \quad\Longleftrightarrow\quad T(x_n) \stackrel{Y}{\rightharpoonup} T(x)\,.$$

Esercizio 122. Dato $1 \leq p < +\infty$. Provare che
$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{in } W^{1,p}((0,1))$$
se e soltanto se
$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{in } L^p((0,1)) \quad \text{e} \quad f_n' \rightharpoonup f' \quad \text{in } L^p((0,1))\,.$$
Suggerimento: Usare l'esercizio 121 e la mappa $T : W^{1,p} \to (L^p)^2$ che a $f \in L^p((0,1))$ associa $T(f) = (f, f')$.

[4] Confrontare con l'Esercizio 119

Esercizio 123. Sia $p \in (1, +\infty)$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Definiamo $f_k(x) = k^{\frac{n}{p}} f(kx)$. Provare che f_k converge a zero debolmente in $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Suggerimento: Nello stimare l'integrale di f_k contro una funzione $g \in L^{p'}$ trattare separatamente l'integrale dentro una palla di raggio R e l'integrale fuori.

Esercizio 124. Dato $p \in (1, +\infty)$ e $g(x) = n^{1/p} e^{-nx}$ in $L^p((0,1))$ provare che

1. $g_n \to 0$ q.o in $(0,1)$
2. g_n è limitata in L^p
3. $g_n \not\to 0$ fortemente in L^p
4. $g_n \rightharpoonup 0$ in L^p
5. Cosa si può dire nel caso $p = 1$?

Esercizio 125. *Provare che il sottoinsieme E delle misure di Radon finite in $[0,1]$, $\mathcal{M}([0,1])$, definito da

$$E := \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{x_i} \ : \ x_i \in [0,1] \text{ e } c_i \in \mathbb{R} \right\}$$

è denso in $\mathcal{M}([0,1])$ rispetto alla topologia $*$-debole, ma non rispetto alla topologia forte (indotta dalla variazione totale).

Suggerimento: Data $\mu \in \mathcal{M}([0,1])$ considerare partizioni di $[0,1]$, $\cup_i I_i$, e definire $c_i = \mu(I_i)$.

Esercizio 126. Data una successione di misure in $\mathcal{M}(\Omega)$ positive, μ_h che convergono $*$-debolmente a μ, provare che

1. Per ogni funzione $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ semicontinua inferiormente si ha

$$\int_\Omega \varphi \, d\mu \leq \liminf_{h \to +\infty} \int_\Omega \varphi \, d\mu_h$$

2. Per ogni funzione $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ semicontinua superiormente si ha

$$\int_\Omega \varphi \, d\mu \geq \limsup_{h \to +\infty} \int_\Omega \varphi \, d\mu_h$$

Suggerimento: Utilizzare l'approssimazione di Yosida costruita nell'Esercizio 135.

Dedurne che per ogni aperto A in Ω

$$\mu(A) \leq \liminf_{h \to +\infty} \mu_h(A)$$

e per ogni compatto K in Ω

$$\mu(K) \geq \limsup_{h\to+\infty} \mu_h(K) .$$

*Se E è un boreliano che verifica $\mu(\partial E) = 0$, allora

$$\mu(E) = \lim_{h\to+\infty} \mu_h(E) ,$$

(Quest'ultimo punto usa che se $\mu(\partial E) = 0$, allora $\mu(\overline{E}) = \mu(Int(E))$).

Esercizio 127. Sia X uno spazio di Banach. Mostrare che se X è riflessivo allora

$$\|f\|_{X'} = \max_{\|x\|\leq 1} \langle f, x\rangle \qquad \forall f \in X' .$$

ossia la norma duale è raggiunta da qualche $x \in X$.

Esercizio 128. Sia $I = (0, 1)$, mostrare che $W^{1,1}(I)$ non è riflessivo. Sapreste mostrarlo anche per $W^{1,1}(B(0, 1))$ con $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$?

Suggerimento: Usare il fatto che se fosse riflessivo tutte le successioni limitate sarebbero debolmente convergenti. Trovare una successione che non verifica questa proprietà.

Esercizio 129. Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, semicontinua inferiormente, che verifica $f(t) \geq -C$, con $C > 0$. Mostrare che il funzionale

$$F(u) = \int_0^1 f(u')\, dx$$

è semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia debole in $W^{1,p}((0, 1))$ se e soltanto se f è convessa.

Suggerimento: In un verso si può usare il lemma di Fatou o il teorema di Hahn Banach. Per mostrare che la semicontinuità inferiore debole di F implica la convessità di f usare una successione la cui derivata è periodica e oscilla tra due valori.

