

Appunti di istituzioni di analisi superiore¹

Adriana Garroni

Sapienza a.a. 2016/17

¹Qui troverete le note solo delle parti di programma il cui svolgimento in aula si discosta molto dalle fonti citate (le dimostrazioni che si trovano su uno dei testi consigliati sono omesse). Gli esercizi qui riportati insieme ad altri verranno raccolti in un altro documento.

Indice

Introduzione

La necessità di formulazioni “deboli”

Molte equazioni differenziali alle derivate parziali, importanti per la fisica, sotto opportune condizioni, sono risolvibili esplicitamente con la determinazione di una funzione regolare che verifica puntualmente l'equazione. In generale c'è il problema di trovare una strategia che permetta di provare che una soluzione esista o addirittura per alcune equazioni non ci si può aspettare l'esistenza di soluzioni “in senso classico”.

Questa introduzione è una carrellata di esempi necessari a convincerci che può essere molto rilevante risolvere certe equazioni alle derivate parziali in un senso “più debole”, ossia senza aspettarsi che la soluzione ammetta tutte le derivate che sembrano essere necessarie per scrivere l'equazione.

Partiamo con un esempio molto classico. Consideriamo il *problema di Poisson-Dirichlet* in un dominio Ω (limitato) di \mathbb{R}^n

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

dove $\Delta u = \operatorname{div} \nabla u = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i x_i}^2 u$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Sappiamo già (dal corso di fisica matematica in cui è stata studiata un po' di teoria del potenziale) che questo problema ammette soluzioni per opportune scelte di *termini forzanti* f , *dati al bordo* g e domini Ω , e che questa soluzione può essere rappresentata attraverso la *funzione di Green* $G : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. La funzione di Green $G(x, y)$ formalmente (in realtà nel *senso delle distribuzioni*) verifica per ogni $y \in \Omega$ il seguente problema

$$\begin{cases} -\Delta G(\cdot, y) = \delta_y & \text{in } \Omega \\ G(\cdot, y) = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

Una volta nota la funzione di Green, la soluzione di (1.1) è data quindi da

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dx - \int_{\partial\Omega} g(y) \partial_{\nu} G(x, y) d\sigma(y). \quad (1.3)$$

Ammettendo che esista, sappiamo provare varie proprietà della funzione di Green, ma sappiamo costruirla esplicitamente solo per domini molto speciali (con molta simmetria), come la sfera o il semipiano. La domanda è quindi: possiamo dare senso alla soluzione di (1.2) per un dominio Ω più generale, in modo che valga ancora la formula di rappresentazione (1.3)? Sotto quali condizioni su f e g possiamo provare l'esistenza di una soluzione per (1.1)? Per esempio se f è una funzione discontinua in che classe di soluzioni dobbiamo cercare la soluzione?

Inoltre le tecniche viste per risolvere esplicitamente il problema (1.1) sfruttano in modo molto forte le buone proprietà del Laplaciano. La situazione si complica ulteriormente se al posto di questo si considera un operatore differenziale a coefficienti

non costanti, magari non regolari. L'equazione $\Delta u = 0$ (o $-\Delta u = f$) può essere infatti vista come la condizione di equilibrio per il potenziale elettrostatico di un mezzo omogeneo (con conducibilità costante). Supponiamo di avere una sbarra non omogenea (per esempio costituita per metà da un materiale e per l'altra metà di un altro materiale di conducibilità diversa). Allora la corrente sarà data da $j = a(x)\nabla u$ (dove $a(x)$ è la conducibilità della barra - eventualmente discontinua) e la sua condizione di equilibrio sarà $\operatorname{div}(a(x)\nabla u) = 0$ (che in dimensione 1 diventa $(a(x)u')' = 0$). Se a è discontinuo che senso dobbiamo dare a questa equazione? Del resto l'energia potenziale corrispondente

$$\int_{\Omega} a(x)|\nabla u|^2 dx$$

ha perfettamente senso e quindi il problema potrebbe essere espresso in termini dell'energia potenziale.

Vediamo in dettaglio il caso del problema di Dirichlet per dato al bordo $g \in C(\partial\Omega)$ e Ω regolare

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.4)$$

Si può vedere che se $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ è una soluzione di (1.4) allora questa minimizza il seguente problema

$$\min_{u=g \text{ su } \partial\Omega} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \quad (1.5)$$

In verità è vero che (1.4) e (1.5) sono equivalenti e questa equivalenza prende il nome di *principio di Dirichlet*. Proviamo a capire perchè questo è vero. Supponiamo che $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ sia un minimo di (1.5). Allora in particolare per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)^1$ si ha che la funzione

$$h(t) := \int_{\Omega} |\nabla u + t\nabla\varphi|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

ammette un minimo per $t = 0$. Svilgendo il quadrato si ottiene

$$h(t) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + 2t \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx + t^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx$$

e quindi

$$h'(0) = 2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx.$$

Poiché per $t = 0$ c'è un minimo si ha

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (1.6)$$

Se ora supponiamo che Ω abbia bordo abbastanza regolare per poter applicare la formula di Gauss Green (per esempio C^1), abbiamo che

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u)\varphi dx = \int_{\partial\Omega} \varphi \nabla u \cdot n d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx,$$

¹Con $C_c^\infty(\Omega)$ denotiamo le funzioni C^∞ con supporto compatto in Ω

dove n è la normale esterna al bordo di Ω , e quindi

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \Delta u \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (1.7)$$

Da questo si deduce che $\Delta u = 0$ (come segue facilmente del seguente esercizio), ossia che u verifica (1.4).

Esercizio 1.0.1. *Provare che se $\psi \in C(\Omega)$ soddisfa $\int_{\Omega} \psi \varphi \, dx = 0$ per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, allora $\psi = 0$.*

Anzi in realtà abbiamo provato che u è soluzione di (1.6) se e soltanto se è soluzione di (1.4). Infine è facile convincersi (con un argomento di approssimazione) che l'equazione (1.6) è soddisfatta per ogni funzione in $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ che valga zero sul bordo di Ω . E quindi per ogni $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, con $v = g$ su $\partial\Omega$ si ha

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla (u - v) \, dx = 0$$

da cui si deduce che u è anche minimo per (1.5).

Nota: Notare che le due riformulazioni (1.6) e (1.5) richiedono meno regolarità alla funzione u di quanto non sia richiesta per scrivere il problema (1.4).

Un percorso simile può essere fatto nel caso dell'equazione di Poisson. Anche in questo caso una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) \cap C_0(\Omega)^2$ che sia soluzione del problema di Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.8)$$

è anche minimo di

$$\min_{u=0} \text{su } \partial\Omega \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Omega} f u \, dx \quad (1.9)$$

e la corrispondente equazione in forma debole è

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (1.10)$$

In conclusione abbiamo visto come il problema (1.4) è equivalente al problema di minimo (1.5), quello che in generale non sappiamo ancora è se questi problemi ammettano una soluzione.

L'esistenza del minimo di (1.5) non è infatti scontata, come mostra il seguente esempio.

Esempio 1.0.2 (Esempio di Weierstrass). Consideriamo il seguente problema

$$\inf \left\{ \int_{-1}^1 x^2 |u'|^2 \, dx : u(-1) = -1, u(1) = 1, u \in C^1([-1, 1]) \right\} =: \inf I \quad (1.11)$$

Denotiamo con $I(u) = \int_{-1}^1 x^2 |u'|^2 \, dx$ e cerchiamone il minimo tra le funzioni C^1 con valori al bordo assegnati. È chiaro che $\inf I \geq 0$. Se esibiamo una successione $u_n \in C^1([-1, 1])$ tale che $I(u_n) \rightarrow 0$, proviamo che $\inf I = 0$ è che non è raggiunto

²Dove $C_0(\Omega)$ è la chiusura rispetto alla norma di $C_c(\Omega)$ e coincide con le funzioni continue fin sul bordo che assumono valore 0 su $\partial\Omega$

(non è un minimo) perchè altrimenti ci dovrebbe essere una funzione $C^1([-1, 1])$, con $u' = 0$ q.o. e $u(-1) = -1$ e $u(1) = 1$, il che non è possibile. È facile convincersi che si può costruire una successione $u_n \in C^1([-1, 1])$ che verifichi $u_n(x) = -1$ se $x < -\frac{1}{n}$, $u_n(x) = 1$ se $x > \frac{1}{n}$ e $|u_n'| \leq 2n$ (lasciato per esercizio), quindi tale che

$$I(u_n) = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} x^2 |u_n'|^2 dx \leq 4n^2 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} x^2 dx = \frac{2}{3n} \rightarrow 0 \quad \text{se } n \rightarrow \infty.$$

Vediamo un altro esempio.

Esempio 1.0.3 (Il potenziale a doppia buca). Consideriamo il funzionale

$$I(u) = \int_{-1}^1 (1 - |u'|^2)^2 dx$$

con la condizione $u(-1) = u(1) = 0$. Riusciamo a capire cosa dobbiamo aspettarci dalla soluzione se trascuriamo il vincolo che u' sia una derivata e minimizziamo su tutte le funzioni sommabili

$$\int_{-1}^1 (1 - |v|^2)^2 dx.$$

con il vincolo $\int_{-1}^1 v dx = 0$ (che traduce la condizione $u(-1) = u(1)$). È facile convincersi che in questo caso il minimo esiste ed è dato per esempio dalla funzione $v(x) = \chi_{[0,1]} - 1$, e quindi la funzione Lipschitz $u(x) = 1 - |x|$ è derivabile quasi ovunque e verifica $I(u) = 0 = \min I$. Insomma in questo caso la classe delle funzioni continue con derivata quasi ovunque è una buona classe su cui minimizzare.

Nota: Osserviamo che il problema esposto nell'esempio precedente (minimizzando per esempio tra le funzioni Lipschitziane - e quindi, come vedremo, derivabili quasi ovunque) non ha minimo unico. Infatti dato n pari tutte la funzione della forma

$$\tilde{u}_n(x) = \frac{1}{2n} - \left| x - \frac{2k+1}{2n} \right| \quad \text{se } x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{(k+1)}{n} \right], \quad k = -n+1, \dots, n-1 \quad (1.12)$$

verificano le condizioni al bordo e $I(u_n) = 0$, ossia sono minimi.

L'osservazione precedente ci dà anche lo spunto per mostrare un altro esempio notevole, che chiarisce che il problema di trovare il minimo (di un funzionale positivo) non è scontato e non dipende solo dalla classe di funzioni su cui si minimizza.

Esempio 1.0.4 (Esempio di Bolza). Aggiungiamo un altro termine al funzionale a doppia buca e definiamo

$$\tilde{I}(u) = \int_{-1}^1 (1 - |u'|^2)^2 dx + \int_{-1}^1 |u|^2 dx.$$

È facile vedere che la successione \tilde{u}_n definita in (1.12) converge uniformemente a zero e che quindi $\tilde{I}(\tilde{u}_n) = \int_{-1}^1 |\tilde{u}_n|^2 dx \rightarrow 0$. Quindi

$$\inf_{u(-1)=u(1)=0} \tilde{I}(u) = 0$$

non è raggiunto perchè non esiste alcuna funzione derivabile q.o. che verifica $u = 0$ q.o. e $|u'| = 1$ q.o.

Quelli visti sono solo alcuni esempi per illustrare il problema della determinazione della soluzione di problemi variazionali anche molto classici. Abbiamo visto che a volte non dobbiamo aspettarci che tale soluzione sia regolare o che addirittura esista. Così come abbiamo osservato che a volte per dare senso al problema sia necessario riformularlo. La soluzione di questi problemi richiede di abbandonare l'idea di mostrare direttamente l'esistenza di soluzioni "classiche", e di adottare un nuovo paradigma:

1. Trovare un'opportuna *formulazione debole* (le funzioni possono essere meno regolari e verificare una condizione apparentemente meno forte, come nel caso di (1.6) per il problema di Dirichlet)
2. Trovare strumenti funzionali e topologici che garantiscano *l'esistenza di una soluzione debole* (si pensi alla completezza per il teorema delle contrazioni o alla compattezza per il teorema di Weierstrass)
3. Eventualmente provare risultati di regolarità per le soluzioni deboli (che quindi ci permettano di tornare al problema classico).

Il teorema fondamentale del calcolo

Consideriamo il problema

$$\min_{u(0)=0, u(1)=1} \int_0^1 |u'(x)|^2 dx. \quad (2.1)$$

Domanda: Su quale classe di funzioni possiamo minimizzare in modo da ottenere un risultato “soddisfacente”?

Abbiamo visto esempi in cui chiedere che la funzione u fosse continua e derivabile q.o. (magari anche con derivata L^2) sembrava un buon punto di partenza. Infatti queste sembrano le richieste minimi per poter formulare il problema e per dargli una ragionevole interpretazione. La continuità infatti sembra naturale (se si $\int_0^1 |u'|^2 dx$ come l'energia cinetica ci aspettiamo che lo spostamento u sia continuo).

La cosa sorprendente è che questa in generale non è una buona scelta, infatti esiste una funzione definita e continua in $[0, 1]$, che verifica $u(0) = 0$ e $u(1) = 1$, ma per cui $u' = 0$ q.o. (ossia uno spostamento continuo da 0 a 1 che avviene stando “quasi sempre fermi”). Questa è la famosa funzione di Cantor-Vitali. Il punto di partenza è l'insieme di Cantor che si costruisce iterativamente partendo dall'intervallo $[0, 1]$, dividendolo in tre e rimuovendo l'intervallo centrale, ossia definendo $C_1 = [0, 1] \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) := I_{1,1}$ (poniamo $I_{1,1} := (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$). Quindi dividendo i due intervalli che rimangono ancora in tre e rimuovendo gli intervalli centrali, $C_2 = C_1 \setminus ((\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}))$ (ponendo $I_{1,2} \cap I_{2,2} := (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$). E così via si costruiscono i compatti C_n .

L'insieme di Cantor è dato da

$$C = \bigcap_n C_n.$$

Esercizio 2.0.1. *Mostrare che C non è numerabile e ha misura di Lebesgue nulla.*

Suggerimento: Usare il fatto che $x \in C$ se e soltanto se $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ con $a_n \in \{0, 2\}$.

Osservazione 2.0.2. *L'insieme di Cantor si ottiene anche come punto fisso della mappa $T(I) = S_1(I) \cup S_2(I)$, con $S_1(x) = \frac{x}{3}$ e $S_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$. Si ha che $C_n = T^n([0, 1])$ e che $T(C) = C$.*

La funzione di Cantor-Vitali si definisce come limite di una successione di funzioni monotone non decrescenti costanti sul complementare di C_n , definita per ricorrenza nel seguente modo

$$F_0(x) = x \quad F_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}F_n(3x) & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{se } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}F_n(3(x - \frac{2}{3})) + \frac{1}{2} & \text{se } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Esercizio 2.0.3. *Mostrare che la successione F_n è di Cauchy rispetto alla norma del sup.*

Suggerimento: Provare che $|F_n(x) - F_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{3 \cdot 2^n}$

Essendo F_n di Cauchy nella norma del sup, deduciamo che converge uniformemente a una qualche F che è la funzione di Cantor-Vitali. Da come l'abbiamo costruita deduciamo che:

1. La funzione F è continua (essendo limite uniforme di funzioni continue);
2. La funzione F è costante sugli intervalli $I_{k,n}$ che si devono togliere da C_{n-1} per ottenere C_n . Quindi è derivabile q.o. con derivata nulla ($F' = 0$ q.o.).
3. La funzione F è monotona non decrescente (perchè limite di funzioni monotone non decrescenti).

Esercizio 2.0.4. *Mostrare che la funzione $\frac{F(x)+x}{2}$ è un omeomorfismo di $[0, 1]$ in $[0, 1]$.*

La presenza di questa strana funzione chiarisce che il problema (2.1) minimizzato sulle funzioni continue e derivabili quasi ovunque non è “ben posto”. Ci suggerisce cioè che la continuità non è una proprietà abbastanza buona.

Ciò che rende questa soluzione “non fisica” è che

$$0 = \int_0^1 F'(x) dx < F(1) - F(0) = 1, \quad (2.2)$$

ossia non vale il teorema fondamentale del calcolo.

È quindi naturale domandarsi quale sia la classe di funzioni per cui invece il teorema fondamentale del calcolo vale.

Andiamo per gradi. Nelle prossime sessioni daremo una risposta alle seguenti due domande:

1. Data $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sommabile, è vero che la funzione integrale associata è derivabile quasi ovunque e vale

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad \text{q.o. in } (a, b) ?$$

2. Per quali funzioni F vale che

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a) ?$$

Osserviamo che qualsiasi funzione sommabile si può scrivere come $f = f^+ - f^-$ dove f^+ e f^- sono due funzioni non negative che denotano rispettivamente la parte positiva e la parte negativa di f . Di conseguenza la funzione integrale $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ si può scrivere come

$$\Phi(x) = \Phi_+(x) - \Phi_-(x) := \int_a^x f^+(t) dt - \int_a^x f^-(t) dt$$

dove Φ_+ e Φ_- sono entrambe monotone non decrescenti. È chiaro quindi che nel rispondere alla domanda 1 un ruolo importante è giocato dalle funzioni monotone.

Esercizio 2.0.5. *Se f è una funzione monotona non decrescente su $[a, b]$, allora è misurabile e limitata (quindi sommabile).*

Suggerimento: *Notare che gli insiemi $\{x : f(x) < c\}$ sono degli intervalli.*

Esercizio 2.0.6. *Notare che le funzioni monotone su $[a, b]$ hanno solo discontinuità di salto (di prima specie). Inoltre mostrare che l'insieme delle discontinuità di una funzione monotona è al più numerabile.*

Suggerimento: *Stimare la cardinalità dell'insieme dei punti di discontinuità con salto maggiore o uguale a $1/n$, al variare di n e usare che la somma dei salti è controllata da $|f(b) - f(a)|$.*

Un esempio interessante di funzioni monotone sono le *funzioni di salto*. Queste sono costruite nel seguente modo. Fissiamo un insieme numerabile in $[a, b]$ (notare che un insieme numerabile può essere molto “brutto”, per esempio può essere denso) e indicizziamo i punti di questo insieme

$$x_1, \dots, x_n, \dots$$

e fissiamo una successione di numeri positivi h_n che verifichino $\sum_{n=1}^{\infty} h_n < \infty$. La funzione di salto corrispondente sarà data da

$$H(x) = \sum_{x < x_n} h_n. \quad (2.3)$$

Esercizio 2.0.7. *Mostrare che la funzione di salto H definita in (2.3) è monotona non decrescente e continua a sinistra. Come l'avrei dovuta definire in modo che venga continua a destra?*

Esercizio 2.0.8. *Mostrare che se f è una funzione continua a sinistra e monotona non decrescente, allora si può scrivere come*

$$f(x) = H(x) + G(x),$$

dove H è una funzione di salto continua a sinistra e G è continua.

Suggerimento: *Si costruisca H come nell'Esercizio 2.0.7.*

2.1 Differenziabilità delle funzioni monotone

Il risultato cruciale di questa sezione è il Teorema di Lebesgue sulla differenziabilità delle funzioni monotone.

Teorema 2.1.1. *Sia f una funzione reale monotona non decrescente su $[a, b]$, allora f è derivabile q.o. su $[a, b]$ e la sua derivata f' è sommabile e verifica*

$$\int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a). \quad (2.4)$$

Osservazione 2.1.2. *È chiaro che lo stesso risultato vale per le funzioni g non crescenti (basta applicare il teorema precedente a $f = -g$), con la disuguaglianza in (2.4) invertita.*

Il punto di partenza per la dimostrazione è naturale. Si considerano le seguenti quanti (derivate superiori e inferiori destre e sinistre)

$$\begin{aligned} D^+ f(x) &:= \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ D^- f(x) &:= \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \\ D_+ f(x) &:= \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ D_- f(x) &:= \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Evidentemente queste sono sempre ben definite in $[a, b]$. Per provare il risultato principale, ossia che q.o. in $[a, b]$ esista il limite del rapporto incrementale, basta quindi mostrare che

$$D^+ f(x) = D^- f(x) = D_+ f(x) = D_- f(x) \quad x \text{ q.o. in } [a, b].$$

Osservazione 2.1.3. *In generale vale*

$$D^+ f(x) \geq D_+ f(x) \quad D^- f(x) \geq D_- f(x). \quad (2.6)$$

E quindi se dimostriamo che per ogni funzione f monotona non decrescente vale

$$D_- f(x) \geq D^+ f(x) \quad \text{q.o. in } (a, b) \quad (2.7)$$

questo è sufficiente per concludere che esiste il $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ q.o. in (a, b) . Infatti basta considerare la funzione $g(x) = -f(a-x)$. La funzione g è non decrescente in $(a-b, 0)$ e quindi $D_- g(x) \geq D^+ g(x)$ q.o. in (a, b) . Poichè $D_- g(a-x) = D^+ f(x)$ e $D^+ g(a-x) = D^- f(x)$, da cui si deduce

$$D^+ f(x) \geq D_+ f(x) \geq D^- f(x) \geq D_- f(x) \geq D^+ f(x).$$

Per dimostrare (2.7) si fa uso di un “argomento di ricoprimento” molto potente che permette di approssimare insiemi qualsiasi, anche molto complicati, con unioni di intervalli disgiunti, in modo da estendere proprietà locali (ossia valide nell’intorno di ogni punto) a quasi tutto l’insieme.

Denotiamo con $\overline{m}(E)$ la misura esterna di E in \mathbb{R}^n definita come

$$\overline{m}(E) = \inf\{m(A) : \text{con } A \text{ aperto e } , A \supset E\}, \quad (2.8)$$

dove $m(A)$ denota la misura di Lebesgue di A . Ricordiamo che \overline{m} è subadditiva e monotona e verifica

$$\overline{m}(E \cup B) = \overline{m}(E) \quad \text{se } \overline{m}(B) = m(B) = 0. \quad (2.9)$$

Definizione 2.1.4. *Diciamo che una collezione di intervalli \mathcal{I} è un ricoprimento fine di E nel senso di Vitali (o è un ricoprimento fine di E) se per ogni $x \in E$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $I \in \mathcal{I}$ tale che $x \in I$ e $m(I) < \varepsilon$.*

Lemma 2.1.5 (Lemma di Vitali). *Sia E un insieme di misura di Lebesgue esterna finita, $\overline{m}(E) < +\infty$, e sia \mathcal{I} un ricoprimento di E nel senso di Vitali. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una collezione finita I_1, \dots, I_N di intervalli disgiunti di \mathcal{I} tali che*

$$\overline{m}\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^N I_i\right) < \varepsilon. \quad (2.10)$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che gli intervalli di \mathcal{I} siano chiusi, infatti una volta ottenuta la tesi con intervalli chiusi si può ottenere anche la tesi con intervalli della collezione originale rimuovendo alcuni degli estremi degli intervalli I_i che formano un insieme di misura nulla e che quindi grazie a (2.9) non modificano la tesi.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiché E ha misura esterna finita, possiamo scegliere A aperto che contiene E e tale che $m(A) < +\infty$. Sempre senza perdere in generalità possiamo supporre che tutti gli intervalli di \mathcal{I} siano contenuti in A (infatti è facile verificare che se consideriamo solo gli intervalli $I \in \mathcal{I}$ che sono contenuti in A , questo è ancora un ricoprimento fine di E perché A è aperto e contiene E). Ora costruiamo una successione di intervalli disgiunti $I_i \in \mathcal{I}$ con un procedimento iterativo: fissiamo $I_0 \in \mathcal{I}$ arbitrariamente e supponiamo di aver già costruito n intervalli disgiunti I_1, \dots, I_n . Se $E \subseteq \cup_{i=1}^n I_i$ abbiamo concluso la dimostrazione e il procedimento si interrompe, altrimenti definiamo

$$k_n = \sup\{m(I) : I \in \mathcal{I}, I \cap I_i = \emptyset \quad \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Poiché per ogni $I \in \mathcal{I}$ si ha $I \subset A$, allora $k_n \leq m(A) < +\infty$. Poiché stiamo supponendo che $E \setminus (\cup_{i=1}^n I_i) \neq \emptyset$ si ha che $k_n > 0$ e per definizione di k_n possiamo trovare un intervallo I_{n+1} disgiunto da $\cup_{i=1}^n I_i$ e che verifica

$$m(I_{n+1}) > \frac{k_n}{2}.$$

Quindi a meno che questo procedimento non si interrompa per un qualche n (è la dimostrazione sia conclusa) costruiamo una successione di intervalli disgiunti I_n con $m(I_{n+1}) > \frac{k_n}{2}$ e tali che $\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) \leq m(A) < +\infty$. Quindi, poiché la serie delle misure degli intervalli converge, possiamo trovare $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} m(I_i) < \frac{\varepsilon}{5} \quad (2.11)$$

(il 5 c'è perché sappiamo già come va a finire). Vogliamo mostrare che questo basta per provare che $R = E \setminus \cup_{i=1}^N I_i$ ha misura esterna piccola, precisamente

$$\overline{m}(R) < \varepsilon, \quad (2.12)$$

e questo è possibile se riusciamo a costruire un ricoprimento di intervalli aperti di R che abbia misura complessiva inferiore a ε .

Prendiamo $x \in R$, poiché $x \notin \cup_{i=1}^N I_i$ e $\cup_{i=1}^N I_i$ è un insieme chiuso, possiamo trovare un intervallo $I \in \mathcal{I}$ tale che I sia disgiunto da $\cup_{i=1}^N I_i$ e $x \in I$. Inoltre se $I \cap I_i = \emptyset$ per ogni $i = 1, \dots, n$, allora per definizione di k_n si ha che

$$m(I) \leq k_n \leq 2m(I_{n+1}).$$

Ma grazie a (2.11) sappiamo che $m(I_n) \rightarrow 0$, per $n \rightarrow \infty$, e quindi deve esistere $\bar{n} > N$ tale che

$$I \cap I_{\bar{n}} \neq \emptyset \quad \text{e} \quad m(I) \leq k_{\bar{n}-1} \leq 2m(I_{\bar{n}}) \quad (2.13)$$

(ossia \bar{n} è il più piccolo indice per cui $I \cap I_{\bar{n}} \neq \emptyset$). Ora se chiamiamo con x_n il centro di I_n , poiché $x \in I$ si ha

$$\text{dist}(x, x_{\bar{n}}) \leq \frac{1}{2}m(I_{\bar{n}}) + m(I) \leq \frac{5}{2}m(I_{\bar{n}}).$$

Quindi $x \in J_{\bar{n}} := [x_{\bar{n}} - \frac{5}{2}m(I), x_{\bar{n}} + \frac{5}{2}m(I)]$. Questo lo possiamo fare per ogni $x \in R$ e quindi $R \subseteq \cup_{i=N+1}^{\infty} J_i$, da cui deduciamo

$$\bar{m}(R) \leq \sum_{i=N+1}^{\infty} m(J_i) = \sum_{i=N+1}^{\infty} 5m(I_i) < \varepsilon,$$

che conclude la dimostrazione. \square

Ora siamo pronti ad affrontare la dimostrazione del Teorema di Lebesgue.

Dimostrazione del Teorema 2.1.1. La dimostrazione i fa in due passi. Il primo passo essenziale è provare che esiste q.o. il limite del rapporto incrementale. Quindi mostrare che questo è finito q.o. e integrabile, e verifica (2.4). Come abbiamo già notato nell'Osservazione 2.1.3 per mostrare che esiste q.o. il limite del rapporto incrementale è sufficiente provare che q.o. $D^+f(x) \leq D_-f(x)$. A questo scopo fissiamo $\alpha > \beta$, razionali, e definiamo l'insieme

$$E_{\alpha,\beta} := \{x \in [a, b] : D^+f(x) > \alpha > \beta > D_-f(x)\}. \quad (2.14)$$

Se mostriamo che $\bar{m}(E_{\alpha,\beta}) = 0$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, con $\alpha > \beta$, concludiamo che $D^+f(x) \leq D_-f(x)$ q.o. in $[a, b]$.

Passo 1. Poniamo $\bar{m}(E_{\alpha,\beta}) = s$, l'obiettivo è provare che $s = 0$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per definizione di misura esterna possiamo trovare un aperto $A \supseteq E_{\alpha,\beta}$ tale che $m(A) \leq s + \varepsilon$.

Ora se $x \in E_{\alpha,\beta}$ si ha che $D_-f(x) < \beta$ e quindi esiste una successione infinitesima di h tale che

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h} < \beta \quad (2.15)$$

Inoltre, poiché A è aperto, possiamo supporre anche che per tali h si abbia $[x-h, x] \subseteq A$. Gli intervalli così definiti al variare di x formano un ricoprimento di Vitali di $E_{\alpha,\beta}$ e quindi per il lemma di ricoprimento è possibile trovare x_1, \dots, x_N e h_1, \dots, h_N tali che gli intervalli $I_n = [x_n - h_n, x_n]$, con $n = 1, \dots, N$, sono disgiunti,

$$f(x_n) - f(x_n - h_n) < h_n \beta \quad (2.16)$$

e

$$\bar{m}(E_{\alpha,\beta} \setminus \cup_{i=1}^N I_i) < \varepsilon. \quad (2.17)$$

In particolare se $B = \cup_{i=1}^N (x_i - h_i, x_i) \cap E_{\alpha,\beta}$, si ha che $\bar{m}(B) \geq s - \varepsilon$. Da (2.16) si deduce che

$$\sum_{i=1}^N f(x_i) - f(x_i - h_i) < \beta \sum_{i=1}^N h_i < \beta m(A) < \beta(s + \varepsilon). \quad (2.18)$$

Adesso costruiamo un ricoprimento di Vitali di B . Per ogni $y \in B$ (quindi $y \in (x_n - h_n, x_n)$ per qualche n e $y \in E_{\alpha,\beta}$) possiamo trovare una successione infinitesima di k per cui $J = (y, y+k) \subseteq I_n$, per qualche $n = 1, \dots, N$ e

$$\frac{f(y+k) - f(y)}{k} > \alpha. \quad (2.19)$$

La collezione di intervalli della forma $(y, y+k)$ al variare di $y \in B$ sono dunque un ricoprimento nel senso di Vitali di B . Allora esistono y_1, \dots, y_M in B e k_1, \dots, k_M

tali che gli intervalli $J_i = (y_1, y_i + k_i)$, al variare di $i = 1, \dots, M$, sono disgiunti e $\overline{m}(B \setminus \cup_{i=1}^M J_i) < \varepsilon$. Quindi

$$\sum_{i=1}^M k_i \geq \overline{m}(B \cap \cup_{i=1}^M J_i) \geq \overline{m}(B) - \overline{m}(B \setminus \cup_{i=1}^M J_i) \geq s - 2\varepsilon \quad (2.20)$$

e quindi grazie a (2.19) si ha

$$\sum_{i=1}^M f(y_i + k_i) - f(y_i) > \alpha \sum_{i=1}^M k_i \geq \alpha(s - 2\varepsilon). \quad (2.21)$$

Ora per ogni fissato $n = 1, \dots, N$, grazie alla monotonia di f si può stimare la somma di tutti gli incrementi di f sugli intervalli $J_i \subset I_n$, con l'incremento di f agli estremi di I_n , ossia

$$\sum_{\{i: J_i \subset I_n\}} f(y_i + k_i) - f(y_i) \leq f(x_n) - f(x_n - h_n) \quad (2.22)$$

e quindi sommando su tutti gli n e usando (2.21) e (2.18) si ha

$$\alpha(s - 2\varepsilon) \sum_{i=1}^M f(y_i + k_i) - f(y_i) \leq \sum_{n=1}^N f(x_n) - f(x_n - h_n) \leq \beta(s + \varepsilon). \quad (2.23)$$

Dall'arbitrarietà di ε si deduce quindi

$$\alpha s \leq \beta s,$$

ma visto che $\alpha > \beta$ si ottiene come volevamo $s = 0$ e quindi (anche tenendo conto dell'Osservazione 2.1.3) abbiamo che esiste q.o. in $[a, b]$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =: g(x) \geq 0.$$

Passo 2 Mostriamo ora che il limite del rapporto incrementale è sommabile e quindi quasi ovunque finito. Questo ci permetterà di scrivere $g(x) = f'(x)$ e di dedurre (2.14).

Estendiamo $f(x) = f(b)$ se $x > b$ e per ogni $x, c \in [a, b]$ e $h > 0$ denotiamo con

$$D_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{Av}_h(f, c) = \frac{1}{h} \int_c^{c+h} f(x) dx$$

il rapporto incrementale di f (o derivata discreta) e la sua media su $(c, c+h)$. con un semplice cambio di variabili è immediato vedere che

$$\int_a^b D_h f(x) dx = \text{Av}_h(f, b) - \text{Av}_h(f, a) \quad (2.24)$$

e quindi usando la monotonia di f si ha

$$\int_a^b D_h f(x) dx \leq f(b) - f(a). \quad (2.25)$$

Passando quindi al limite per $h \rightarrow 0$ e usando il Lemma di Fatou, per passare al limite sotto il segno di integrale, otteniamo

$$\int_a^b g(x) dx \leq \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b D_h f(x) dx \leq f(b) - f(a).$$

Quindi g è sommabile, q.o finita e dunque $g = f'$ q.o. in $[a, b]$ e vale (2.14). \square

Osservazione 2.1.6. *In generale non è vero che una funzione derivabile q.o. ha derivata sommabile. Come esempio è facile vedere che la derivata di*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

non è sommabile in $[-1, 1]$.

Osservazione 2.1.7. *La disuguaglianza (2.14) in generale può essere stretta (per esempio la funzione di Cantor Vitali vista in precedenza non verifica l'uguaglianza - cfr. (2.2)) quindi in generale le funzioni monotone (se pur derivabili quasi ovunque) non verificano il teorema fondamentale del calcolo.*

Esercizio 2.1.8. *Sia F_n una successione di funzioni monotone definite in $[a, b]$ tali che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) = F(x) \quad \forall x \in [a, b],$$

ossia la cui serie è convergente in tutti i punti. Proviamo in vari passi che

$$\sum_{n=1}^{\infty} F'_n(x) = F'(x) \quad \forall \text{ q.o. in } [a, b].$$

1. *Mostrare che, da qui in poi, non è restrittivo supporre che $F_n(x) \geq 0$ e $F_n(a) = 0$.*
2. *Mostrare che per ogni $N \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{n=1}^N F'_n(x) \leq F'(x) \quad \forall \text{ q.o. in } [a, b].$$

Suggerimento: Scrivere la somma dei rapporti incrementali di F_n e stimarla con il rapporto incrementale di F usando la monotonia e la convergenza della serie delle F_n , quindi passare al limite nell'incremento.

3. *Mostrare che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} F'_n(x) \leq F'(x) \quad \forall \text{ q.o. in } [a, b].$$

In particolare la serie $\sum_n F'_n(x)$ converge q.o. in $[a, b]$.

4. *Mostrare che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k \in \mathbb{N}$ tale che*

$$0 \leq \sum_{n > n_k} F_n(x) < \frac{1}{2^k} \quad \text{uniformemente in } x$$

Suggerimento: Usare la convergenza della serie in b e la monotonia.

5. Concludere che

$$\sum_{n=1}^{\infty} F'_n(x) = F'(x) \quad \forall \text{ q.o. in } [a, b].$$

Suggerimento: Applicare il punto 2 alla serie $\sum_k G_k(x)$ con $G_k(x) = F(x) - \sum_{n \leq n_k} F_n(x)$. La tesi segue dalla convergenza della serie $\sum G'_k(x)$.

Esercizio 2.1.9. Usare l'Esercizio 2.1.8 per provare che data $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $h_n > 0$ tale che $\sum_n h_n < \infty$ la funzione di salto $H(x) = \sum_{x_n < x} h_n$ ha derivata q.o. nulla.

Corollario 2.1.10 (del Teorema 2.1.1). Se $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è sommabile, allora esiste q.o la derivata della funzione integrale

$$\int_a^x \varphi(t) dt.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è una diretta conseguenza del Teorema 2.1.1 una volta osservato che si può scrivere $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, come differenza tra la sua parte positiva e la sua parte negativa, e che le corrispondenti funzioni integrali sono funzioni monotone non decrescenti. \square

2.2 Funzioni a variazione limitata

Abbiamo quindi capito che tutte le funzioni che sono differenza di due funzioni monotone sono derivabili quasi ovunque. In questa sezione caratterizzeremo ulteriormente queste funzioni.

Data una partizione $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dell'intervallo $[a, b]$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definiamo

$$V(f, P) = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

Definizione 2.2.1 (Variazione totale). Chiamiamo variazione totale di f in $[a, b]$ la quantità

$$\text{Var}(f, [a, b]) = \sup \{V(f, P) : P \text{ partizione di } [a, b]\}.$$

Definizione 2.2.2 (Funzioni a variazione limitata). Diciamo che una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è a variazione limitata in $[a, b]$ ¹ se

$$\text{Var}(f, [a, b]) < +\infty.$$

Esempi 2.2.3.