Esercizio 130. Provare la disuguaglianza di Clarkson

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^p_{L^p} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|^p_{L^p} \leq \frac{1}{2}\left(\|f\|^p_{L^p} + \|g\|^p_{L^p}\right) \qquad \forall\ f, g \in L^p$$

se $p \in [2, +\infty)$[5]

[5] Per $1 < p \leq 2$, la disuguaglianza di Clarkson è

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^{p'}_{L^p} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|^{p'}_{L^p} \leq \left(\frac{1}{2}\|f\|^p_{L^p} + \frac{1}{2}\|g\|^p_{L^p}\right)^{1/(p-1)} \qquad \forall\ f, g \in L^p .$$

Dedurne che L^p per $p \in [2, +\infty)$ è uniformemente convesso[6]
Suggerimento: Basta dimostrare

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \le \frac{1}{2}\left(|a|^p + |b|^p\right) \qquad \forall\ a, b \in \mathbb{R}\,.$$

Questa è conseguenza del fatto che la funzione $g(x) = (x^2+1)^{p/2} - x^p - 1$ è crescente in $[0, +\infty)$ come conseguenza del fatto che $(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}} \ge a^p + b^p$ se a, $b > 0$ (provarlo).

Esercizio 131. Mostrare che L^1 e L^∞ non sono uniformemente convessi.

Esercizio 132. Provare che date $f_k\,,\ f\,, g \in L^p(\Omega)$ con $p \in [1, +\infty)$, se $f_k \to f$ q.o. in Ω e $f_k \rightharpoonup g$ in $L^p(\Omega)$, allora $f = g$ q.o. in Ω.
Suggerimento: Usare il Lemma di Mazur (si veda Esercizio 119)

Esercizio 133. Siano $f_n, f \in L^p(\Omega)$ con $p \in (1, +\infty)$ tali che $f_n \to f$ q.o. in Ω e $\|f_n\|_{L^p} \to \|f\|_{L^p}$. Provare che f_n converge fortemente a f in L^p.
Suggerimento: Usare la riflessività e l'uniforme convessità di L^p (vedi Esercizio 132)

Esercizio 134. Siano $f_n, f \in L^1(\Omega)$ tali che $f_n \to f$ q.o. in Ω e $\|f_n\|_{L^1} \to \|f\|_{L^1}$. Provare che f_n converge fortemente a f in L^1.
Suggerimento: Si deve fare a mano perchè L^1 non è uniformente convesso. Usare il Teorema di convergenza dominata (usare che $||a|+|b|-|b-a|| \le 2|b|$).

Esercizio 135. *Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ semicontinua inferiormente che verifica $f(x) \ge C$, $C \in \mathbb{R}$ (ossia limitata dal basso), per ogni $\lambda \in [0, +\infty]$ e $x \in [a, b]$ definiamo la *trasformata di Yosida di f* come

$$f_\lambda(x) = \min\left\{f(y) + \lambda|x-y| : y \in [a, b]\right\}\,.$$

1. Provare f_λ è ben definito e che il minimo è raggiunto;
2. Provare che f_λ è λ-Lipschtziana;
3. Mostrare che $f_\lambda(x) \le f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$
4. Provare che $f(x) = \sup_\lambda f_\lambda(x) = \lim_{\lambda \to +\infty} f_\lambda(x)$;
5. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è convessa, provare che f_λ è convessa;
6. Provare che se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha supporto compatto, allora anche f_λ ha supporto compatto.

[6] Analogamente questo è vero per $1 < p \le 2$.

Mostrare che le stesse proprietà sono ancora vere per $f : \Omega \to \mathbb{R}$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f(x) \geq -C|x|$ (attenzione che f_λ con questa ipotesi di limitatezza da basso più debole non è definita per tutti i λ. Per quali?).

Esercizio 136. *Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ L-lipschitziana, mostrare che la funzione definita per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$f_L(x) = \min \{f(y) + L|x - y| : y \in [a, b]\} .$$

è lipschitziana di costante L ed è un'estensione di f a tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 137. Per ognuna delle seguenti successioni mostrare se sono limitate in $L^p(\Omega)$, con $1 \leq p \leq +\infty$. Dire se convergono forte o debole in $L^p(\Omega)$, con $1 \leq p < +\infty$. Dire se convergono *debolmente in $L^\infty(\Omega)$ o in $\mathcal{M}(\Omega)$. Determinarne, quando esiste, il limite.

1. $\Omega = [0, 1]$ e $f_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ data da
$$f_k(x) = \begin{cases} k^{\frac{1}{4}} - k^{\frac{5}{4}} x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{k} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2. $\Omega = \mathbb{R}$ e $f_k(x) = k^{-\frac{1}{2}} \varphi(\frac{x}{k})$ con $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e $\operatorname{supp} \varphi \subseteq [-1, 1]$.

Esercizio 138. Provare che $L^p(\Omega)$, con $p \geq 1$ e $p \neq 2$, non è uno spazio di Hilbert.

Suggerimento Provare che $\|\cdot\|_{L^p}$ non verifica l'identità del parallelogramma.

Esercizio 139. Sia Ω limitato e $f_n \in L^p(\Omega)$ con $p \in (1, +\infty)$ e supponiamo che f_n converga q.o. a f in Ω e che f_n sia limitata in $L^p(\Omega)$. Provare che f_n converge fortemente a f in $L^r(\Omega)$ per ogni $r \in [1, p)$.

Suggerimento: Usare la proprietà di Egorov della convergenza quasi uniforme.[7]

Esercizio 140. Data una successione di funzioni $\{\phi_k\} \subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ con $\operatorname{supp} \phi_k \subseteq [-1, 1]$, che converge uniformemente a ϕ in $\mathbb{R}$, con $\phi \neq 0$.

1. Provare che ϕ_k converge a ϕ in L^p per ogni $1 \leq p \leq +\infty$;

2. Definiamo la successione
$$f_k(x) = \phi_k(x - k) .$$
Provare che f_k è limitata in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in [1, +\infty]$.

[7] Se $f_n \to f$ q.o. in Ω, allora per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un insieme misurabile A_ε tale che $|A_\varepsilon| < \varepsilon$ e $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq N_\varepsilon$ si ha
$$\sup_{\Omega \setminus A_\varepsilon} |f_n - f| < \varepsilon.$$

3. Provare che f_k converge debolmente a zero in $L^p(\mathbb{R})$ per ogni $p \in (1, +\infty)$.

4. Mostrare che f_k non converge debolmente a zero in $L^1(\mathbb{R})$.

5. La successione converge *debolmente in L^∞?

Esercizio 141. Sia $I = (0, 1)$. Supponiamo che u_n sia una successione limitata in $W^{1,p}(I)$, $1 < p \leq +\infty$.

1. Mostrare che esiste una sottosuccessione u_{n_k} e una funzione u in $W^{1,p}(I)$ tali che $\|u_{n_k} - u\|_\infty \to 0$ (ossia u_{n_k} converge uniformemente a u e quindi fortemente in L^p) e $u'_{n_k} \rightharpoonup u'$ debolmente in $L^p(I)$, se $p < +\infty$, mentre $u'_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ $*$debolmente in $L^\infty(I)$.

   Suggerimento: Ricordare che $W^{1,p}(I) \subseteq W^{1,1}(I)$ e che le funzioni in $W^{1,1}(I)$ sono assolutamente continue.

2. Esibire una successione in $W^{1,1}(I)$ che non ammette sottosuccessioni convergenti fortemente in $L^\infty(I)$.

   Suggerimento: Si veda l'esercizio sulla non riflessività di $W^{1,1}(I)$.

Esercizio 142 (Criterio di selezione di Helly)**.** Sia u_n una successione limitata in $W^{1,1}((0, 1))$. L'obiettivo è provare che esiste una sottosuccessione u_{n_k}, tale che $u_{n_k}(x)$ converge per ogni $x \in [0, 1]$

1. Mostrare che si può assumere che per ogni n la funzione u_n sia non decrescente in $[0, 1]$.

   Suggerimento: Basta definire $v_n(x) = \int_0^x |u'_n(t)|\, dt$ e $w_n = v_n - u_n$.

2. Provare che esiste una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ e un insieme misurabile $E \subset [0, 1]$ con $|E| = 0$ tale che $u_{n_k}(x)$ converge a un limite $u(x)$ per ogni $x \in [0, 1] \setminus E$.

   Suggerimento: Usare che l'immersione di $W^{1,1}((0, 1))$ in $L^1((0, 1))$ è compatta.

3. Assumendo che u_n è non decrescente, mostrare che il limite u è non decrescente in $[0, 1] \setminus E$ e dedurre che c'è un insieme numerabile $D \subset (0, 1)$ e una funzione $\bar{u} : (0, 1) \setminus D \to \mathbb{R}$ non decrescente tale che $\bar{u}(x + 0) = \bar{u}(x - 0)$ per ogni $x \in (0, 1) \setminus D$ e $\bar{u}(x) = u(x)$ per ogni $x \in (0, 1) \setminus (E \cup D)$.

4. Provare che $u_{n_k}(x) \to \bar{u}(x)$ per ogni $x \in (0, 1) \setminus D$.

5. Costruire una successione $\{u_{n_k}\}$ che converge per ogni x in $[0, 1]$.

   Suggerimento: Usare un argomento diagonale.

Esercizio 143. Sia $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ e $1 \le p < n$.