1. Se f è una funzione monotona, allora è a variazione limitata e

$$\text{Var}(f, [a, b]) = |f(b) - f(a)|.$$

Infatti se per esempio f è non decrescente, per ogni partizione P si ha

$$V(f, P) = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(b) - f(a).$$

¹In seguito indicheremo lo spazio delle funzioni a variazione limitata con $BV([a, b])$ (BV sta per *bounded variation*).

2. Una funzione Lipschitz è a variazione limitata. Infatti $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ per ogni $x, y \in [a, b]$ e quindi data una partizione P si ha

$$V(f, P) = \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq L \sum_{i=1}^n |x_i - x_{i-1}| = L \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = b - a.$$

Da cui si ottiene che $\text{Var}(f, [a, b]) \leq L(b - a)$. In particolare la funzione di Cantor-Vitali è a variazione limitata.

3. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è continua in $[0, 1]$ ma non è a variazione limitata. Infatti prendiamo la partizione

$$P_n = \left\{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}.$$

È facile vedere che

$$V(f, P_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \rightarrow +\infty \quad \text{se } n \rightarrow +\infty$$

da cui deduciamo che $\text{Var}(f, [0, 1]) = +\infty$.

Osservazione 2.2.4. L'insieme delle funzioni a variazione limitata è uno spazio vettoriale. Infatti è facile vedere, usando la disuguaglianza triangolare, che date $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per ogni partizione P vale

$$V(\alpha f + \beta g, P) \leq |\alpha|V(f, P) + |\beta|V(g, P)$$

e quindi

$$\text{Var}(\alpha f + \beta g, [a, b]) \leq |\alpha|\text{Var}(f, [a, b]) + |\beta|\text{Var}(g, [a, b])$$

che implica che $\alpha f + \beta g$ è a variazione limitata se f e g lo sono.

Inoltre è facile vedere che $\text{Var}(f, [a, b]) = 0$ se e solo se f è costante e che $\text{Var}(\alpha f, [a, b]) = |\alpha|\text{Var}(f, [a, b])$ (provarlo per esercizio). In particolare questo implica che la variazione totale è una seminorma sullo spazio delle funzioni a variazione limitata.

Osserviamo che se P è una partizione di $[a, b]$ e aggiungiamo a P un altro punto $c \in (a, b)$, la partizione P' così ottenuta è un raffinamento della partizione P e quindi grazie alla disuguaglianza triangolare si ha

$$V(f, P) \leq V(f, P'),$$

da cui deduciamo che nel definire $\text{Var}(f, [a, b])$ otteniamo lo stesso risultato se facciamo il sup sulle partizioni che contengono c . D'altronde a una qualsiasi partizione P che contiene c sono associate due partizioni P_1 e P_2 , rispettivamente di $[a, c]$ e $[c, b]$. Da questa considerazione deduciamo che

$$\text{Var}(f, [a, b]) = \text{Var}(f, [a, c]) + \text{Var}(f, [c, b]). \quad (2.26)$$

In particolare se $x_1 < x_2$

$$\text{Var}(f, [a, x_2]) - \text{Var}(f, [a, x_1]) = \text{Var}(f, [x_1, x_2]) \geq 0$$

e quindi la funzione $x \rightarrow \text{Var}(f, [a, x])$ è monotona non decrescente. Inoltre

$$f(x_2) - f(x_1) \leq |f(x_2) - f(x_1)| \leq \text{Var}(f, [x_1, x_2]) = \text{Var}(f, [a, x_2]) - \text{Var}(f, [a, x_1]),$$

da cui deduciamo anche che la funzione $x \rightarrow f(x) + \text{Var}(f, [a, x])$ è monotona non decrescente. In conclusione abbiamo dimostrato il seguente risultato di decomposizione di Jordan.

Teorema 2.2.5 (decomposizione di Jordan). *Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è a variazione limitata se e soltanto se si scrive come la differenza di due funzioni non decrescenti.*

Dimostrazione. Da quanto già osservato se $f = h - g$ con h e g monotone non decrescenti, poiché sia h che g sono a variazione limitata perché monotone, allora anche f lo è (grazie all'Osservazione 2.2.4).

Viceversa se f è a variazione limitata, allora possiamo scrivere

$$f(x) = (f(x) + \text{Var}(f, [a, x])) - \text{Var}(f, [a, x])$$

che per quanto appena visto è una differenza di funzioni non decrescenti. \square

Corollario 2.2.6. *Se f è a variazione limitata in $[a, b]$ allora f è derivabile q.o. e f' è sommabile.*

Dimostrazione. La dimostrazione è una diretta conseguenza del teorema di decomposizione di Jordan (Teorema 2.2.5) e il teorema di Lebesgue di derivabilità delle funzioni monotone (Teorema 2.1.1). \square

Osserviamo che il teorema di decomposizione implica anche che le funzioni integrali di funzioni sommabili sono funzioni a variazione limitata (infatti si possono sempre scrivere come differenza di due funzioni non decrescenti, cfr. dimostrazione del Corollario 2.1.10)

Esercizio 2.2.7. *Data $f(x) = \sin x$ in $[0, 2\pi]$, trovare due funzioni monotone non decrescenti h e g tali che $f(x) = h(x) - g(x)$.*

Esercizio 2.2.8. *Sia f_n una successione di funzioni su $[a, b]$ che converge puntualmente a f in $[a, b]$. Provare che*

$$\text{Var}(f, [a, b]) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \text{Var}(f_n, [a, b]).$$

Mostrare con un esempio che anche se f_n converge uniformemente può valere la disuguaglianza stretta.

Esercizio 2.2.9. *Dati α e β positivi e $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^\beta}\right) & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Provare che se $\alpha > \beta$, allora f è a variazione limitata in $[0, 1]$, mostrando che f' è sommabile in $[0, 1]$. Provare che se $\alpha \leq \beta$, allora f non è a variazione limitata in $[0, 1]$.

Suggerimento: Usare per il primo punto che la funzione è $C^1((0, 1)) \cap C([0, 1])$ e quindi vale il teorema fondamentale del calcolo. Per il secondo punto trovare una successione di partizioni per cui la variazione non viene limitata.

Esercizio 2.2.10. Fissiamo un insieme numerabile di \mathbb{R} , $\{x_n\}_n$. Consideriamo una funzione di salto della forma

$$f(x) = \sum_{x_n < x} h_n + \sum_{x_n \leq x} k_n$$

con $h_n, k_n \in \mathbb{R}$ (non necessariamente positivi)² e tali che $\sum_n |h_n| < \infty$ e $\sum_n |k_n| < \infty$.

1. Mostrare che f è una funzione a variazione limitata.
2. Scrivere in questa forma la funzione

$$f(x) \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 2 & x > 0. \end{cases}$$

3. Mostrare che $f' = 0$ q.o.

Definizione 2.2.11. Una funzione a variazione limitata la cui derivata è nulla q.o. si dice *singolare*.

Quindi l'esercizio precedente ci dice che le funzioni di salto sono singolari. Sappiamo che anche la funzione di Cantor-Vitali ha derivata q.o. nulla, quindi anch'essa è singolare.

2.3 La derivata della funzione integrale

Abbiamo visto che se φ è sommabile in $[a, b]$ allora la funzione integrale

$$F(x) := \int_a^x \varphi(t) dt \tag{2.27}$$

si scrive come differenza di due funzioni monotone non decrescenti (e quindi in particolare è una funzione a variazione limitata), da cui deduciamo che F è derivabile q.o. Ora proviamo che la derivata di F fa la cosa giusta ossia

$$F'(x) = \varphi(x) \quad \text{q.o. in } [a, b].$$

Per la dimostrazione abbiamo bisogno di un piccolo lemma tecnico (a cui non è difficile credere).

Lemma 2.3.1. Si f una funzione sommabile in $[a, b]$ e supponiamo che

$$\int_a^x f(t) dt = 0 \quad \forall x \in [a, b], \tag{2.28}$$

allora $f = 0$ q.o. in $[a, b]$.

²Notare che $\sum_{x_n \leq x} k_n$ è una funzione continua a destra mentre $\sum_{x_n < x} k_n$ è una funzione continua a sinistra.

Dimostrazione. Sia $E = \{x \in [a, b] : f(x) > 0\}$. Supponiamo che $m(E) > 0$, altrimenti la conclusione segue immediatamente dal fatto che $\int_a^b f(x) dx = -\int_a^b |f(x)| dx$ da cui segue che $\int_a^b |f(x)| dx = 0$ e quindi la tesi.

Poiché E è misurabile³ possiamo trovare un insieme chiuso $F \subseteq E$ con $m(F) > 0$. Ponendo quindi $A = (a, b) \setminus F$ si ha

$$0 = \int_a^b f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_F f(x) dx,$$

e quindi

$$\int_A f(x) dx = -\int_F f(x) dx \neq 0.$$

Visto che A è aperto si può scrivere come unione numerabile di intervalli aperti e quindi

$$\int_A f(x) dx = \sum_n \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx \neq 0$$

da cui deduciamo che c'è almeno uno di questi intervalli $(a_{\bar{n}}, b_{\bar{n}})$, con $b_{\bar{n}} - a_{\bar{n}} \neq 0$ e

$$\int_a^{b_{\bar{n}}} f(x) dx - \int_a^{a_{\bar{n}}} f(x) dx = \int_{a_{\bar{n}}}^{b_{\bar{n}}} f(x) dx \neq 0.$$

Questo è possibile solo se almeno uno dei due termini della differenza a sinistra è diverso da zero, che non è possibile per l'ipotesi (2.28). Quindi necessariamente si deve avere che $m(E) = 0$ e questo conclude la dimostrazione. \square

A questo punto siamo pronti per provare il teorema sulla derivata delle funzioni integrali.

Teorema 2.3.2. *Sia $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione sommabile allora la funzione integrale $F(x)$ definita in (2.27) è continua, derivabile q.o. e soddisfa*

$$F'(x) = \varphi(x) \quad \text{q.o. in } [a, b]. \quad (2.29)$$

Dimostrazione. La continuità della funzione F viene dall'assoluta continuità dell'integrale⁴. Infatti dato $\varepsilon > 0$ se $|y - x| < \delta$ si ha che $|\int_x^y \varphi(x) dx| < \varepsilon$ e quindi $|F(x) - F(y)| < \varepsilon$. Mentre il fatto che F sia derivabile q.o. è già stato dimostrato nel Corollario 2.1.10.

La dimostrazione di (2.29) verrà fatta in due passi: prima supponiamo che la funzione φ sia limitata e poi estendiamo il risultato a φ qualsiasi.

³Ricordiamo che la misura di Lebesgue è internamente regolare e quindi se E è misurabile

$$m(E) = \sup\{m(K) : K \text{ compatto, } K \subseteq E\}.$$

⁴Ricordiamoci che l'integrale di una funzione φ sommabile verifica la seguente proprietà:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \text{ se } m(E) < \delta$$

allora

$$\left| \int_E \varphi(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Passo 1. Supponiamo che $|\varphi(x)| \leq M$ q.o. in $[a, b]$. Sappiamo che il rapporto incrementale $D_h f(x)$ converge q.o. a $F'(x)$. Inoltre

$$|D_h f(x)| = \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} \varphi(t) dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |\varphi(t)| dt \leq M \quad \text{q.o.}$$

e quindi per il teorema di convergenza dominata, per ogni $c \in [a, b]$ si ha

$$\begin{aligned} \int_a^c F'(x) dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^c D_h f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} \text{Av}_h(F, c) - \text{Av}_h(F, a) \\ &= F(c) - F(a) = \int_a^c \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Dove abbiamo anche usato che grazie alla continuità di F , già provata, $\lim_{h \rightarrow 0} \text{Av}_h(F, c) = F(c)$. Da questo si deduce che per ogni $c \in [a, b]$

$$\int_a^c (F'(x) - \varphi(x)) dx = 0$$

e quindi si conclude grazie al Lemma 2.3.1.

Passo 2. Facciamo ora il caso in cui φ non è necessariamente limitata. Lavorando sulla parte positiva e la parte negativa di φ e grazie all'additività dell'integrale, possiamo, senza perdita di generalità, restringere l'analisi al caso in cui $\varphi \geq 0$. Quindi definiamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la funzione troncata

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } \varphi(x) < n \\ n & \text{se } \varphi(x) \geq n. \end{cases}$$

Chiaramente $\varphi(x) - \varphi_n(x) \geq 0$ q.o. in $[a, b]$ e quindi la funzione

$$G_n(x) := \int_a^x (\varphi(t) - \varphi_n(t)) dt$$

è non decrescente, e quindi derivabile q.o. Inoltre poiché φ_n è limitata si ha, per il passo precedente, che

$$\frac{d}{dx} \int_a^x \varphi_n(t) dt = \varphi_n(x) \quad \text{q.o. in } [a, b].$$

Allora, usando la monotonia di G_n (ossia che $G'_n \geq 0$) otteniamo che q.o. in $[a, b]$

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x \varphi(t) dt = \frac{d}{dx} G_n(x) + \frac{d}{dx} \int_a^x \varphi_n(t) dt \geq \varphi_n(x).$$

Poiché questa disuguaglianza è vera per ogni n e $\varphi_n \rightarrow \varphi$ puntualmente, abbiamo che $F'(x) \geq \varphi(x)$ q.o. in $[a, b]$.

In conclusione, poiché grazie alla monotonia di F e il teorema di Lebesgue $\int_a^b F'(\cdot) dx \leq F(b) - F(a) = F(b)$

$$0 \geq \int_a^b (F'(x) - \varphi(x)) dx \leq F(b) - F(b) = 0$$

e quindi $F' = \varphi$ q.o. in $[a, b]$. □

Osservazione 2.3.3. *Da questo risultato in particolare deduciamo che una funzione $f \in L^p((a, b))$, poiché in particolare è sommabile, coincide quasi ovunque con il limite delle sue medie, ossia*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(x) \quad \text{q.o.}$$

I punti in cui questo limite esiste e coincide con f si chiamano punti di Lebesgue di f (una sorta di punti di continuità). Questo risultato è un fatto generale che vale per tutte le funzioni sommabili, anche in \mathbb{R}^n (ma non sarà trattato in queste note⁵)

2.4 Funzioni assolutamente continue

Abbiamo visto che le funzioni integrali di funzioni sommabili sono derivabili q.o.

$$\frac{d}{dx} \int_a^x \varphi(t) dt = \varphi(x) \quad \text{q.o.}$$

In altre parole le funzioni che sono integrali indefiniti di funzioni sommabili verificano il teorema fondamentale del calcolo. Viceversa è chiaro che tutte le funzioni per cui vale il teorema fondamentale del calcolo sono integrali indefiniti. L'obiettivo di questo capitolo è quello di caratterizzare completamente queste funzioni (abbiamo già osservato che non tutte le funzioni sono integrali indefiniti, per esempio la funzione di Cantor Vitali non può esserlo, quindi in generale essere a variazione limitata e continua non basta).

Ricordiamo la proprietà di assoluta continuità dell'integrale: se $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è sommabile allora

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \text{ se } m(E) < \delta$$

allora

$$\left| \int_E \varphi(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Si ottiene in particolare che la funzione integrale F è uniformemente continua. Basta infatti testare l'assoluta continuità dell'integrale con $E = (x, y)$ con $|y - x| < \delta$ e si ottiene che

$$\left| \int_E \varphi(x) dx \right| = |F(y) - F(x)| < \varepsilon.$$

Però vale una proprietà più forte: se scegliamo $E = \cup_{i=1}^n (c_i, d_i)$, unione di intervalli disgiunti, tali che $\sum_{i=1}^n (d_i - c_i) < \delta$, si ha

$$\sum_{i=1}^n |F(d_i) - F(c_i)| = \left| \sum_{i=1}^n \int_{c_i}^{d_i} \varphi(t) dt \right| \leq \left| \int_E \varphi(t) dt \right| < \varepsilon'$$

ossia la somma degli incrementi di F su intervalli di “misura totale piccola è piccola”.

Vedremo che questa proprietà (che chiameremo assoluta continuità) in realtà è equivalente a chiedere che la funzione sia una funzione integrale di una funzione sommabile

⁵Si veda per esempio [?]

Definizione 2.4.1 (Assoluta continuità). Diciamo che una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è assolutamente continua in $[a, b]$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni collezione di intervalli disgiunti $\{(c_i, d_i)\}_{i=1, \dots, n}$ tale che $\sum_{i=1}^n (d_i - c_i) < \delta$ si ha

$$\sum_{i=1}^n |f(d_i) - f(c_i)| < \varepsilon.$$

Osservazione 2.4.2. Una funzione f assolutamente continua è anche a variazione limitata. Infatti se δ_1 è il valore che nella definizione di assoluta continuità corrisponde a $\varepsilon = 1$ e partizioniamo l'intervallo $[a, b]$ in N intervalli $[c_i, d_i]$ di ampiezza minore δ_1 , presa comunque una partizione P_i di $[c_i, d_i]$ si ha

$$V(f|_{[c_i, d_i]}, P_i) < 1$$

(stiamo denotando con $f|_{[c_i, d_i]}$ la funzione f ristretta all'intervallo $[c_i, d_i]$). E quindi

$$\text{Var}(f, [c_i, d_i]) < 1 \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

E quindi

$$\text{Var}(f, [a, b]) = \sum_{i=1}^N \text{Var}(f, [c_i, d_i]) < N,$$

ossia f è a variazione limitata.

Esercizio 2.4.3. Provare che l'insieme delle funzioni assolutamente continue è uno spazio vettoriale.

È chiaro dalla definizione che una funzione assolutamente continua è anche continua, ma non è vero il viceversa. Infatti la funzione di Cantor Vitali non è assolutamente continua. Per mostrarlo prendiamo l'insieme C_n che si ottiene al passo n della costruzione dell'insieme di Cantor (visto all'inizio del capitolo). Questo è unione disgiunta di 2^n intervalli di ampiezza $\frac{1}{3^n}$, al di fuori dei quali (tra un intervallo e il consecutivo) la funzione di Cantor è costante. Questo significa che tutta la variazione della funzione di Cantor-Vitali F è concentrata sull'insieme $C_n = \cup_{1 \leq k \leq 2^n} [c_k, d_k]$, ossia

$$\sum_{1 \leq k \leq 2^n} F(d_k) - F(c_k) = 1.$$

Poichè

$$\sum_{1 \leq k \leq 2^n} (d_k - c_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

è chiaro che per $\varepsilon < 1$ non sarà possibile trovare δ in modo che la proprietà dell'uniforme continuità sia soddisfatta.

In particolare questo vuol dire che la funzione di Cantor Vitali non si può scrivere come l'integrale indefinito di una funzione sommabile.

Esempi 2.4.4.

1. Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz di costante di Lipschitz L , in particolare è assolutamente continua. La verifica è immediata, basta scegliere $\delta = \varepsilon/L$.

2. Ci sono funzioni assolutamente continue che non sono Lipschitz. Questo è il caso per esempio della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ in $[0, 1]$. In generale questo è vero per le funzioni α -hölderiane⁶.

Esercizio 2.4.5. *Mostrare che se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione Lipschitz, allora anche $\text{Var}(f, [a, x])$ è Lipschitz (con la stessa costante).*

Teorema 2.4.6. *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è assolutamente continua, allora si scrive come differenza di due funzioni non decrescenti e assolutamente continue.*

Dimostrazione. Sappiamo già che f è a variazione limitata e quindi si scrive come

$$f(x) = f(a) + \text{Var}(f, [a, x]) - \text{Var}(f, [a, x]).$$

Allora per concludere basta provare che la funzione $\text{Var}(f, [a, x])$ è assolutamente continua. Prendiamo δ che nella definizione di assoluta continuità di f corrisponde a $\varepsilon/2$ e fissiamo un'arbitraria collezione di intervalli disgiunti $\{(c_i, d_i)\}_{i=1, \dots, n}$ tali che $\sum_{i=1}^n (d_i - c_i) < \delta$. Per una qualsiasi partizione P_i di (c_i, d_i) si ha quindi

$$\sum_{i=1}^n V(f|_{[d_i, c_i]}, P_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quindi prendendo il sup sulle partizioni P_i si ottiene

$$\sum_{i=1}^n \text{Var}(f, [d_i, c_i]) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

che conclude la dimostrazione perché $\text{Var}(f, [d_i, c_i]) = \text{Var}(f, [a, d_i]) - \text{Var}(f, [a, c_i])$. \square

Osservazione 2.4.7. *Il fatto che una funzione assolutamente continua sia in particolare a variazione limitata (così come il risultato precedente, ci garantisce che questa sia anche derivabile q.o. (questo fatto per le funzioni Lipschitz è noto come il Teorema di Rademacher, che è vero anche in dimensione superiore a uno).*

A questo punto siamo pronti a mostrare una caratterizzazione delle funzioni assolutamente continue attraverso l'equintegrabilità del rapporto incrementale.

Teorema 2.4.8. *Sia f una funzione continua su $[a, b]$, allora f è assolutamente continua se e soltanto se $D_h f$ è equi-integrabile per $h \in (0, 1)$ su $[a, b]$.*

Osservazione 2.4.9. *Osserviamo che poiché vale (2.24), ossia*

$$\int_a^b D_h f(x) dx = \text{Av}_h(f, b) - \text{Av}_h(f, a), \quad (2.30)$$

il Teorema 2.4.8 è cruciale per dimostrare il teorema fondamentale del calcolo.

⁶Diciamo che $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è α -hölderiana se esiste una costante L tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Dimostrazione del Theorem 2.4.8. Supponiamo che $D_h f$ sia equi-integrabile, ossia dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale se $m(E) < \delta$ allora

$$\int_E |D_h f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall h \in (0, 1), \quad (2.31)$$

(ossia δ nella definizione di equi-integrabilità corrisponde alla scelta di $\varepsilon/2$). Mostriamo che il δ così ottenuto è anche il δ necessario per l'assoluta continuità corrispondente a ε . Prendiamo quindi una collezione di intervalli disgiunti (c_i, d_i) , con $i = 1, \dots, n$ tale che $m(\cup_{i=1}^n (c_i, d_i)) = \sum_{i=1}^n (d_i - c_i) < \delta$. Allora applicando (2.30) sugli intervalli (c_i, d_i) e sommando otteniamo

$$\sum_{i=1}^n |\text{Av}_h(f, d_i) - \text{Av}_h(f, c_i)| \leq \sum_{i=1}^n \int_{c_i}^{d_i} |D_h f(x)| dx = \int_E |D_h f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.32)$$

dove abbiamo applicato la proprietà di equi-integrabilità con $E = \cup_{i=1}^n (c_i, d_i)$. Passando quindi al limite per $h \rightarrow 0$ e usando la continuità di f si ottiene

$$\sum_{i=1}^n |f(d_i) - f(c_i)| = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |\text{Av}_h(f, d_i) - \text{Av}_h(f, c_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

ossia l'assoluta continuità di f .

Viceversa, se f è assolutamente continua, per il Teorema 2.4.6 si scrive come differenza di due funzioni monotone. Non è restrittivo quindi supporre che f sia monotono non decrescente⁷.

Di conseguenza abbiamo che $D_h f$ è non negativo in $[a, b]$. Quindi dobbiamo provare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\int_E D_h f(x) dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall h \in (0, 1) \quad (2.33)$$

e per ogni E misurabile tale che $m(E) < \delta$. Poiché f è assolutamente continua in $[a, b]$ e estesa costante oltre b (ossia $f(x) = f(b)$ per $x > b$), è facile vedere che la funzione estesa è assolutamente continua in $[a, b + 1]$. Scegliamo quindi δ corrispondente a $\frac{\varepsilon}{2}$ nel test per l'assoluta continuità di f in $[a, b + 1]$.

Dobbiamo dimostrare (2.33) per ogni insieme misurabile di misura minore di δ . Consideriamo prima il caso in cui E è un'unione finita di intervalli aperti disgiunti, da questo per continuità avremo il caso di un'unione numerabile di intervalli aperti disgiunti, ossia un qualunque aperto di $[a, b]$, da cui poi possiamo dedurre il caso generale. Andiamo con ordine. Prendiamo $E = \cup_{i=1}^n (c_i, d_i)$ con (c_i, d_i) disgiunti e $m(E) = \sum_{i=1}^n (d_i - c_i) < \delta$. Allora

$$\begin{aligned} \int_E D_h f(x) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{c_i}^{d_i} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} dx \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{h} \int_{d_i}^{d_i+h} f(x) dx - \frac{1}{h} \int_{c_i}^{c_i+h} f(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{h} \int_0^h [f(d_i+t) - f(c_i+t)] dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h \sum_{i=1}^n |f(d_i+t) - f(c_i+t)| dt < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

⁷Infatti è chiaro che la somma di due successioni equi-integrabili è una successione equi-integrabile e questo è vero anche se l'indice h non varia in \mathbb{N} ma varia in $(0, 1)$

dove, nell'ultimo passaggio abbiamo usato la monotonia e l'assoluta continuità di f insieme al fatto che $\sum_{i=1}^n [(d_i + t) - (c_i + t)] < \delta$. È chiaro quindi che se consideriamo un'unione numerabile di intervalli aperti $\cup_{i=1}^{\infty} (c_i, d_i)$ di misura totale minore di δ passando al limite nella formula appena provata si ottiene

$$\int_E D_h f(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{c_i}^{d_i} D_h f(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \quad (2.34)$$

Per estendere (2.34) a qualsiasi insieme misurabile E ricordiamo che un qualsiasi aperto di \mathbb{R} si può scrivere come unione numerabile di intervalli aperti disgiunti e che per qualsiasi misurabile E vale

$$m(E) = \inf\{m(A) : A \text{ aperto } A \supseteq E\}.$$

Quindi si può costruire una successione decrescente di aperti A_n (ossia con $A_n \supseteq A_{n+1}$) tale che $A_n \supseteq E$ e $m(\cap_n A_n \setminus E) = 0$. In particolare questo implica che se $m(E) < \delta$, per \bar{n} abbastanza grande si ha anche che $m(A_{\bar{n}}) < \delta$ e quindi

$$\int_E D_h f(x) dx \leq \int_{A_{\bar{n}}} D_h f(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Come già anticipato una notevole conseguenza di questo teorema è la seguente.

Teorema 2.4.10 (Teorema Fondamentale del Calcolo). *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è assolutamente continua allora*

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Dimostrazione. Dal Teorema 2.4.8 sappiamo che i rapporti incrementali di f , $D_h f(x)$, sono equi-integrabili e convergono q.o. a f' (si veda Osservazione 2.4.7), quindi la tesi è una diretta conseguenza del teorema di Vitali⁸ per il passaggio al limite sotto il segno di integrale⁹ e l'identità (2.30), ossia

$$\int_a^b f'(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b D_h f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} [Av_h(f, b) - Av_h(f, a)] = f(b) - f(a).$$

□

⁸**Teorema di Vitali** se $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ converge q.o. a f ed è equi-integrabile, ossia per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $m(E) < \delta$

$$\int_E |f_n(x)| dx < \varepsilon \quad \forall n,$$

allora

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

⁹Osserviamo che il fatto che il Teorema di Vitali sia enunciato per una successione mentre noi lo stiamo applicando a un limite con il parametro continuo h non ci deve preoccupare. Per convincercene basta infatti applicarlo a una qualsiasi successione $h_n \rightarrow 0$ e poi concludere che deve valere in generale per $h \rightarrow 0$ usando un argomento per assurdo, insieme all'esistenza e l'unicità del limite (ossia il Teorema Ponte).

In altre parole abbiamo provato il seguente risultato.

Teorema 2.4.11. *Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è un integrale indefinito di una funzione sommabile, ossia esiste φ sommabile tale che*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x \varphi(x) dx,$$

se e soltanto se è assolutamente continua.

Esercizio 2.4.12. *Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni assolutamente continue. Provare che vale la formula di integrazione per parti*

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx, \quad (2.35)$$

dove f' e g' denotano rispettivamente le derivate q.o. di f e g .

Osservazione 2.4.13. *Quanto dimostrato ci prova che le sole funzioni assolutamente continue singolari (Definizione 2.2.11) sono le costanti, ossia se f è assolutamente continua e $f' = 0$ q.o., allora $f = \text{cost.}$. Questo non è il caso della funzione di Cantor Vitali che è singolare e non costante pur essendo continua.*

Per concludere prendiamo una qualsiasi funzione a variazione limitata f . Sappiamo che questa è derivabile q.o. e che la sua derivata è sommabile. Possiamo allora definire la funzione integrale

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

a Abbiamo già provato che questo implica che φ è assolutamente continua. A questo punto è chiaro che non è detto che $\varphi = f$ q.o., infatti φ è assolutamente continua, mentre f potrebbe non esserlo. In questo caso poniamo

$$\psi(x) = f(x) - \varphi(x).$$

È chiaro che la ψ così definita è singolare (infatti usando il Teorema 2.3.2, $\psi'(x) = f'(x) - \varphi'(x) = 0$). Inoltre ψ è una funzione a variazione limitata, quindi si scrive come la differenza di due funzioni monotone. Allora una variante dell'Esercizio 2.0.8 e dell'Esercizio 3.12 permette di provare che

$$\psi(x) = H(x) + C(x)$$

dove H è una funzione di salto e C è una funzione continua ma singolare (la lettera C , sta per "cantoriana", ed è usata per ricordarci che il nostro esempio principe per funzioni di questo tipo è la funzione di Cantor Vitali).

In conclusione si ha che una qualsiasi funzione a variazione limitata si decompone (decomposizione di Lebesgue) nella somma di una funzione assolutamente continua e una singolare (che a sua volta ha una parte di salto e una cantoriana).

$$f(x) = \varphi(x) + H(x) + C(x).$$

Ribadiamo per concludere che integrando la derivata quasi ovunque f' di f si ottiene solo φ e si perde completamente traccia della parte singolare. Insomma la

derivata q.o. non è un'informazione sufficientemente forte per poter ricostruire f a partire da essa, insomma non è l'oggetto giusto.

Concludiamo con un esempio. Abbiamo visto che se f e g sono assolutamente continue su $[a, b]$, allora vale la formula di integrazione per parti (2.35). In particolare se $\varphi \in C^1([a, b])$, con $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ si ha

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x) dx = - \int_a^b f'(x)\varphi(x) dx.$$

Notiamo che se f è costante si ha che $\int_a^b f(x)\varphi'(x) dx = C \int_a^b \varphi'(x) dx = \varphi(b) - \varphi(a) = 0$. Quindi in un certo senso $\int_a^b f(x)\varphi'(x) dx$ misura le variazioni di f .

Se ora prendiamo

$$f(x) = \chi_{(-\infty, 0)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

In questo caso la derivata q.o. $f'(x) = 0$, ma data $\varphi \in C_c^1((-1, 1))$ si ha

$$\int_{-1}^1 f(x)\varphi'(x) dx = \int_0^1 \varphi'(x) dx = -\varphi(0)$$

che in generale è diverso da zero. Se riscriviamo questa identità usando la misura *Delta di Dirac* δ_0

$$\int_{-1}^1 f(x)\varphi'(x) dx = - \int_{-1}^1 \varphi(x) d\delta_0.$$

In un certo senso la “derivata” giusta è “concentrata” in 0 (ossia sul salto), ma *non è una funzione*¹⁰.

Altri Esercizi

Esercizio 2.4.14. Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ assolutamente continue. Mostrare che fg è assolutamente continua.

Esercizio 2.4.15. Consideriamo le funzioni f e g definite in $[-1, 1]$ come $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ e

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{\pi}{2x}) & \text{se } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

1. Mostrare che sia f che g sono assolutamente continue in $[-1, 1]$.
2. Considerare la partizione $P_n = \{-1, 0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$ e valutare $V(f \circ g, P_n)$.
3. Provare che $f \circ g$ non è a variazione limitata e quindi non è assolutamente continua.

Esercizio 2.4.16. Sia f una funzione Lipschitz su \mathbb{R} e g assolutamente continua in $[a, b]$. Mostrare che la composizione $f \circ g$ è assolutamente continua in $[a, b]$.

¹⁰Abbiamo già visto che in fisica usare la delta di Dirac è naturale quando si considerano cariche concentrate e si definisce la funzione di Green

Esercizio 2.4.17. *Sia f una funzione assolutamente continua su \mathbb{R} e g assolutamente continua e strettamente monotona in $[a, b]$. Mostrare che la composizione $f \circ g$ è assolutamente continua in $[a, b]$.*

Esercizio 2.4.18. *Provare che se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è monotona e verifica*

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a),$$

allora è assolutamente continua.

Le distribuzioni

3.1 Generalità

Nel capitolo introduttivo abbiamo visto vari esempi in cui la mancanza di regolarità è di ostacolo a una buona formulazione del problema e della sua soluzione. Abbiamo d'altronde capito che anche con poca regolarità in molti casi (unidimensionali) è possibile provare l'esistenza di una derivata quasi ovunque, ma che questa, a meno che la funzione non sia assolutamente continua, non sembra tener traccia di tutte le variazioni della funzione.

Il punto di partenza per liberare il calcolo differenziale dalle difficoltà derivanti dalla mancanza di regolarità è cambiare prospettiva e allargare l'insieme delle funzioni a oggetti più generali (*le distribuzioni*). Nel definire questi oggetti più generali a cui applicare il calcolo differenziale vogliamo che siano rispettati alcuni requisiti:

- a) Tutte le funzioni continue (e le funzione in L^p) devono essere distribuzioni;
- b) Ogni distribuzione deve avere derivate parziali di ogni ordine, che devono essere a loro volta distribuzioni. Inoltre se una funzione è derivabile la nuova nozione di derivata (nel senso delle distribuzioni) deve coincidere con quella classica;
- c) Le regole del calcolo devono valere inalterate;
- d) Bisogna avere una buona nozione di convergenza per trattare problemi di approssimazione.

L'idea chiave è descrivere tali oggetti mediante l'azione che essi esercitano su un opportuno gruppo di funzioni (*le funzioni test*); quindi, per esempio, individuare una funzione f non tanto con il suo valore puntuale, ma con i valori che $\int f\varphi$ al variare di φ in un insieme di funzioni test. Questo è un punto di vista molto naturale per molti problemi fisici più che misurare valori puntuali si misurano medie. Le distribuzioni infatti è già operativamente usate in fisica, prima che la sua teoria matematica fosse sviluppata da L. Schwartz negli anni '50 [?]. Inoltre abbiamo visto che nel definire la funzione di Green, ossia il potenziale corrispondente a una carica concentrata, vorremmo poter interpretare il suo Laplaciano come una *delta di Dirac*. Questa possiamo interpretarla come una misura o identificarla attraverso la sua azione sulle funzioni continue, quindi possiamo interpretarla come un funzionale lineare e continuo sulle funzioni continue, ossia

$$\varphi \mapsto \langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Questo a dire la verità è vero per tutte le misure di Borel finite (o σ -finite se prendiamo funzioni continue a supporto compatto). Vorremmo aggiungere tutti questi oggetti nelle nostre "funzioni generalizzate".

3.1.1 Qualche richiamo sulle funzioni continue e le misure di Radon

Denotiamo con $C_c(\Omega)$ l'insieme delle funzioni continue a supporto compatto in Ω e con $C_0(\Omega)$ il suo completamento rispetto alla norma del sup.

Esercizio 3.1.1. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $u \in L^p(\Omega)$. Assumiamo che

$$\int_{\Omega} u\varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega). \quad (3.1)$$

1. Nel caso $p = 2$ provare che $u = 0$ q.o. in Ω .
2. Provare lo stesso risultato assumendo che $p \in (1, +\infty)$.
3. Analizzare il caso $p = +\infty$.

Nota: Usare la densità delle funzioni continue in L^p .

L'Esercizio 3.1.1 mostra che l'azione sulle funzioni continue è sufficiente a identificare sia tutte le funzioni di L^p che la delta di Dirac. D'altronde la delta di Dirac si può anche interpretare come una misura. Vedremo che effettivamente un'ampia classe di misure può essere individuata attraverso l'azione sulle funzioni continue o, più precisamente, come duale delle funzioni continue (Teorema 3.1.10).

Ricordiamo i fatti principali sulle misure, in modo da fissare le definizioni principali¹. Fissiamo Ω un sottoinsieme di \mathbb{R}^n (più in generale si potrebbe considerare Ω uno spazio topologico localmente compatto) e consideriamo solo misure di Borel, ossia definite sulla σ -algebra dei Boleriani (denotata con $\mathcal{B}(\Omega)$ o semplicemente \mathcal{B} se $\Omega = \mathbb{R}^n$).

Definizione 3.1.2. a) Una misura di Borel positiva è una funzione d'insieme $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ σ -additiva e tale che $\mu(\emptyset) = 0$.

b) Una misura di Borel positiva si dice di Radon se $\mu(K) < \infty$ per ogni compatto K di Ω .

È possibile anche definire misure con segno (o misure complesse o misure a valori vettoriali⁰). Come si vede dalla definizione che segue queste non sono una generalizzazione delle misure positive, perchè queste ultime non devono necessariamente essere "finite"².