- Definiamo $u_k : \Omega \to \mathbb{R}$ come
$$u_k(x) = \begin{cases} k^{\frac{n-p}{p}}(1 - k|x|) & \text{se } |x| < \frac{1}{k} \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$
Provare che u_k è limitata in $W^{1,p}(\Omega)$ ma non ammette una sottosuccessione convergente in $L^{p^*}(\Omega)$ con $p^* = \frac{np}{n-p}$.

- Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ data da $u(x) = \log(\log(1 + \frac{1}{|x|}))$ se $x \in \Omega \setminus \{0\}$ e $u(0) = 0$. Provare che $u \in W^{1,n}(\Omega)$ ma non a $L^\infty(\Omega)$.

Esercizio 144. Sia Ω un aperto di classe C^1 (eventualmente $\Omega = \mathbb{R}^n$). Usando i risultati di immersione per $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mostrare che valgono i seguenti risultati:

1. Se $2p < n$ allora $W^{2,p}(\Omega)$ si immerge in modo continuo in $L^q(\Omega)$ per ogni $p \le q \le \frac{np}{n-2p}$. L'immersione è compatta per ogni $p \le q < \frac{np}{n-2p}$, se Ω è limitato.

2. Se $2p = n$ allora $W^{2,p}(\Omega)$ si immerge in modo continuo in $L^q(\Omega)$ per ogni $p \le q \le +\infty$. L'immersione è compatta per ogni $p \le q < +\infty$, se Ω è limitato.

3. Se $2p > n$ allora $W^{2,p}(\Omega)$ si immerge in modo continuo in $L^\infty(\Omega)$. L'immersione è compatta per ogni se Ω è limitato.

Esercizio 145. Mostrare che $W^{2,4}(\mathbb{R}^2)$ si immerge in modo continuo in $C^{1,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)$ (ossia funzioni derivabili con derivate $\frac{1}{2}$-hölderiane).

Esercizio 146. Fissato $\alpha > 0$ e $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$. Mostrare che esiste una costante che dipende solo da α e n, tale che
$$\int_\Omega |u|^2 dx \le c \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$
per ogni $u \in H^1(\Omega)$ tale che $|\{x \in \Omega \,:\, u(x) = 0\}| \ge \alpha$.

Suggerimento: Procedere per assurdo.

Esercizio 147. Sia $\Omega = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Mostrare che la funzione
$$f(x) = (1 + |\log|x||)^\alpha\,,$$
appartiene ad $H^1(\Omega)$. Mostrare che $f \in L^q(B(0,1))$ per ogni $q < +\infty$ ma che $f \notin L^\infty(B(0,1))$.

Esercizio 148. Sia $\Omega = B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $p \ge 1$ e $\alpha > 0$.

1. Mostrare che la funzione
$$u(x) = |x|^{-\alpha} \quad \text{per } x \neq 0\,,$$
appartiene ad $W^{1,p}(\Omega)$ se e solo se $(\alpha+1)p < n$. In particolare $u \notin W^{1,p}(\Omega)$ se $p > n$.

2. Sia $\{r_k\}$ un insieme numerabile denso in Ω e definiamo
$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}|x - r_k|^{-\alpha}$$
Mostrare che v appartiene ad $W^{1,p}(\Omega)$ se $(\alpha+1)p < n$. In particolare v è un esempio di funzione in $W^{1,p}(\Omega)$ che è illimitata in ogni intorno contenuto in Ω.

Esercizio 149. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$.

1. Provare la seguente disuguaglianza di interpolazione
$$\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \leq \left(\int_\Omega |D^2u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{0.11}$$
per ogni $u \in C_c^\infty(\Omega)$ (dove D^2u denota la matrice delle derivate seconde di u).

   Suggerimento: Integrare per parti.

2. Provare la disuguaglianza (0.11) per tutte le funzioni $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

   Suggerimento: Approssimare u in H^1 con funzioni $u_n \in C_c^1(\Omega)$ e con funzioni $w_n \in C^\infty(\Omega)$ in H^2 e usare l'integrazione per parti.

3. Provare per ogni funzione $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ la seguente disuguaglianza
$$\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx \leq \left(\int_\Omega |D^2u|^p dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Esercizio 150. Sia $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$ e consideriamo una partizione $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ di Ω. Poniamo $I_k^n = (x_k, x_{k+1})$, $0 \leq k \leq n-1$.

1. Mostrare che se $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con $f \in H^1(I_k^n)$ per ogni $0 \leq k \leq n-1$, allora $f \in H^1(\Omega)$ se e soltanto se $f \in C(\overline{\Omega})$.