Definizione 3.1.3. Diciamo che $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ è una misura di Borel (con segno) se $\mu(\emptyset) = 0$ e per ogni famiglia $\{E_h\}$ numerabile di insiemi di Borel a due a due disgiunti

$$\mu \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h \right) = \sum_{h=0}^{\infty} \mu(E_h),$$

dove la convergenza della serie è intesa assolutamente³.

¹A seconda dei testi le definizioni di misure con segno o di misure di Radon sono date in modi diversi, qui seguiamo le definizioni di [?] e [?]

²Si osserva che diversamente da quanto fatto qui in [?] le misure con segno non sono necessariamente finite ma possono assumere al più uno dei due valori tra $+\infty$ e $-\infty$ in modo da evitare forme indeterminate. In questo senso le misure con segno definite in [?] sono più generali.

³Altrimenti la misura dell'unione dipenderebbe dall'ordine con cui si somma la serie.

Esempio 3.1.4.

- 1) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ la misura $\mu(B) = \int_B f dx$ è una misura con segno.
 2) Se $\{x_h\}$ è un insieme numerabile di punti in \mathbb{R}^n e $c_h \in \mathbb{R}$ tale che $\sum_h |c_h| < \infty$ allora

$$\mu(B) = \sum_{x_h \in B} c_h,$$

ossia $\mu = \sum_h c_h \delta_{x_h}$ è una misura con segno (si dice che μ è una misura atomica). In generale un atomo di una misura è un punto x per cui $\mu(\{x\}) \neq 0$.

Esercizio 3.1.5. Provare che se μ è una misura positiva σ -finita allora ha al più una quantità numerabile di atomi.

Data una misura μ (come nella Definizione 3.1.3) si definisce la variazione totale $|\mu|$ definita su ogni boreliano B come

$$|\mu|(B) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|; E_i \in \mathcal{B} \text{ disgiunti, } B = \cup_{i=1}^{\infty} E_i \right\}$$

(allo stesso modo si può definire la variazione totale di una misura a valori vettoriali o complessi).

Si dimostra, ma non lo faremo qui che la misura variazione totale $|\mu|$ è una misura positiva finita (in particolare di Radon), ossia $|\mu|(\Omega) < \infty$.

A partire dalla variazione totale di μ si può costruire la *decomposizione di Jordan* di μ , definendo la *parte positiva* μ^+ e la *parte negativa* μ^- della misura μ come

$$\mu^+ = \frac{|\mu| + \mu}{2} \quad \mu^- = \frac{|\mu| - \mu}{2}.$$

In particolare

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^- \quad \mu = \mu^+ - \mu^-.$$

Osservazione 3.1.6. Si prova che μ^+ e μ^- sono misure singolari, ossia “vivono” su insiemi disgiunti a meno di insiemi di misura nulla⁴.

È chiaro che grazie alla decomposizione di μ in parte positiva e parte negativa, è possibile definire l'integrale rispetto alla misura μ come segue

$$\int_{\Omega} f(x) d\mu := \int_{\Omega} f(x) d\mu^+ - \int_{\Omega} f(x) d\mu^-$$

per ogni funzione $|\mu|$ misurabile.

Osservazione 3.1.7. È chiaro che $\mu^+ \ll |\mu|$ e anche $\mu^- \ll |\mu|$, quindi usando il Teorema di Radon-Nikodym si ha che esistono due funzioni h^+ e h^- che sono $|\mu|$ -sommabili tali che

$$\mu^+ = h_+ |\mu| \quad \mu^- = h_- |\mu|.$$

Si può mostrare (usando il fatto che μ^+ e μ^- sono singolari) che $h_+ h_- = 0$ $|\mu|$ -q.o. e che $h = h_+ + h_-$ verifica $|h| = 1$ $|\mu|$ -q.o. In particolare $\mu = h|\mu|$ e

$$\int_{\Omega} f(x) d\mu = \int_{\Omega} f(x) h(x) d|\mu|$$

⁴Se B^+ e B^- sono rispettivamente l'insieme positivo e l'insieme negativo di μ , allora $\mu^+ = \mu \llcorner B^+$ e $\mu^- = \mu \llcorner B^-$.

Concludiamo introducendo la nozione di misura di Radon per misure con segno.

Definizione 3.1.8. Una funzione di insieme $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ che è una misura su $\mathcal{B}(K)$ per ogni compatto K di Ω (ossia $|\mu|(K) < \infty$) si dice misura di Radon. Se inoltre μ è una misura su $\mathcal{B}(\Omega)$ (quindi $|\mu|(\Omega) < \infty$) si dice misura di Radon finita. Denotiamo con $\mathcal{M}(\Omega)$ l'insieme delle misure di Radon finite in Ω , con $\mathcal{M}_{loc}(\Omega)$ denotiamo le misure di Radon in Ω .

Se μ è una misura di Radon, allora anche $|\mu|$ è una misura di Radon positiva. Si può anche provare che ([?]) le misure di Radon positive sono misure regolari internamente e esternamente, ossia tali che per ogni boreliano $A \subset \Omega$

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset\subset A \text{ compatto}\}$$

e per ogni boreliano A di Ω si ha

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \supset A \text{ aperto}\}.$$

I due spazi $\mathcal{M}(\Omega)$ e $\mathcal{M}_{loc}(\Omega)$ hanno la notevole proprietà (a volte anche usata come definizione) di essere rispettivamente il duale di $C_0(\Omega)$ e $C_c(\Omega)$ (come mostrato dal seguente Teorema di Riesz per il quale rimandiamo a [?] o [?] e che enunciamo per completezza).

Teorema 3.1.9 (Teorema di Riesz). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $L \in [C_0(\Omega)]'$, ossia un funzionale lineare e continuo nella norma del sup, ossia tale che

$$\|L\| = \sup\{L(u) : u \in C_0(\Omega) \text{ sup } |u| \leq 1\} < \infty.$$

Allora esiste un'unica misura di Radon finita $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, tale che

$$L(u) = \int_{\Omega} u d\mu \quad \forall u \in C_0(\Omega)$$

e

$$\|L\| = |\mu|(\Omega).$$

C'è anche una versione "locale" del Teorema di Riesz che riguarda il duale dello spazio $C_c(\Omega)$ con la seguente nozione di convergenza:⁵ $u_j \rightarrow u$ in $C_c(\Omega)$ se

$$\begin{aligned} &\exists K \text{ compatto t.c.} \\ &\text{supp } u_j \subseteq K, \text{ supp } u \subseteq K \text{ e } u_j \text{ converge uniformemente a } u \text{ in } K \end{aligned} \quad (3.2)$$

Teorema 3.1.10. Sia $L : C_c(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e continuo rispetto alla convergenza descritta in (3.2), allora esiste un'unica misura di Radon $\mu \in \mathcal{M}_{loc}(\Omega)$, tale che

$$L(u) = \int_{\Omega} u d\mu \quad \forall u \in C_c(\Omega).$$

Esercizio 3.1.11. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia μ una misura di Radon su Ω . Assumiamo che

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu = 0 \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega). \quad (3.3)$$

Se μ è una misura positiva provare che $\mu = 0$.

Suggerimento: Basta provare che $\mu(K) = 0$ per ogni compatto K e quindi concludere usando la regolarità.

La tesi dell'esercizio precedente è vera anche senza assumere che μ sia positiva (si può provare per esempio usando che $\mu = h|\mu|$ con $h \in L^1(\Omega, |\mu|)$ e la densità delle funzioni continue in $L^1(\Omega, |\mu|)$).

⁵Questa convergenza è indotta dalla topologia dei sottospazi $C_0(K_h)$ con K_h compatti che invadono crescendo Ω ($\cup_h K_h = \Omega$ e $C_c(\Omega) = \cup_h C_0(K_h)$)

3.1.2 Lo spazio delle funzioni test

A questo punto vogliamo che i nostri nuovi oggetti siano anche differenziabili infinite volte (anche quelli definite dagli esempi precedenti). Poiché l'idea fondamentale è quella di definire la derivazione, ancora una volta attraverso l'azione su un opportuno insieme di funzioni test, è naturale chiedere che queste siano quindi infinitamente derivabile, ossia sceglieremo l'insieme delle funzioni test come $C_c^\infty(\Omega)$, l'insieme delle funzioni infinitamente derivabili e a supporto compatto.

La richiesta di essere in $C_c^\infty(\Omega)$ sembra molto forte. È naturale domandarsi “quante” funzioni ci siano. Ci convinceremo che questo spazio è molto “ricco”.

l'esempio classico di funzione $C^\infty(\mathbb{R})$ non analitica è la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Una variazione sul tema è la seguente funzione radiale $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ⁶

$$\rho(x) = \begin{cases} Ce^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases} \quad (3.4)$$

dove C è una costante di normalizzazione tale che $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1$. A partire da questa funzione si costruiscono infinite funzioni $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ grazie all'operazione di convoluzione che richiamiamo brevemente.

Convoluzione e mollificatori

Date $g, f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si definisce il prodotto di convoluzione $f * g$ la funzione data da

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy.$$

È facile, utilizzando il teorema di Fubini, provare che il prodotto di convoluzione è una funzione di L^1 e

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

Vale in verità un risultato più generale, la *disuguaglianza di Young*: se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ con $p, q \geq 1$ e $r < +\infty$, tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, allora $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

La proprietà più importante del prodotto di convoluzione è il suo effetto regolarizzante.

Esercizio 3.1.12. Data la funzione di Heaviside $H(x) = \chi_{[0,+\infty)}$ e la funzione $g_a(x) = \frac{1}{2a}\chi_{[-a,a]}$. Determinare $H * g_a$. Calcolare anche $f * g_a$ con $f(x) = |x|$ e stimare la norma L^∞ di $f - f * g_a$ al variare di $a > 0$.

L'esercizio mostra che un primo effetto regolarizzante dipende dal fatto che l'integrale “media” i valori delle funzioni. L'effetto è ancora più significativo se si sceglie g regolare. La convoluzione infatti eredita la regolarità di g .

Si può infatti provare il seguente risultato.

⁶Una funzione radiale, ossia a simmetria radiale, in generale è una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ della forma $f(x) = g(|x|)$ con $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

Teorema 3.1.13. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ (ossia a supporto compatto e derivabili fino all'ordine k con derivate k -esime continue), allora $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$.*

Ricordiamo che la notazione $D^\alpha f$, con α un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, con $\alpha_i \in \mathbb{N}$, indica le derivate parziali

$$D^\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f,$$

con $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Osservazione 3.1.14. *È facile convincersi che se facciamo la convoluzione tra due funzioni a supporto compatto il risultato è ancora a supporto compatto. Più precisamente se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora*

$$\text{supp}(f * g) = \text{supp } f + \text{supp } g$$

(provarlo per esercizio).⁷

In particolare usando la funzione $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, definita in (3.4), e $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\text{supp } g$ compatto, otteniamo $\rho * g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sappiamo anche che ρ (grazie al fatto che è una funzione a integrale 1) può essere usata per approssimare qualsiasi funzione L^p con funzioni C^∞ .

Definiamo infatti per $\varepsilon > 0$

$$\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (3.5)$$

È facile verificare usando un cambio di variabili che

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1$$

e inoltre che $\text{supp } \rho_\varepsilon = B_\varepsilon(0)$.

Esercizio 3.1.15. *Data $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ provare che $g_\varepsilon = \rho_\varepsilon * g \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e che g_ε converge per $\varepsilon \rightarrow 0$ a g in L^p .*

Suggerimento: La dimostrazione si fa in più passi. Prima si prova il risultato per g continua e a supporto compatto (e quindi uniformemente continua). Quindi usando la densità delle funzioni continue in L^p si prova per g in L^p con supporto compatto. infine si estende per tutte le $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

La successione ρ_ε (per questa notevole proprietà sottolineata dall'Esercizio 3.1.15) viene chiamata una successione di *mollificatori*.

Osserviamo che il riscalamento che abbiamo fatto per ottenere ρ_ε è quello necessario a mantenere invariata la massa di ρ_ε , ed è lo stesso riscalamento che si deve fare quando si calcola la media, in particolare

$$\frac{1}{m(B_\varepsilon(x))} \int_{B_\varepsilon(x)} g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x-y) g(y) dy,$$

dove $\chi_\varepsilon(x) = \frac{1}{m(B_\varepsilon(0))} \chi_{B_\varepsilon(0)}(x) = \frac{1}{\varepsilon^n m(B_1(0))} \chi_{B_1(0)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

⁷Ricordiamoci che per una funzione f definita q.o. il supporto si deve definire opportunamente. Si considera ω l'unione di tutti gli aperti di \mathbb{R}^n su cui $f = 0$ q.o. Il supporto di f è il complementare di ω . È facile vedere che se f è continua questo insieme si riduce a $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$.

Esercizio 3.1.16. *Provare che le affermazioni degli Esercizi 3.1.1 (per $p \geq 1$) e 3.1.11 sono ancora vere se le (3.1) e (3.3) sono vere solo per ogni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.*

Lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ è quindi molto ricco e ha il vantaggio che si presta a definite le derivate di una funzione anche non derivabile (o di una misura) attraverso una formula di integrazione per parti, ossia attraverso l'azione che questa esercita sulla corrispondente derivata delle funzioni test.

Lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ si può dotare di una topologia la cui convergenza indotta è descritta dalla definizione che segue. Denoteremo con $\mathcal{D}(\Omega)$ (semplicemente \mathcal{D} se $\Omega = \mathbb{R}^n$) lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ dotato di tale topologia, per una ragione che sarà chiara tra un attimo.

Definizione 3.1.17. *Diremo che una successione φ_h converge a φ in $\mathcal{D}(\Omega)$ se esiste un compatto $K \subset \Omega$ tale che $\text{supp } \varphi_h \subset K$ per ogni $h \in \mathbb{N}$ e $\text{supp } \varphi \subset K$, e se tutte le derivate parziali di ordine α , $D^\alpha \varphi_h$ convergono uniformemente alla corrispondente derivata di φ , ossia $D^\alpha \varphi$ (per ogni multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, con $\alpha_i \in \mathbb{N}$).*

La topologia che induce questa nozione di convergenza si può costruire esplicitamente a partire da metriche definite su gli spazi $C_c^\infty(K)$ al variare di K compatto di Ω . Qualche cenno più esplicito della costruzione di questa topologia può essere trovato nell'appendice a questo capitolo, e rende $\mathcal{D}(\Omega)$ uno spazio vettoriale topologica localmente convesso si veda [?] per dettagli).

Daremo più esplicitamente risultati per $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Le corrispondenti definizioni nel caso di $\mathcal{D}(\Omega)$ con Ω un aperto di \mathbb{R}^n sono completamente parallele e naturali.

A questo punto passiamo a definire le distribuzioni su tutto \mathbb{R}^n come segue.

3.1.3 Definizione di distribuzioni e esempi

Definizione 3.1.18. *Una distribuzione T è un funzionale lineare su \mathcal{D} continuo rispetto alla convergenza definita nella Definizione 3.1.17. L'insieme di tutte le distribuzioni verrà quindi denotato con \mathcal{D}' . Indicheremo con $\langle T, \varphi \rangle$ (o $T(\varphi)$) la sua azione su $\varphi \in \mathcal{D}$.*

Osservazione 3.1.19. *Quindi un funzionale lineare su \mathcal{D} , T , è una distribuzione se per ogni successione $\varphi_h \rightarrow 0$ in \mathcal{D} si ha che $\langle T, \varphi_h \rangle \rightarrow 0$.*

È chiaro ora che possiamo identificare ogni $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ ⁸ con una distribuzione

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi dx \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (3.6)$$

Analogamente identifichiamo ogni misura di Radon $\mu \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ con

$$\langle T_\mu, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (3.7)$$

La verifica che (3.6) e (3.7) sono lineari e continue su \mathcal{D} è lasciata per esercizio. Le notazioni T_f e T_μ per queste distribuzioni (con un piccolo abuso) verranno sostituite direttamente da f e μ , quando questo non darà luogo a fraintendimenti (cioè $\langle T_f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$ e $\langle T_\mu, \varphi \rangle = \langle \mu, \varphi \rangle$).

⁸Con $L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ denotiamo l'insieme delle funzioni f , tali che $f \in L^p(\omega)$ per ogni ω precompatto (ossia a chiusura compatta)

Osserviamo che se $f \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ non possiamo definire una distribuzione attraverso la sua azione. Per esempio $\frac{1}{x} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$ non è una distribuzione in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, mentre lo è in $\mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Vedremo più avanti che in particolare a $\frac{1}{x}$ si può associare una distribuzione opportunamente.

Esercizio 3.1.20. *Dimostrare che la delta di Dirac δ_0 non può essere identificata con una funzione $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, ossia mostrare che non esiste $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tale che*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Ma ci sono distribuzioni che non sono né funzioni né misure, come mostrato dal seguente esercizio.

Esercizio 3.1.21. *Provare che la distribuzione dipolo su \mathbb{R} , δ' , definita come*

$$\langle \delta', \varphi \rangle := -\varphi'(0)$$

non può essere rappresentata da una misura (ossia non può essere scritta nella forma data da (3.7) per alcuna misura μ).

Suggerimento: *Provarlo per assurdo testando il dipolo con la successione*

$$\psi_k(x) = (\sin(kx))\varphi(x).$$

A questo punto è naturale introdurre la nozione di derivata di una distribuzione. Dalla formula di Gauss sappiamo che se $f \in C^1(\Omega)$, Ω un aperto con bordo regolare e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ si ha

$$\int_{\Omega} \varphi \partial_{x_i} f dx = \int_{\partial\Omega} \varphi f \nu_i d\sigma - \int_{\Omega} \partial_{x_i} \varphi f dx = - \int_{\Omega} \partial_{x_i} \varphi f dx, \quad (3.8)$$

dove $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ è la normale esterna a Ω e dove abbiamo usato che φ è a supporto compatto in Ω . D'altronde possiamo interpretare sia f che la sua derivata parziale $\partial_{x_i} f$ come distribuzioni e abbiamo

$$\langle \partial_{x_i} f, \varphi \rangle = -\langle f, \partial_{x_i} \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (3.9)$$

Ora presa una qualsiasi distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ il funzionale

$$\varphi \mapsto -\langle T, \partial_{x_i} \varphi \rangle$$

è chiaramente lineare e continuo in $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definizione 3.1.22. *Sia $T \in \mathcal{D}'$. La derivata di $\partial_{x_i} T$, $i \in \{1, \dots, n\}$, nel senso delle distribuzioni è la distribuzione definita dalla formula*

$$\langle \partial_{x_i} T, \varphi \rangle = -\langle T, \partial_{x_i} \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Dalla (3.9) si vede (vedi Esercizio 3.1.23) che se $f \in C^1(\Omega)$ allora la sua derivata nel senso delle distribuzioni coincide con quella classica, per questo si continua a usare lo stesso simbolo. Inoltre poiché la derivata di una distribuzione è ancora una distribuzione, segue che le distribuzioni sono derivabili infinite volte.

A questo punto è chiaro che per quanto visto alla fine del capitolo precedente la derivata nel senso delle distribuzioni della Heaviside $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $H(x) = \chi_{(0, +\infty)}$, è data da δ_0 , ossia per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha

$$\langle H, \varphi' \rangle = \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x) dx = \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = -\varphi(0) = -\langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

Quindi $H' = \delta_0$ nel senso delle distribuzioni.

Esercizio 3.1.23. *Provare che se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione Lipschitz, allora la sua derivata nel senso delle distribuzioni coincide con la derivata q.o..*

Suggerimento: *Mostrare che $\int_a^b D_h f \varphi dx = -\int_a^b f D_h \varphi dx$ e quindi passare al limite giustificando il passaggio.*

Esercizio 3.1.24. *Mostrare che se T è una distribuzione allora*

$$\partial_{x_i x_k} T = \partial_{x_k x_i} T \quad \forall i, k \in \{1, \dots, n\}$$

Esercizio 3.1.25. *Data una distribuzione T scrivere esplicitamente attraverso la sua azione su elementi di \mathcal{D} o $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ (ossia n -ple di funzioni in \mathcal{D}) le seguenti operazioni differenziali: ∇T (gradiente distribuzionale); $\operatorname{div} \mathbf{T}$ (divergenza distribuzionale per distribuzioni vettoriali, $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_n)$, con $T_i \in \mathcal{D}$); ΔT (Laplaciano distribuzionale), se $n = 3$ $\operatorname{rot} T$ (rotore distribuzionale).*

È quindi chiaro cosa vuol dire che $-\Delta g = \delta_0$ nel senso delle distribuzioni. Vuol dire che

$$-\langle g, \Delta \varphi \rangle = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Esercizio 3.1.26. *Verificare che la funzione $g(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}$ è soluzione nel senso delle distribuzioni di $-\Delta g = \delta_0$.*

Suggerimento: *Si prenda φ con supporto in B_R e si usi che*

$$\int_{B_R} \frac{1}{|x|} \varphi(x) dx = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_R \setminus B_r} \frac{1}{|x|} \varphi(x) dx,$$

più qualche integrazione per parti e qualche stima.

3.2 Una digressione unidimensionale

Prima di andare avanti con la teoria delle distribuzioni (delle quali dobbiamo ancora specificare alcuni aspetti) soffermiamoci sul caso unidimensionale e vediamo che nuova luce può dare questo cambio di prospettiva.

Proposizione 3.2.1. *Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Se $T' = 0$ in \mathcal{D}' allora T è una funzione costante (ossia agisce su φ come $\langle T, \varphi \rangle = c \int \varphi$).*

Dimostrazione. Per definizione si ha che

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

e quindi

$$\langle T, \psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in V^{(1)} = \{\psi : \exists \varphi \in \mathcal{D} \text{ con } \varphi' = \psi\}. \quad (3.10)$$

È facile vedere che $V^{(1)} = \{\psi \in \mathcal{D} : \int_{\mathbb{R}} \psi dx = 0\}$. Infatti un'inclusione è banale perché se $\varphi \in \mathcal{D}$ allora $\varphi' \in \mathcal{D}$ e $\int_{\mathbb{R}} \varphi' dx = 0$. Viceversa se $\psi \in \mathcal{D}$ e verifica $\int_{\mathbb{R}} \psi dx = 0$, allora $\varphi(x) = \int_{-\infty}^x \psi(t) dt$ verifica $\varphi' = \psi$ ed è in \mathcal{D} .

Quindi se fissiamo una funzione φ_0 tale che

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_0 dx = 1,$$

possiamo scrivere tutte le funzioni di \mathcal{D} come $\psi + c\varphi_0$ per qualche funzione $\psi \in V^{(1)}$ e qualche $c \in \mathbb{R}$. Basta infatti prendere $c = \int_{\mathbb{R}} \varphi dx$ e $\psi = \varphi - c\varphi_0$. Da (3.10) segue allora che

$$\langle T, \varphi \rangle = c \langle T, \varphi_0 \rangle = \langle T, \varphi_0 \rangle \int_{\mathbb{R}} \varphi dx,$$

ossia T è univocamente individuata dal suo valore su φ_0 e quindi è costante. \square

In particolare due distribuzioni che hanno la stessa derivata coincidano a meno di una costante.

Il precedente risultato vale anche per distribuzioni in \mathbb{R}^n , ma la dimostrazione richiede qualche altra nozione e verrà proposta in seguito come esercizio.

Esercizio 3.2.2. *Provare che per ogni $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ esiste una soluzione (unica a meno di distribuzioni costanti nel senso appena visto) dell'equazione nel senso delle distribuzioni*

$$T' = G.$$

In questo senso ogni distribuzione ammette una primitiva in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Adesso usiamo la teoria delle distribuzioni per provare un'altra caratterizzazione (più funzionale) delle funzioni assolutamente continue e quindi del teorema fondamentale del calcolo.

Proposizione 3.2.3. *Sia $f \in L^1((a, b))$ e consideriamo T'_f la sua derivata nel senso delle distribuzioni. Supponiamo questa sia una funzione $g \in L^1((a, b))$ e definiamo*

$$F(x) = \int_a^x g(t) dt.$$

Allora F è assolutamente continua e esiste una costante c tale che $F = f + c$ q.o. in (a, b) . In altre parole se la derivata di f nel senso delle distribuzioni è L^1 , f è assolutamente continua e la sua derivata q.o. coincide q.o. con la derivata nel senso delle distribuzioni.

Dimostrazione. Il fatto che F sia assolutamente continua segue immediatamente dal Teorema di Egorov (di assoluta continuità dell'integrale) usando l'integrabilità di f' (ed è già stato provato nel capitolo precedente). Per concludere basta quindi mostrare che $T'_F = T'_f$ in $\mathcal{D}'((a, b))$. Poiché sappiamo già che la derivata q.o. di F , F' , esiste e coincide q.o. con g , basta dimostrare che la derivata q.o. è anche una derivata distribuzionale. Presa una funzione $\varphi \in \mathcal{D}((a, b))$ si ha che φF è assolutamente continua e quindi vale la formula di integrazione per parti (Esercizio 2.4.12)

$$\int_a^b F(x)\varphi'(x) dx = - \int_a^b F'(x)\varphi(x) dx,$$

da cui si deduce che F' è la derivata nel senso delle distribuzioni e si conclude. \square

Chiameremo $W^{1,1}((a, b))$ l'insieme delle funzioni di $L^1((a, b))$ con derivata distribuzionale in $L^1((a, b))$ (ci torneremo).

Esercizio 3.2.4. *Data una funzione discontinua $a(x) = 1 + \chi_{(\frac{1}{2}, 1)}(x)$ definita nell'intervallo $(0, 1)$. Determinare la soluzione in $W^{1,1}$ dell'equazione $(au')' = 0$ con la condizione $u(0) = 0$ e $u(1) = 3$ (le derivate vanno intese nel senso delle distribuzioni).*

Anche le funzioni a variazione limitata possono essere ripensate in questa nuova ottica.

Proposizione 3.2.5. *Sia $f \in L^1((a, b))$ e sia f' la sua derivata nel senso delle distribuzioni. Supponiamo che $f' = \mu \in \mathcal{M}((a, b))$ e definiamo*

$$F(x) = \mu((a, x]). \tag{3.11}$$

Allora F (estesa per continuità in $[a, b]$) è una funzione a variazione limitata in $[a, b]$, $F = f + c$ q.o. in (a, b) e

$$\text{Var}(F, [a, b]) = |\mu|((a, b)). \quad (3.12)$$

Dimostrazione. La dimostrazione che F è a variazione limitata e l'identità tra la norma variazione totale di F e la variazione totale della misura μ seguono immediatamente dalla definizione di $|\mu|(a, b)$ e $\text{Var}(F, [a, b])$. Infatti per ogni partizione P di $[a, b]$ si ha

$$V(F, P) = \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n |\mu((x_{i-1}, x_i])| \leq |\mu|(a, b) < +\infty.$$

E quindi passando al sup sulle partizioni si $\text{Var}(F, [a, b]) \leq |\mu|(a, b)$. Questo prova che F è a variazione limitata, mentre l'uguaglianza si mostra usando la definizione di $|\mu|$ e con un po' di accortezza mostrando che ci si può ridurre in essa alle partizioni finite di intervalli della forma $(x_{i-1}, x_i]$.

Per verificare che $F = f + c$ q.o., basta provare che $T'_F = \mu$. La dimostrazione segue applicando il teorema di Fubini alla misura prodotto $d\mu \times dx$. Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}((a, b))$ si ha

$$\begin{aligned} \langle T'_F, \varphi \rangle &= - \int_a^b F(x) \varphi'(x) dx = - \int_a^b \int_a^b \chi_{(a, x]}(y) d\mu(y) \varphi'(x) dx \\ &= - \int_a^b \int_a^b \chi_{[y, b)}(x) \varphi'(x) dx d\mu(y) = \int_a^b \varphi(y) d\mu(y) = \langle \mu, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

□

In generale definiamo le funzioni $BV((a, b))$ come l'insieme delle funzioni in $f \in L^1((a, b))$ tali che la deriva nel senso delle distribuzioni di f sia una misura $\mu \in \mathcal{M}((a, b))$. La variazione totale di μ è quindi una seminorma in $BV((a, b))$. Si prova che $BV((a, b))$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma

$$\|f\|_{BV((a, b))} = \|f\|_{L^1((a, b))} + |\mu|((a, b)).$$

C'è da osservare che non tutte le funzioni a variazione limitata come sono state definite attraverso le variazioni (nel precedente capitolo) verificano la tesi della Proposizione. Infatti è vero che se f è a variazione limitata allora definita F come in (3.11) si ha che F coincide q.o. con f , ma la (3.12) non è necessariamente vera. Infatti le funzioni f sono solo definite q.o. mentre la variazione $\text{Var}(f, [a, b])$ è sensibile ai valori puntuali di f . Per esempio la funzione $f(x) = 0$ se $x \neq 0$, mentre $f(0) = 1$ ha variazione totale uguale a 2 e $f' = 0$ in \mathcal{D}' . L'affermazione però diventa vera se ci limitiamo alle funzioni a variazione limitata che assumono solo valori che coincidono o con il limite destro o con il limite sinistro (che come sappiamo esistono sempre).

Osservazione 3.2.6. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione a variazione limitata continua a destra, si può provare che esiste una misura di Radon che verifica

$$\mu((c, d]) = f(d) - f(c) \quad \forall (c, d] \subseteq (a, b) \quad (3.13)$$

e tale che $f' = \mu$ in \mathcal{D}' . Questa misura si può definire a partire da (3.13) e si chiama la misura di Stieltjes associata a f (si veda [?] per dettagli).

Esercizio 3.2.7. Sia F la funzione di Cantor Vitali. Definiamo supporto di una misura positiva di Borel su Ω , μ , l'insieme

$$\text{supp } \mu = \{x \in \Omega : \forall N \text{ intorno di } x \implies \mu(N) > 0\}.$$

Provare che se $\mu = F'$ (dove F' denota la derivata nel senso delle distribuzioni di F) allora $m(\text{supp } \mu) = 0$, nonostante che $|\mu|(0, 1) = 1$.

Esercizio 3.2.8. Sia $B_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ la palla unitaria in \mathbb{R}^2 . Determinare le derivate distribuzionali della funzione $f(x) = \chi_{B_1}(x)$. Possiamo dire che è una misura? Come è caratterizzata?

3.3 Le regole di calcolo e di approssimazione

3.3.1 Convergenza di distribuzioni

Definizione 3.3.1. Diciamo che T_h converge a T in \mathcal{D}' se

$$\langle T_h, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

In altre parole la convergenza in distribuzioni coincide con la convergenza puntuale come funzionali lineari.

La convergenza in \mathcal{D}' è una convergenza piuttosto debole (ossia sono tante le successioni che convergono in \mathcal{D}'). Vedremo più avanti che in effetti è una convergenza che ha buone proprietà di compattezza.

Esercizio 3.3.2. Se una successione f_n di funzioni $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ converge a f in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, ossia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega'} |f_n - f| dx = 0 \quad \forall \Omega' \subset\subset \Omega,$$

allora

$$\int_{\Omega} f_n \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

ossia converge in \mathcal{D}' .

Diciamo una successione f_n di funzioni $L^p(\Omega)$, con $p \in [1, +\infty)$ converge debolmente a f in $L^p(\Omega)$, e lo denotiamo con

$$f_n \xrightarrow{L^p} f \quad \text{o} \quad f_n \rightharpoonup f \quad \text{in } L^p$$

se

$$\int_{\Omega} f_n \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in L^{p'}(\Omega) \quad \text{con} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

ossia converge puntualmente come elemento del duale di $L^p(\Omega)$. È chiaro quindi che se f_n converge debolmente in $L^p(\Omega)$ allora converge in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Esempio 3.3.3. Consideriamo la successione $f_n(x) = \sin(nx)$ questa, grazie alla disuguaglianza di Plancharel (che assicura che i coefficienti di Fourier di $\varphi \in L^2((a, b))$ sono in ℓ^2), converge debolmente a zero in $L^2((a, b))$ e quindi anche in $\mathcal{D}'((a, b))$. La cosa come sappiamo si verifica facilmente prendendo $\varphi \in \mathcal{D}((a, b))$ e integrando per parti

$$\left| \int_a^b \sin nx \varphi(x) dx \right| = \left| \int_a^b \frac{\cos nx}{n} \varphi'(x) dx \right| \leq \frac{1}{n} \sup |\varphi'|,$$

che tende a zero per $n \rightarrow +\infty$. Però non converge forte in alcun $L^p((a, b))$ (perché?).

Ma la convergenza in \mathcal{D}' è ancora più debole (d'altronde l'insieme delle funzioni test \mathcal{D} è più piccolo di L^p). Infatti la successione per esempio

$$f_n(x) = n \sin(nx)$$

converge in $\mathcal{D}'((0,1))$ a zero, questo si vede facilmente testando con una funzione in $\mathcal{D}((0,1))$ e integrando per parti, mentre non converge debolmente in alcun L^p . Basta infatti testare con la funzione $\varphi(x) = x$ e integrare per parti⁹.

Lemma 3.3.4. *Data $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$ è 1-periodica e definiamo $f_k(x) := f(kx)$. La successione f_k converge in \mathcal{D}' alla sua media, ossia alla distribuzione costante uguale a $\int_0^1 f(x) dx$.*

Dimostrazione. Prendiamo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e supponiamo che $\text{supp } \varphi \subseteq [-N, N]$, con $N \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_k(x) \varphi(x) dx &= \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}} f(y) \varphi\left(\frac{y}{k}\right) dy = \frac{1}{k} \int_{-Nk}^{Nk} f(y) \varphi\left(\frac{y}{k}\right) dy \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=-Nk}^{Nk-1} \int_i^{i+1} f(y) \varphi\left(\frac{i}{k}\right) dy + \frac{1}{k} \sum_{i=-Nk}^{Nk-1} \int_i^{i+1} f(y) \left[\varphi\left(\frac{y}{k}\right) - \varphi\left(\frac{i}{k}\right) \right] dy. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Quindi usando la periodicità di f (per cui $\int_i^{i+1} f dx = \int_0^1 f dx$) e la regolarità di φ si ottiene

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} f_k(x) \varphi(x) dx - \int_0^1 f(y) dy \right| &\leq \int_0^1 |f(y)| dy \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx - \frac{1}{k} \sum_i \varphi\left(\frac{i}{k}\right) \right| \\ &\quad + \frac{2Nk}{k} \sup |\varphi'| \int_0^1 |f(y)| dy. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Da cui si conclude osservando che il membro di destra tende a zero per $k \rightarrow +\infty$. \square

Esercizio 3.3.5. *Data $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$ è 1-periodica e definiamo $f_k(x) := f(kx)$. Provare che f_k converge forte in qualche L^p_{loc} se e soltanto se f è costante.*

Suggerimento: Mostrare che si può supporre che f sia a media nulla e che quindi f_k converga a zero forte in $L^p((0,1))$.

Esercizio 3.3.6. *Data $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$ \mathbb{Z}^n -periodica (ossia tale che $f(x+z) = f(x)$ per ogni $z \in \mathbb{Z}^n$), Definiamo $f_k(x) := f(kx)$.*

Provare che f_k converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ alla sua media, ossia alla distribuzione costante uguale a $\int_{(0,1)^n} f(x) dx$.

Il risultato del Lemma 3.3.4 e dell'Esercizio 3.3.6 (anche esteso alla convergenza debole in L^p) è noto come “Lemma di Riemann Lebesgue”¹⁰.

Un esempio molto importante di successioni di distribuzioni convergenti sono le *delta approssimanti* e in particolare i *mollificatori*.

⁹A corso un po' più avanzato la verifica che questa successione non converge debolmente in L^p sarà facile conseguenza del fatto che una successione convergente debolmente in L^p è limitata in norma.

¹⁰Vedremo come si estende alla convergenza debole più avanti, ma visto che avete già la definizione di convergenza debole in L^p potete incominciare a pensarci

Data una funzione $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\text{supp } \eta \subset B_1(0)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1$, chiamiamo successione di mollificatori, la successione

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Notare che per come è stata definita $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\text{supp } \eta_\varepsilon \subset B_\varepsilon(0)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x) dx = 1$. La successione η_ε converge alla delta δ_0 in distribuzioni. Infatti per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ abbiamo

$$|\langle \eta_\varepsilon, \varphi \rangle - \varphi(0)| = \left| \int_{B_\varepsilon(0)} (\varphi(x) - \varphi(0)) \eta_\varepsilon dx \right| \leq \sup_{B_\varepsilon(0)} |\varphi(x) - \varphi(0)|,$$

da cui concludiamo facendo il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ e usando l'uniforme continuità di φ .