2. Mostrare che se $\sup_k |I_k^n| \to 0$ quando $n \to +\infty$ (per esempio $|I_k^n| = \frac{b-a}{n}$ per ogni n), allora per ogni $u \in H^1(\Omega)$ esiste una successione $u_n \in H^1(\Omega)$ che converge forte a u in $H^1(\Omega)$ e tale che u_n' è costante in ogni I_k^n al variare di $0 \leq k \leq n-1$ (ossia u_n è affine a tratti).

3. Chiamiamo $\mathcal{A}_n$ l'insieme delle funzioni affini a tratti descritte nel punto 2. (in corrispondenza di $I_k^n = (a + \frac{k(b-a)}{n}, a + \frac{(k+1)(b-a)}{n})$).

   Mostrare che data $f \in L^2(\Omega)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un'unica funzione $u_n \in \mathcal{A}_n$ che realizza il minimo

$$\min_{u \in \mathcal{A}_n} \left\{ \int_a^b |u'|^2 dx - \int_a^b f u \, dx \ : \ u(a) = 0\,,\ u(b) = 0 \right\} .$$

   Suggerimento: Usare che $\mathcal{A}_n$ si può identificare con $\mathbb{R}^{n+1}$, ossia è uno spazio finito dimensionale.

   Mostrare che la successione u_n converge debolmente in $H^1(\Omega)$ al minimo u di

$$\min_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \int_a^b |u'|^2 dx - \int_a^b f u \, dx \right\} .$$

Esercizio 151. Siano Ω_1 e Ω_2 due aperti con bordo regolare (quanto basta per poter applicare il teorema della divergenza, e.g. Lipschitz) tali che $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ e $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, Ω aperto di $\mathbb{R}^n$. Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $u_{|\Omega_1} \in C^1(\Omega_1) \cap H^1(\Omega_1)$ e $u_{|\Omega_2} \in C^1(\Omega_2) \cap H^1(\Omega_2)$. Allora $u \in H^1(\Omega)$ se e soltanto se $u \in C(\Omega)$.

Suggerimento: usare il teorema della divergenza (ossia integrare per parti).

Esercizio 152. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto considerare lo spazio

$$H(\mathrm{div}, \Omega) = \left\{ u = (u_1, ..., u_n) \in (L^2(\Omega))^n \ : \ \mathrm{div}\, u = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} u_i \in L^2(\Omega) \right\},$$

dove quindi la divergenza va intesa nel senso delle distribuzioni, munito della norma

$$\|u\|_{H(\mathrm{div},\Omega)} := \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\mathrm{div}\, u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

1. Mostrare che $H(\mathrm{div}, \Omega)$ è uno spazio di Hilbert.

2. Mostrare che la funzione $u : Q \to \mathbb{R}^2$, con Q il cubo di lato 1 in $\mathbb{R}^2$ centrato in 0, definita da

$$u(x) = \begin{cases} (0,0) & \text{se } x_1 < 0 \\ (0,1) & \text{se } x_1 \geq 0 \end{cases}$$

   appartiene a $H(\mathrm{div}, Q)$. Osservare che $u \notin (H^1(Q))^2$.

Esercizio 153. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una funzione che verifica

- la mappa $x \to f(x,v)$ è misurabile per ogni $v \in \mathbb{R}^m$
- la mappa $v \to f(x,v)$ è continua per quasi ogni $x \in \Omega$

(una funzione che verifica queste due proprietà si dice di Caratheodory). Supponiamo inoltre che dato $p \in [1,+\infty)$

$$|f(x,v)| \leq a|v|^p + b(x) \qquad \text{q.o. } x \in \Omega$$

con $a \in \mathbb{R}_+$ e $b \in L^1(\Omega)$. Allora la mappa $u \to \int_\Omega f(x,u(x))\,dx$ è continua rispetto alla topologia forte in $L^p(\Omega)$.

Esercizio 154. Dato Ω aperto di $\mathbb{R}^n$, consideriamo una funzione $u \in W^{1,p}(\Omega)$, con $p \in [1,+\infty)$. Per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$ e $|h| \leq \mathrm{dist}\,(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$, definiamo la derivata parziale discreta di u

$$D^i_h u = \frac{u(x+he_i) - u(x)}{h} \,.$$

1. Mostrare che
$$\|D^i_h u\|_{L^p(\Omega')} \leq \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)}$$
2. Mostrare che $D^i_h u \in W^{1,p}(\Omega')$ e se $\psi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ allora $v = \psi D^i_h u \in W^{1,p}(\Omega')$. Inoltre scrivere il gradiente di v.
3. Mostrare che
$$\lim_{h\to 0} \|D^i_h u - \partial_i u\|_{L^p(\Omega')} = 0\,.$$
Suggerimento: Usare il fatto che se $v \in C^\infty(\Omega)$ allora $D^i_h v - \partial_i v \to 0$ uniformemente in Ω' e la densità di C^∞. Quindi usare il punto 1.