Notiamo che nel conto precedente abbiamo usato solo che l'integrale di η_ε sia 1, che η_ε sia positiva e che il suo supporto sia in $B_\varepsilon(0)$. Queste proprietà garantiscono che la successione converga in \mathcal{D}' alla delta, ossia è una successione *delta-approssimante* (il nome mollificatore invece viene usato per evidenziare l'effetto regolarizzante di η_ε nell'operazione di convoluzione con un'altra funzione o, come vedremo, con una distribuzione). Quindi per esempio un'altra successione delta-approssimante potrebbe essere $\frac{1}{m(B_\varepsilon(0))} \chi_{B_\varepsilon(0)}$.

Esercizio 3.3.7. Consideriamo la funzione in \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{se } |x| < \frac{5}{4} \\ |x| - \frac{3}{2} & \text{se } \frac{5}{4} \leq |x| < \frac{3}{2} \\ 0 & \text{se } |x| \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

e definiamo $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x-2}{\varepsilon}\right)$. Determinare il limite in distribuzioni della successione f_ε .

Esercizio 3.3.8. Provare che se $\eta \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1$ allora

$$\eta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ a δ_0 .

Esercizio 3.3.9. Consideriamo le distribuzioni

$$T_n = n(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n}).$$

Si può determinare il limite nel senso delle distribuzioni di T_n ? In caso affermativo, determinarlo.

La convergenza di distribuzioni ci permette di costruire altri esempi interessanti di distribuzioni. Consideriamo in \mathbb{R} la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$. Questa funzione non è in $L_{loc}^1(\mathbb{R})$ e quindi non gli si può associare in modo immediato una distribuzione semplicemente integrandola contro funzioni test. Con un po' di cautela però possiamo trovare una distribuzione da associarle. Prendiamo la successione di funzioni

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & |x| > \varepsilon \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(quindi ottenute rimuovendo la singolarità di f).

È chiaro che le funzioni g_ε sono in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e quindi le possiamo interpretare come distribuzioni. Ora per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con supporto in $[-R, R]$ consideriamo

$$\langle g_\varepsilon, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \int_{|x| > \varepsilon} \frac{1}{x} \varphi(x) dx =: I_\varepsilon.$$

Con un cambio di variabili e usando che il supporto della funzione test è in $[-R, R]$ si ha

$$|I_\varepsilon| = \left| \int_\varepsilon^R \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx \right| \leq 2(R - \varepsilon) \|\varphi'\|_\infty \quad (3.16)$$

(qui abbiamo usato che $|\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}| = 2|\varphi'(\xi)| \leq 2\|\varphi'\|_\infty$). Data la regolarità di φ si ha che $\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}$ è assolutamente integrabile e quindi esiste il limite di I_ε per $\varepsilon \rightarrow 0$. Definiamo quindi la distribuzione *valore principale di $\frac{1}{x}$* la seguente

$$\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon.$$

La linearità di questo funzionale è banalmente verificata, mentre la continuità è garantita passando al limite in (3.16) e ottenendo

$$\left| \langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle \right| \leq 2R \|\varphi'\|_\infty$$

da cui concludiamo che $\text{vp} \frac{1}{x} \in \mathcal{D}'$ usando l'Esercizio 3.5.4.

Infine vedremo più avanti il fatto notevole che ogni distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ può essere approssimata nella convergenza appena descritta da una successione di funzioni C^∞ . Ossia che vale il seguente teorema.

Teorema 3.3.10. *Sia $T \in \mathcal{D}'$, allora esiste una successione $u_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ che converge a T in distribuzioni, ossia tale che*

$$\langle T_{u_k}, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

La dimostrazione di questo risultato sarà ottenuta come conseguenza dell'Esercizio 3.3.22 più avanti.

Esercizio 3.3.11. *Sia ρ_ε una successione delta approssimante. Determinare il limite in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ della successione*

$$\frac{\rho_\varepsilon(x) - \rho_\varepsilon(x - \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

3.3.2 Moltiplicazione e regola di Leibniz

È chiaro che la moltiplicazione per uno scalare e la somma di distribuzioni sono ancora distribuzioni (la cui azione su \mathcal{D} è definita in modo ovvio). Ci domandiamo se possiamo fare altre operazioni, per esempio la moltiplicazione tra distribuzioni. In generale la risposta è no, nel senso che non è chiaro quale potrebbe essere una buona definizione. Potremmo infatti pensare di definirla per approssimazione con funzioni. Per esempio data una successione di funzioni u_k che converge a T nel senso delle distribuzioni, potremmo definire T^2 come il limite in distribuzioni di u_k^2 . Ma si capisce che questo in generale non funziona grazie al seguente esempio (esercizio).

Esercizio 3.3.12. Sia u_k una successione delta approssimante (ossia della forma $u_k(x) = k^n u(kx)$, con u a supporto compatto, e convergente alla delta in distribuzioni). Provare che la successione u_k^2 non può convergere in distribuzioni.

C'è però un modo molto chiaro di definire il prodotto tra una distribuzione e una funzione in C^∞ .

Data $T \in \mathcal{D}'$ e $u \in C^\infty$, poiché data $\varphi \in \mathcal{D}$ si ha che $u\varphi \in \mathcal{D}$, possiamo definire la distribuzione uT nel seguente modo

$$\langle uT, \varphi \rangle := \langle T, u\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Per mostrare la continuità di questa distribuzione basta controllare che se φ_k converge a φ in \mathcal{D} , allora $\psi\varphi_k$ converge a $\psi\varphi$ in \mathcal{D} .

Esempio 3.3.13. Data $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ si ha $u\delta_0 = u(0)\delta_0$. Infatti

$$\langle u\delta_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, u\varphi \rangle = u(0)\varphi(0) = \langle u(0)\delta_0, \varphi \rangle.$$

Per l'operazione di moltiplicazione per una funzione C^∞ vale la *regola di Leibniz* per la derivazione. Infatti

$$\begin{aligned} \langle \partial_{x_i}(uT), \varphi \rangle &= -\langle uT, \partial_{x_i}\varphi \rangle = -\langle T, u\partial_{x_i}\varphi \rangle = \\ &= \langle T, \partial_{x_i}u\varphi \rangle - \langle T, \partial_{x_i}(u\varphi) \rangle = \langle \partial_{x_i}uT, \varphi \rangle + \langle u\partial_{x_i}T, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

3.3.3 La composizione

Per definire la composizione partiamo dal caso di funzioni regolari e prendiamo una funzione biunivoca $\psi : \Omega' \rightarrow \Omega$ con $\psi, \psi^{-1} \in C^\infty$. Sia ora $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione in L^1 e poniamo

$$w(x) = f \circ \psi(x) = f(\psi(x)).$$

Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$ usando il cambiamento di coordinate abbiamo

$$\int_{\Omega'} w(x)\varphi(x) dx = \int_{\psi^{-1}(\Omega)} f(\psi(x))\varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(y)\varphi(\psi^{-1}(y))|\det J_{\psi^{-1}}| dy,$$

dove $J_{\psi^{-1}}$ è la matrice Jacobiana di ψ^{-1} . In termini di distribuzioni questo si riscrive come segue

$$\langle f \circ \psi, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \circ \psi^{-1} |\det J_{\psi^{-1}}| \rangle. \quad (3.17)$$

Per come abbiamo scelto ψ la (3.17) ha senso anche se sostituiamo la funzione f con una distribuzione generica. Infatti se $\varphi \in \mathcal{D}$ allora $\varphi \circ \psi^{-1} |\det J_{\psi^{-1}}| \in \mathcal{D}$ e se $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in \mathcal{D} allora $\varphi_k \circ \psi^{-1} |\det J_{\psi^{-1}}| \rightarrow \varphi \circ \psi^{-1} |\det J_{\psi^{-1}}|$ in \mathcal{D} .

Definizione 3.3.14. Se $\psi : \Omega' \rightarrow \Omega$ biunivoca con $\psi, \psi^{-1} \in C^\infty(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definiamo la distribuzione $T \circ \psi$ (che con un abuso di notazione spesso indicheremo con $T(\psi(x))$) come segue

$$\langle T \circ \psi, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \circ \psi^{-1} |\det J_{\psi^{-1}}| \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

È da notare che le condizioni su ψ sono importanti perché la composizione sia ben definita stabile rispetto alla convergenza in distribuzioni.

Esercizio 3.3.15. Se consideriamo la funzione $\psi(x) = x^3$, questa è biunivoca da \mathbb{R} in \mathbb{R} , C^∞ ma $\psi^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$ non è C^∞ . Data $u_k(x) = k\chi_{[0,1/k]}(x)$ (che è una delta approssimante), provare che la successione $u_k(x^3)$ non converge nel senso delle distribuzioni.

Esercizio 3.3.16. Determinare la distribuzione $\delta \circ \psi$, per le seguenti scelte di ψ :

1. $\psi(x) = ax$ con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$;
2. $\psi(x) = Ax$ con $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$, $\det A \neq 0$;
3. $\psi(x) = Ax + b$ con $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$, $\det A \neq 0$, e $b \in \mathbb{R}^n$

3.3.4 La convoluzione

Siamo pronti ora a definire anche la convoluzione per distribuzioni. Come vedremo questo non è sempre possibile. Partiamo da due funzioni f e g in $L^1(\mathbb{R}^n)$

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy.$$

Quindi prendendo $\varphi \in \mathcal{D}$, usando Fubini si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f * g(x)\varphi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) dy \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)g(x-y) dx \right] f(y) dy \quad (3.18) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x+y)g(x) dx \right] f(y) dy. \end{aligned}$$

Potremmo usare questa formula per estendere la definizione di convoluzione alle distribuzioni usando un argomento di approssimazione. C'è un problema però. La funzione di due variabili

$$\Phi(x, y) = \varphi(x+y)$$

non ha supporto compatto, a meno che φ non sia nulla. Così come non è a supporto compatto in generale la funzione

$$y \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x+y)g(x) dx$$

se g non lo è.

Esempio 3.3.17. Per convincersene basta disegnare sul piano xy la funzione Φ nel caso in cui $\varphi = \chi_{[0,1]}$.

Si può quindi estendere (3.18) al caso di due convoluzioni se una delle due ha supporto compatto¹¹.

¹¹Data una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ diciamo che T si annulla in un aperto A di $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se

$$\langle T, \varphi \rangle = 0$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ con $\text{supp } \varphi \subseteq A$. Sia ora \mathcal{A} l'unione di tutti gli aperti su cui si annulla T , il supporto di T è dato da

$$\text{supp } T = \Omega \setminus \mathcal{A}.$$

Ci limitiamo qui a estendere la definizione di convoluzione al caso di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ e di una funzione in $\psi \in \mathcal{D}$. A questo scopo è comodo introdurre la seguente notazione, data $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\tau_x u(y) = u(y - x) \quad \check{u}(y) := u(-y).$$

È facile vedere che

$$(\tau_x \check{u}) = \tau_{-x}(\check{u}) \quad \tau_x \tau_y u = \tau_{x+y} u.$$

Inoltre, poiché con un cambiamento di variabile si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \tau_x \psi(y) \varphi(y) dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y - x) \varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \varphi(y + x) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \tau_{-x} \varphi(y) dy, \end{aligned}$$

possiamo in analogia definire per ogni $T \in \mathcal{D}'$

$$\langle \tau_x T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-x} \varphi \rangle$$

Per vedere più chiaramente come agisce la traslazione di x è comodo (anche se non ortodosso) introdurre esplicitamente nell'azione di T su φ la variabile da cui dipende φ e su cui agisce T , scrivendo

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T(x), \varphi(x) \rangle. \quad (3.19)$$

Cosicché si ha

$$\langle \tau_x T, \varphi \rangle = \langle T(y), \varphi(y - x) \rangle.$$

Esercizio 3.3.18. *Mostrare che data $T \in \mathcal{D}'$, la distribuzione*

$$\frac{T - \tau_{he_i} T}{h}$$

converge in \mathcal{D}' a $\partial_{x_i} T$.

Ispirandoci alla definizione di convoluzione tra due funzioni possiamo quindi definire la convoluzione tra una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ e una funzione test in \mathcal{D} .

Definizione 3.3.19. *Se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ definiamo $T * \phi$ come segue*

$$T * \phi(x) = \langle T, (\tau_x \check{\phi}) \rangle = \langle T(y), \varphi(x - y) \rangle. \quad (3.20)$$

Osservazione 3.3.20. *Osserviamo che $T * \phi(0) = \langle T, \check{\phi} \rangle = \langle T(y), \phi(-y) \rangle$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.*

È facile vedere che questa operazione è ben definita (se $\phi \in \mathcal{D}$, anche $\tau_x \phi \in \mathcal{D}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$) e che se T è una funzione di $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ la Definizione 3.3.19 restituisce la usuale convoluzione tra funzioni. Si possono provare varie proprietà della convoluzione che sono elencate nel seguente esercizio.

Esercizio 3.3.21. *Provare che se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ allora*

1. $\tau_x(T * \phi) = (\tau_x T) * \phi = T * \tau_x \phi$;

2. Per ogni multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$D^\alpha(T * \phi) = (D^\alpha T) * \phi = T * D^\alpha \phi.$$

In particolare $T * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Suggerimento: Fare il limite del rapporto incrementale.

3. Se $T * \phi(0) = 0$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ allora $T = 0$;

Esercizio 3.3.22. Date $\psi, \varphi \in \mathcal{D}$ e $T \in \mathcal{D}'$ provare

1. $((T * \psi) * \varphi)(0) = (T * (\psi * \varphi))(0)$.

Suggerimento: Usare l'approssimazione dell'integrale con le somme di Riemann per approssimare $\psi * \varphi$ e usare la linearità delle distribuzioni.

Attenzione: si usa che $T * \varphi(0) = \langle T, \check{\varphi} \rangle$.

2. $((T * \psi) * \varphi)(x) = (T * (\psi * \varphi))(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$

3. Sia φ_ε una successione convergente a δ_0 in distribuzioni (ossia una δ approssimante), provare che

$$\langle T, \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle T * \varphi_\varepsilon, \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ((T * \varphi_\varepsilon) * \check{\psi})(0)$$

Suggerimento: Usare il punto 1. e l'Osservazione 3.3.20.

4. Mostrare che se $\nabla T = 0$ allora esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\langle T, \phi \rangle = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} \phi dx \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Suggerimento: Usare che se $\nabla T = 0$ allora $\nabla(T * \varphi_\varepsilon) = 0$ e il passo precedente.

L'esercizio precedente in particolare prova il teorema di approssimazione già menzionato (Teorema (3.3.10)). Una conseguenza interessante è il seguente Lemma di Weyl.

Lemma 3.3.23 (Weyl). Se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ che verifica $\Delta T = 0$ nel senso delle distribuzioni, allora $T = T_u$ con $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\Delta u = 0$.

Dimostrazione. (Cenni) Usiamo il fatto che una funzione, $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, è armonica se e solo se verifica la proprietà della media, ossia

$$u(x_0) = \frac{1}{\sigma_{n-1} \rho^{n-1}} \int_{\partial B_\rho(x_0)} u(x) d\sigma(x),$$

dove σ_{n-1} è la misura della superficie sferica n -dimensionale.

Se ora prendiamo un mollificatore ρ_ε a simmetria radiale (ossia tale che $\rho_\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon(|x|) = \varepsilon^{-n} \eta(\frac{|x|}{\varepsilon})$ con $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\eta \in C_c^\infty((-1, 1))$ e $\int_0^{+\infty} \eta(r) \sigma_{n-1} r^{n-1} dr = 1$) e definiamo

$$u_\varepsilon(x) = T * \rho_\varepsilon(x).$$

È facile verificare che $\Delta u_\varepsilon = 0$. Quindi verifica la proprietà della media e

$$\begin{aligned} u_\varepsilon * \rho(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon(x-y)\rho(y) dy = \int_0^{+\infty} \int_{\partial B_r(0)} u_\varepsilon(x-y)\eta(r) d\sigma(y) dr \\ &= \int_0^{+\infty} \eta(r) \int_{\partial B_r(x)} u_\varepsilon(y) d\sigma(y) dr = \int_0^{+\infty} \eta(r)\sigma_{n-1}r^{n-1}u_\varepsilon(x) dr \\ &= u_\varepsilon(x) \int_0^{+\infty} \eta(r)\sigma_{n-1}r^{n-1} dr = u_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Quindi otteniamo che $u_\varepsilon * \rho(x) = u_\varepsilon(x)$ e passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ha $T * \rho = T$ e quindi $u(x) = T * \rho(x)$ è C^∞ , armonica e rappresenta T . \square

Dalla dimostrazione del Lemma di Weyl si capisce che questo vale anche in forma localizzata, ossia: se $T \in D'(\Omega)$ e $\Delta T = 0$ allora esiste una funzione $u \in C^\infty(\Omega)$ armonica e tale che $T = T_u$ (si può usare lo stesso argomento con qualche aggiustamento).

3.4 Cenni sulla Trasformata di Fourier e le distribuzioni temperate

Quest'ultima sezione¹² non è centrale nel programma di questo corso ed è dedicata a chi ha già visto la trasformata di Fourier in un altro corso. È noto che la trasformata di Fourier ha la notevole proprietà di trasformare equazioni differenziali in equazioni algebriche. In particolare questa ha un ruolo importante nella determinazione della soluzione fondamentale per equazioni alle derivate parziali lineari a coefficienti costanti. A questo scopo è un passo essenziale estendere la nozione di trasformata di Fourier anche alle distribuzioni.

Ricordiamo che data una funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ la sua trasformata di Fourier è data da

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i2\pi\xi x} f(x) dx.$$

Si dimostra che la trasformata di Fourier è un'isometria da $L^2(\mathbb{R}^n)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ e se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ vale la seguente formula di inversione

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i2\pi\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Notiamo alcuni fatti fondamentali:

1. La teoria fin qui sviluppata per le distribuzioni, si può estendere (per linearità) senza alcuna difficoltà concettuale al caso in cui le funzioni test (e anche le distribuzioni) siano a valori in \mathbb{C} .

2. Se $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)g(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i2\pi\xi x} dx g(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i2\pi\xi x} g(\xi) d\xi f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x) dx \end{aligned} \quad (3.21)$$

¹²Questa parte non è stata trattata nel corso del 2016-17

Quindi per definire la trasformata di una distribuzione vorremmo usare la stessa tecnica. Vorremmo scaricare la trasformata sulla funzione test e quindi scrivere qualche cosa tipo

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle.$$

C'è però un problema:

3. Se $\varphi \in \mathcal{D}$ in generale $\hat{\varphi} \notin \mathcal{D}$ (ossia anche se φ ha supporto compatto la sua trasformata non lo ha).