Esercizio 155. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $u \in L^p(\Omega)$, con $p \in (1,+\infty)$. Supponiamo che esista una costante $K > 0$ tale che per ogni $i = 1, ..., n$ si abbia

$$\|D^i_h u\|_{L^p(\Omega')} \leq K$$

per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$ e $|h| < \mathrm{dist}\,(\Omega', \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Sappiamo che quindi $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Provare che per ogni $i = 1, ..., n$

$$\|\partial_i u\|_{L^p(\Omega')} \leq K\,.$$

Esercizio 156. Dato $R > 0$ e $\Phi \in (0, 2\pi]$, poniamo $\alpha := \pi/\Phi$ e il settore circolare

$$\Omega_{R,\Phi} := \{(r\cos\phi, r\sin\phi) \;:\; 0 < r < R\,,\; 0 < \phi < \Phi\} \subset \mathbb{R}^2\,.$$

Definiamo la funzione $u : \Omega_{R,\Phi} \to \mathbb{R}$ che in coordinate polari scriviamo

$$u = r^\alpha \sin(\alpha\phi)\,.$$

1. Mostrare che $\Delta u = 0$ in $\Omega_{R,\Phi}$.
2. Dato $p \in [1, +\infty)$ determinare per quali Φ, $\nabla u \in L^p(\Omega_{R,\Phi})$.

Esercizio 157. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $f_k \in L^2(\Omega)$. Sia $u_k \in H_0^1(\Omega)$ la soluzione debole di $-\Delta u_k = f_k$ in Ω, ossia tale che

$$\int_\Omega \nabla u_k \nabla v \, dx = \int_\Omega f_k v \, dx \qquad v \in H_0^1(\Omega).$$

Mostrare che se f_k converge debolmente in L^2 a f allora u_k converge fortemente a u in $H_0^1(\Omega)$, con u soluzione debole di $-\Delta u = f$ in Ω.

Suggerimento: Provare la seguente stima *a priori*:

$$\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f_k\|_{L^2(\Omega)} .$$

Usare la riflessività per mostrare la convergenza debole delle u_k. Per la convergenza forte usare l'immersione compatta di $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ (testando l'equazione di u con u_k e l'equazione di u_k con u). Il fatto che tutta la successione converge è conseguenza dell'unicità della soluzione.

Esercizio 158. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sia di Carathèodory[8], ossia, $f(\cdot, v)$ misurabile per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ e $f(x, \cdot)$ continua per quasi ogni $x \in \Omega$ e che soddisfi

$$f(x, v) \geq c_1 |v|^p - c_2 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n \text{ q.o. } x \in \Omega ,$$

per $p \in (1, +\infty)$ e $c_1, c_2 > 0$.

1. Provare che se $u_n \to u$ fortemente in $W^{1,p}(\Omega)$ allora
$$\int_\Omega f(x, \nabla u) \, dx \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_\Omega f(x, \nabla u_n) \, dx .$$
Suggerimento: Usare Fatou.
2. Provare che se $f(x, \cdot)$ è convessa per q.o. $x \in \Omega$ allora per ogni $u_n \rightharpoonup u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$ allora
$$\int_\Omega f(x, \nabla u) \, dx \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_\Omega f(x, \nabla u_n) \, dx .$$
Suggerimento: Usare Hahn-Banach o il lemma di Mazur.
3. Provare che esiste
$$\min \left\{ \int_\Omega f(x, \nabla u) \, dx \; : \; u \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\} .$$
Suggerimento: Usare il metodo diretto del calcolo delle variazioni

[8] NOTA: Si dimostra che se f è di Carathèodory, allora per ogni $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ misurabile, si ha che $f(x, v(x))$ è quasi ovunque uguale a una funzione Borel misurabile

4. Se f è C^1, scrivere la corrispondente equazione di Eulero Lagrange.

Esercizio 159. Sia $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ e consideriamo il funzionale

$$F(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + a|u(x)|^p \, dx$$

su $H^1(\Omega)$, con $a \in \mathbb{R}$ e $p \in [1, 6]$.

a) Mostrare che $F(u)$ è debolmente semicontinuo inferiormente in H^1 se $a \geq 0$ o se $a < 0$ ma $p \in [1, 6)$.

   Suggerimento: Usare l'immersione di Sobolev.

b) Se $p = 6$ and $a < 0$ mostrare che F è fortemente continuo.

c) Usare la successione $u_n(x) = cn^\alpha \max\{0, 1 - n^2|x|\}$ con una scelta opportuna di c e α per contraddire la semicontinuità inferiore debole di F nel caso $a < 0$ e $p = 6$.

Esercizio 160. Sia $\{f_k\}$ una successione in $W^{1,p}(\Omega)$, con $p > 1$ e Ω aperto limitato. Supponiamo che $f \in W^{1,p}(\Omega)$ verifichi $|\{x \in \Omega \, : \, f(x) = 0\}| = 0$.

1. Provare che se f_k converge fortemente a f in $L^p(\Omega)$, allora $\chi_{\{f_k \geq 0\}}$ converge a $\chi_{\{f \geq 0\}}$ in $L^q(\Omega)$, per ogni $q \in [1, +\infty)$. È ancora vero in $L^\infty(\Omega)$? Provarlo o mostrare un controesempio.

2. Provare che se f_k converge fortemente a f in $W^{1,p}(\Omega)$, allora f_k^+ converge fortemente a f^+ in $W^{1,p}(\Omega)$.

   Suggerimento: Dare per noto che $\nabla f^+ = \chi_{\{f \geq 0\}} \nabla f$.

3. Assumiamo solo che f_k converga ad f debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$, è vero che f_k^+ converge debolmente a f^+ in $W^{1,p}(\Omega)$? (giustificare la risposta)

Esercizio 161. Dato Ω aperto connesso limitato di $\mathbb{R}^n$ e di classe C^1, sia ω un sottoinsieme misurabile di Ω con $|\omega| > 0$. Provare che esiste C_ω tale che

$$\int_\Omega \left| u(x) - \frac{1}{|\omega|} \int_\omega u(y) \, dy \right|^2 dx \leq C_\omega \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \qquad \forall u \in H^1(\Omega) \qquad (*)$$

usando la seguente strategia:

1. Provare che se non vale $(*)$ allora si può trovare una successione $u_n \in H^1(\Omega)$ tale che $\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \to 0$, $\int_\omega u_n \, dx = 0$ e $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

2. Mostrare, usando la compattezza dell'immersione di $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$, che il punto 1) porta a una contraddizione.

Esercizio 162. Sia $I = (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in L^2(I)$ e sia $H = \{u \in H^1(I) \, , \text{ con } u(0) = 0\}$.

a) Si provi che H è un sottospazio chiuso di $H^1(I)$.

b) Si provi che esiste un'unica soluzione del problema di minimo

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 (|u'|^2+|u|^2)\,dx - \int_0^1 fu\,dx + \alpha u(1)\ :\ u\in H^1(I)\,,\ \text{con } u(0)=0\right\}$$

c) Si mostri che l'equazione di Eulero Lagrange del problema di minimo è

$$\int_0^1 u'v'dx + \int_0^1 uv\,dx = \int_0^1 fv\,dx + \alpha v(1) \qquad \forall v\in H\,.$$

Dedurne che $u\in H^2$ e che u è la soluzione debole del problema

$$\begin{cases} -u''+u=f & \text{in } I\\ u(0)=0 \quad u'(1)=\alpha\,. \end{cases}$$

Esercizio 163.
Sia $I=(0,1)\subset\mathbb{R}$. Dato $f\in L^2(I)$, sia $H=\{u\in H^1(I)\ \text{ con } u(0)=u(1)\}$[9].

1. Si provi che H è un sottospazio chiuso di $H^1(I)$.

2. Sia $a>0$; si provi che esiste un'unica soluzione del problema di minimo

$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 (|u'|^2+a|u|^2)\,dx - \int_0^1 fu\,dx\ :\ u\in H\right\}$$

3. Si mostri che l'equazione di Eulero Lagrange del problema di minimo è

$$\int_0^1 u'v'dx + a\int_0^1 uv\,dx = \int_0^1 fv\,dx \qquad \forall v\in H\,.$$

Dedurne che $u\in H^2(I)$ e che u è la soluzione debole del problema

$$\begin{cases} -u''+au=f & \text{in } I\\ u(0)=u(1) \quad u'(0)=u'(1)\,. \end{cases}$$

Mostrare che la funzione u estesa per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ appartiene a $H^2_{loc}(\mathbb{R})$.

4. Provare che se $f\in C(\bar I)$, allora la soluzione è classica.

Esercizio 164. Sia $I=(-1,1)\subset\mathbb{R}$ e consideriamo $a_1(x)=1+x^2$ e $a_2(x)=2+x$.

[9] È sottointeso che u è il rappresentante continuo.

1. Provare che esiste un'unico punto di minimo del problema
$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} a_1(x)|u'|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} a_2(x)|u'|^2 dx - \int_{-1}^{1} u\,dx \;:\; u \in H_0^1(-1,1)\right\}.$$
Suggerimento: Usare il metodo diretto o Lax Milgram provando la coercività della forma quadratica associata al problema.

2. Scrivere l'equazione di Eulero Lagrange (in forma debole) che il minimo u deve verificare.

3. Indichiamo con $I_1 = (-1,0)$ e $I_2 = (0,1)$ e denotiamo rispettivamente con u_1 e u_2 la restrizione di u a I_1 e I_2. Provare che $u_k \in H^2(I_k)$, $k = 1,2$.

   Suggerimento: Usare le equazioni in forma debole risolte da u_1 e u_2, prendendo funzioni test $v \in H_0^1(I_k)$.

4. Mostrare che u_1 e u_2 ammettono un rappresentante $C^1(\bar{I}_k)$, $k = 1,2$. Provare che
$$u_1(0) = u_2(0) \qquad u_1'(0) = 2u_2'(0)\,.$$

Esercizio 165. Dato Ω aperto limitato in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$, sia $p \in (1,+\infty)$ e f_k una successione di funzioni in $L^{p'}(\Omega)$, con p' l'esponente coniugato di p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). Consideriamo il funzionale
$$F_k(u) := \int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega f_k u\,dx\,.$$

1. Provare che per ogni k esiste un unico punto minimo $u_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$ del problema
$$\min\left\{F_k(u) : u \in W_0^{1,p}(\Omega)\right\}$$
Suggerimento: Usare il metodo diretto provando che $F_k : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ è debolmente semicontinuo inferiormente e coercivo.

2. Scrivere l'equazione di Eulero Lagrange in forma debole soddisfatta dalla funzione u_k.

   Suggerimento: Per ogni $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ porre $g_k(t) = F_k(u_k + t\varphi)$ e calcolare $g'(0)$.

3. Mostrare che
$$\int_\Omega |\nabla u_k|^p dx \leq \|f_k\|_{L^{p'}} \|u_k\|_{L^p}\,.$$

4. Provare che se f_k converge a zero fortemente in $L^{p'}(\Omega)$, allora u_k converge fortemente a zero in $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Esercizio 166. Sia $I = (0,1) \subset \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Si provi che $F(u) := \alpha(u(1) - u(0))$ appartiene al duale di $H^1(I)$ (con $u(0)$ e $u(1)$ si intendono rispettivamente il limite destro in 0 e il limite in 1 del rappresentante continuo di u).

   Suggerimento: Usare il teorema fondamentale del calcolo.

2. Si provi che esiste un'unica soluzione del problema di minimo
$$\min\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 (|u'|^2 + |u|^2)\, dx + \alpha(u(0) - u(1)) \ : \ u \in H^1(I)\right\}$$

3. Si mostri che l'equazione di Eulero Lagrange in forma debole del problema di minimo è
$$\int_0^1 u'v'dx + \int_0^1 uv\, dx = \alpha v(1) - \alpha v(0) \qquad \forall v \in H^1(I)\,.$$
   Dedurne che $u \in H^2(I)$ e che u è la soluzione debole del problema
$$\begin{cases} -u'' + u = 0 & \text{in } I \\ u'(0) = u'(1) = \alpha\,. \end{cases}$$

Esercizio 167. Sia $\varphi \in C(\mathbb{R})$ una funzione periodica di periodo 1 a media nulla (ossia $\int_0^1 \varphi(y)\, dy = 0$) e sia
$$f_k(x) = k\varphi(kx)\,.$$

1. Mostrare che f_k converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a zero.

   Suggerimento: Integrare per parti e usare il Lemma di Riemann-Lebesgue (provando che la primitiva di una funzione periodica a media nulla è periodica).

2. Provare che in generale, se $\varphi \neq 0$, la successione f_k non converge debolmente in alcun $L^p_{loc}(\mathbb{R})$.

   Suggerimento: Dato un intervallo (a,b), calcolare la norma $L^p((a,b))$ di f_k.

Esercizio 168. Sia $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ e $1 \leq p < 2$. Definiamo $u_k : \Omega \to \mathbb{R}$ come
$$u_k(x) = \begin{cases} k^{\frac{2-p}{p}}(1 - k|x|) & \text{se } |x| < \frac{1}{k} \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

1. Provare che u_k è limitata in $W^{1,p}(\Omega)$
2. Provare che u_k converge fortemente a zero in $L^p(\Omega)$
3. Mostrare che u_k non ammette una sottosuccessione convergente fortemente in $L^{p^*}(\Omega)$ con $p^* = \frac{2p}{2-p}$.

Riferimenti bibliografici

[1] Brezis H.: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer.

[2] Evans C. e Gariepy R.: *Measure theory and fine properties of functions.* CRC Press 1992

[3] Fomin A.N. e Kolmogorov S.V.: *Elementi di teoria delle funzioni e analisi funzionale*

[4] Rudin W.: *Functional Analysis.* Second edition, McGraw-Hill International Editions, 1991.