Esercizio 3.4.1. Data $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\text{supp } \varphi \subseteq [-R, R]$

1. Provare che $\hat{\varphi}$ è analitica

$$\text{(usando che } e^{-i2\pi\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i2\pi\xi)^n}{n!} \text{ e che } |\int_{-R}^R x^n \varphi(x) dx| \leq 2\|\varphi\|_{\infty} R^{n+1}).$$

2. Dedurre che $\hat{\varphi}$ non può avere supporto compatto.

3. Mostrare che

$$|\hat{\varphi}^{(n)}(\xi)| = o(|\xi|^{-m}) \quad |x| \rightarrow +\infty \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Cerchiamo quindi (come nel caso di L^2) una classe di funzioni che viene trasformata in se stessa attraverso la trasformata di Fourier. Questa è classe di Schwartz delle funzioni a decrescenza rapida.

Definizione 3.4.2. Denotiamo con $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ la classe delle funzioni a decrescenza rapida, ossia delle funzioni $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tale che per ogni multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ verificano

$$D^{\alpha}\varphi(x) = o(|x|^{-m}) \quad |x| \rightarrow +\infty \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Queste sono funzioni che non hanno necessariamente supporto compatto ma che decadono all'infinito esponenzialmente, loro e tutte le loro derivate. Quindi per esempio $v(x) = e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}$ ma $u(x) = e^{-|x|^2} \sin(e^{-|x|^2})$ non appartiene a \mathcal{S} perchè la proprietà di decadimento è verificata da u ma non dalle sue derivate (verificarlo).

Fatto importante: Si verifica che se $\varphi \in \mathcal{S}$ allora $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$.

Definizione 3.4.3. Diciamo che una successione φ_k converge in \mathcal{S} se per ogni multi-indice $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, posto $x^{\beta} := x_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\beta_n}$ si ha

$$x^{\beta} D^{\alpha} \varphi_k \rightarrow x^{\beta} D^{\alpha} \varphi \quad \text{uniformemente in } \mathbb{R}^n.$$

Evidentemente se una successione in \mathcal{D} converge nella topologia di \mathcal{D} , allora converge anche nella topologia di \mathcal{S} . Ma non è vero il viceversa.

A questo punto su \mathcal{S} possiamo definire una sottoclasse di distribuzioni.

Definizione 3.4.4. Si chiamano distribuzioni temperate quelle distribuzioni di $T \in \mathcal{D}'$ tale che per ogni $v_k \in \mathcal{D}$ tali che $v_k \rightarrow 0$ in \mathcal{S} si ha

$$\langle T, v_k \rangle \rightarrow 0.$$

Questo insieme si indica con \mathcal{S}' .

Si può mostrare che \mathcal{D} è denso in \mathcal{S} e quindi per approssimazione si può definire l'azione di ogni distribuzione in \mathcal{S} su tutti gli elementi di \mathcal{S} .

Osservazione 3.4.5. *Sono distribuzioni temperate:*

1. I polinomi
2. Le distribuzioni a supporto compatto
3. Le funzioni in L^p con $p \geq 1$
4. Non è in \mathcal{S}' la funzione e^x

Insomma sono in \mathcal{S}' le “distribuzioni a crescita lenta”.

A questo punto abbiamo tutti gli ingredienti per definire la trasformata di Fourier per una distribuzione temperata (che verificherà proprietà analoghe - che non mostreremo - a quelle che sono già state viste nel caso di trasformate di funzioni in L^2).

Definizione 3.4.6. *Per ogni $T \in \mathcal{S}'$ si definisce*

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Concludiamo con un esempio importante. Con questa definizione possiamo fare la trasformata di Fourier di 1 (che appunto è in \mathcal{S}' . Si ha usando la definizione (e la formula di inversione)

$$\langle \hat{1}, \varphi \rangle = \langle 1, \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) d\xi = \varphi(0)$$

In altre parole $\hat{1} = \delta_0$.

Calcoliamo ora la trasformata della delta:

$$\langle \hat{\delta}_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx.$$

In altre parole $\hat{\delta}_0 = 1$.

Notare che questo esempio è particolarmente rilevante se si cerca la soluzione fondamentale di un'equazione alle derivate parziali a coefficienti costanti. Solo a titolo esemplificativo consideriamo l'equazione nel senso delle distribuzioni (nel caso $n \geq 3$)

$$-\Delta G = \delta_0.$$

Utilizzando la trasformata di Fourier si può riscrivere questa equazione come

$$-|\xi|^2 \hat{G}(\xi) = 1.$$

Anti-trasformando questa identità (omettiamo i dettagli) si ottiene la nota formula $G(x) = \frac{c_n}{|x|^{n-2}}$.

Esercizio 3.4.7. *Calcolare \hat{x} in \mathbb{R} .*

3.5 Appendice: Cenni sulla topologia in \mathcal{D}

Consideriamo un compatto K e denotiamo con \mathcal{D}_K il sottospazio delle funzioni in $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con supporto in K . Per ogni $m \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{D}_K$ denotiamo con

$$\|f\|_{m,K} = \sum_{\alpha, |\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)|$$

(con $D^0 f$ intendiamo f).

Esercizio 3.5.1. 1. *Mostrare che la che $\|\cdot\|_{m,K}$ è una norma in \mathcal{D}_K ;*

2. *Provare che*

$$d_K(\varphi, \psi) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|\varphi - \psi\|_{m,K}}{1 + \|\varphi - \psi\|_{m,K}}$$

definisce una distanza, e quindi una topologia metrizzabile \mathcal{T}_K , in \mathcal{D}_K ;

3. *Date $\varphi_j, \varphi \in \mathcal{D}_K$, provare che φ_j converge a φ in \mathcal{D}_K se e soltanto se $D^\alpha \varphi_j$ converge uniformemente in K a $D^\alpha \varphi$, per ogni multi-indice α .*

Suggerimento: Usare che la serie che definisce d_K è una serie a termini positivi.

La topologia \mathcal{T} in \mathcal{D} è quindi definita come segue.

Definizione 3.5.2. *Un insieme $A \subseteq \mathcal{D}$ è un aperto nella topologia \mathcal{T} se e soltanto se $A \cap \mathcal{D}_K$ è un aperto di \mathcal{T}_K per ogni K compatto.*

Si può dimostrare che una topologia così definita non è metrizzabile.

Proposizione 3.5.3. *La convergenza nella topologia \mathcal{T} coincide con la convergenza data dalla definizione Definizione 3.1.17.*

Includiamo la dimostrazione per completezza.

Dimostrazione. Basta provare che le seguenti sono equivalenti:

- i) $\varphi_h \rightarrow 0$ in \mathcal{T} ;
- ii) Esiste un compatto $K \subset \Omega$ tale che $\text{supp } \varphi_h \subseteq K$ e $D^\alpha \varphi_h \rightarrow 0$ uniformemente, per ogni multi-indice α .

Proviamo prima che ii) implica i). Se vale ii) è chiaro che φ_h converge a 0 in \mathcal{D}_K . Allora per ogni aperto A in \mathcal{T} contenente 0, per definizione $A \cap \mathcal{D}_K$ è aperto in \mathcal{D}_K e quindi esiste \bar{h} tale che per ogni $h \geq \bar{h}$, $\varphi_h \in A$.

Per provare il viceversa basta provare che esiste un compatto K tale che $\text{supp } \varphi_h \subseteq K$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Supponiamo per assurdo che esista una successione $h_j \rightarrow \infty$ tale che $\text{supp } \varphi_{h_j} \setminus B_j(0) \neq \emptyset$ (ossia esiste $x_j \notin B_j(0)$ tale che $|\varphi_{h_j}(x_j)| = \varepsilon_j > 0$). Ora consideriamo l'insieme

$$A = \{\varphi \in \mathcal{D} : |\varphi(x_j)| < \varepsilon_j \forall j\}.$$

Evidentemente $\varphi_{h_j} \notin A$. Otteniamo un assurdo con i) se mostriamo che A è un aperto di \mathcal{T} . Quindi basta mostrare che per ogni compatto K , $A \cap \mathcal{D}_K$ è aperto in \mathcal{T}_K .

Dato K compatto esiste N tale x_1, \dots, x_N appartengono a K , mentre $x_j \notin K$ per ogni $j > N$. Quindi

$$AD_K = \{\varphi \in \mathcal{D} : |\varphi(\xi_j)| < \varepsilon_j \text{ per } j = \infty, \dots, N\}.$$

è facile vedere che questo è un aperto in \mathcal{D}_K . \square

Esercizio 3.5.4. Dato un compatto K e sia $L : \mathcal{D}_K \rightarrow \mathbb{R}$ è un funzionale lineare, allora L è continuo su \mathcal{D}_K se e soltanto se esistono $C > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tali che

$$|\langle L, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{N,K} \quad \varphi \in \mathcal{D}_K.$$

Suggerimento: Un verso è facile. Provare l'implicazione \implies per assurdo, usando che $\|\varphi\|_{m,K} \leq \|\varphi\|_{N,K}$ per ogni $m \leq N$.

Esercizio 3.5.5. Mostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti

i) $T \in \mathcal{D}'$;

ii) Per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ esistono $C > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tali che

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{N,K} \quad \varphi \in \mathcal{D}_K.$$

3.6 Altri esercizi

Esercizio 3.6.1. Calcolare la derivata nel senso delle distribuzioni delle seguenti distribuzioni

1. $T = 3H$, dove H è la funzione Heaviside, ossia $H(x) = \chi_{[0,+\infty)}$.
2. $T = \delta_0 + 3\delta_1$
3. $T = 2\delta'_0$.

Esercizio 3.6.2. Calcolare il gradiente delle seguenti distribuzioni in \mathbb{R}^2

1. $T = \chi_{\{x_1 > 0\}}$
2. $\langle T, \varphi \rangle = \int_0^1 \varphi(x_1, 0) dx_1$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

Esercizio 3.6.3. Scrivere l'equazione di Eulero-Lagrange associata al problema di minimo

$$\min \left\{ \int_{-1}^1 x^2 |u'|^2 dx : u \in C^1([-1, 1]) \text{ con } u(-1) = 0 \text{ e } u(1) = 1 \right\}.$$

Interpretarla nel senso delle distribuzioni e trovare una soluzione¹³.

Esercizio 3.6.4. Data $T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$ e $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\text{supp } u \subseteq [0, 1]$.

Determinare $v = T * u$ e provare che v è una funzione periodica.

¹³**Richiamo:** L'equazione di Eulero Lagrange associata al funzionale si ottiene facendo le variazioni prime, ossia testando il funzionale con funzioni ammissibili della forma $u + t\varphi$ per $\varphi \in \mathcal{D}$. Una condizione necessaria all'esistenza di un minimo sarà quindi che la funzione $g(t) = \int_{-1}^1 x^2 |u' + t\varphi'|^2 dx$ abbia un minimo in $t = 0$. La condizione $g'(0) = 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ esprime appunto l'equazione di Eulero Lagrange in *debole*

Esercizio 3.6.5. Data la funzione $u(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}$ mostrare che $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e che $u' = \text{vp}\frac{1}{x}$.

Suggerimento: usare che $\int_{\mathbb{R}} \ln|x|\varphi'(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} \ln|x|\varphi'(x) dx$.

Esercizio 3.6.6. Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti mappe da $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ in \mathbb{R} sono delle distribuzioni

$$\langle T_1, \varphi \rangle := \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k), \quad \langle T_2, \varphi \rangle := \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^{(k)}(1),$$

$$\langle T_3, \varphi \rangle := \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^{(k)}(k), \quad \langle T_4, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(x) dx.$$

Esercizio 3.6.7. Provare che se T_n converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ a T allora per ogni multi-
indice α , si ha che $D^\alpha T_n$ converge a $D^\alpha T$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Spazi di Sobolev

Abbiamo visto che perchè valga il teorema fondamentale del calcolo con la derivata q.o. (il che ci garantisce che conoscere la derivata ci “misura” le variazioni della funzione) è necessario che la funzione sia assolutamente continua. Inoltre allargando la nozione di funzione alle distribuzioni abbiamo anche capito che questa proprietà può essere espressa in termini di “regolarità” della derivata distribuzionale (ossia avere derivata distribuzionale in L^1 garantisce assoluta continuità q.o.).

Vogliamo ora spingere questa idea ulteriormente e definire spazi di funzioni abbastanza generali da permettere formulazioni deboli e esistenza delle relative soluzioni di problemi, per esempio, alle derivate parziali, e abbastanza regolari da far sì che tali soluzioni abbiano una buona interpretazione, per esempio, fisica.

Torniamo al problema di Poisson e al principio di Dirichlet citato nell'introduzione.

Cerchiamo strumenti che garantiscano l'esistenza di una soluzione del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

oppure il problema di reazione-diffusione della forma

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.2)$$

La condizione di Dirichlet $u = 0$ su $\partial\Omega$ può essere anche sostituita dalla cosiddetta condizione di Neumann $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, ossia derivata normale uguale a zero. Abbiamo già visto che se u è “soluzione” di (4.2) allora realizza il minimo di

$$\min_{u=0 \text{ su } \partial\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx - \int_{\Omega} f u dx \right\}. \quad (4.3)$$

Se questo minimo esiste (con la necessaria regolarità - per esempio C^1) sappiamo anche che è soluzione della seguente equazione in forma debole

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega). \quad (4.4)$$

A questo punto sappiamo interpretare questa formulazione debole usando le distribuzioni e quindi dire semplicemente che l'equazione $-\Delta u + u = f$ è soddisfatta nel senso delle distribuzioni (ossia in \mathcal{D}').

La questione è capire quali condizioni ci garantiscano che una soluzione esista. Un primo tentativo potrebbe essere quello di riconoscere in

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx \quad (4.5)$$

una struttura di prodotto scalare (per esempio tra funzioni di C^1) e in

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

la norma associata. Questo suggerisce l'uso della struttura di spazio di Hilbert. Il problema è che C^1 non è completo rispetto alla norma $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Esercizio 4.0.1. *Mostrare che la successione $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ appartiene a $C^1([-1, 1])$ ed è di Cauchy rispetto alla norma*

$$\|f\|_{L^2} + \|f'\|_{L^2},$$

ma non ha limite in $C^1([-1, 1])$.

L'idea è quindi quella di chiudere C^1 rispetto alla norma $\|\cdot\|_{H^1}$, in modo da completarlo. Lo spazio così ottenuto è lo spazio $H^1(\Omega)$, dato da

$$H^1(\Omega) := \overline{C^1(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1}}.$$

Vedremo che questo spazio è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare (4.5).

Un altro modo di affrontare il problema è quello di cercare direttamente uno spazio per poter formulare il problema (4.2) (o equivalentemente (4.3)) facendo le richieste minimali di regolarità (il necessario a dar senso al problema). Guardando alla formulazione debole (4.2) è quindi chiaro che dovremmo chiedere $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\nabla u \in L^1_{loc}(\Omega)$ (dove ∇u denota il gradiente nel senso delle distribuzioni). D'altronde il problema (4.3) suggerisce una richiesta poco più forte, ossia $u \in L^2(\Omega)$ e $\nabla u \in L^2(\Omega)$ (il problema del dato al bordo zero lo affronteremo più avanti). Questo porta alla definizione dello spazio di Sobolev

$$W^{1,2}(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega) : \nabla f \text{ in } \mathcal{D}', \nabla f \in [L^2(\Omega)]^n\}. \quad (4.6)$$

Lo spazio $W^{1,2}(\Omega)$ viene munito della norma $\|\cdot\|_{W^{1,2}} = \|\cdot\|_{H^1}$. Lo spazio H^1 e lo spazio $W^{1,2}$ storicamente sono stati introdotti e usati separatamente a partire dagli anni '30. La questione se questi in generale coincidessero è rimasto un problema aperto fino alla dimostrazione del Teorema " $H = W^{1,2}$ ".

Nel caso $\Omega = \mathbb{R}^n$ c'è un altro modo di introdurre lo spazio $H^1(\mathbb{R}^n)$ che fa uso della trasformata di Fourier

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) := \overline{\{f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) : (1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}}^{\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1}},$$

dove $\|f\|_{\mathcal{H}^1} := \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\xi)\|_{L^2}$.

4.1 Derivate deboli

In questo capitolo Ω sarà un aperto di \mathbb{R}^n .

Definizione 4.1.1. *Diciamo che una funzione $L^1_{loc}(\Omega)$ è differenziabile debolmente (ammette derivate deboli) se esistono $g_1, \dots, g_n \in L^1_{loc}(\Omega)$ tale che*

$$\int_{\Omega} f \partial_{x_i} \varphi dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

¹Meyer e Serrin, 1964.

Quindi lo spazio di Sobolev $W^{1,2}$ coincide con le funzioni di L^2 con derivata debole in L^2 .

Vediamo alcune prime proprietà delle derivate deboli.

1. Se le derivate deboli esistono sono determinate univocamente a meno di insiemi di misura nulla. Questo è evidentemente conseguenza del fatto già osservato (nell'Esercizio 3.1.16) che se $g, h \in L^1_{loc}(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} g\varphi \, dx = \int_{\Omega} h\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

allora $g = h$ q.o. in Ω .

2. Le derivate deboli di ordine superiore si possono definire in modo naturale e, se esistono (in altre parole se la corrispondente derivata distribuzionale è in L^1_{loc}), commutano (come avviene per le derivate distribuzionali).
3. Se f è derivabile debolmente e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ anche $f\varphi$ è derivabile debolmente e vale la regola di Leibniz per la derivata del prodotto.
4. Sia $f_n \in L^1_{loc}(\Omega)$ e α un multi-indice in \mathbb{N}^n . Supponiamo che $f_n \rightarrow f$ in $L^1_{loc}(\Omega)$ e $D^\alpha f_n = g_n \rightarrow g$ in $L^1_{loc}(\Omega)$, allora f è derivabile debolmente all'ordine α e $D^\alpha f = g$ q.o. in Ω (provarlo per esercizio).

Esercizio 4.1.2. *Supponiamo che $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ammetta derivata seconda debole nel senso che esista $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tale che*

$$\int_{\mathbb{R}} f\varphi'' \, dx = \int_{\mathbb{R}} g\varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Provare che f ammette derivata prima debole.

Vediamo un po' di esempi di funzioni derivabili debolmente.

- i) Evidentemente, come abbiamo già visto, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localmente assolutamente continua (ossia assolutamente continua in ogni intervallo $[a, b]$), allora la sua derivata q.o. coincide con la derivata debole. Anzi sappiamo che in dimensione 1 le funzioni derivabili debolmente sono tutte e sole le funzioni che coincidono (q.o.) con funzioni assolutamente continue.
- ii) Se $f \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, allora la derivata debole coincide q.o. con la derivata classica (basta applicare la formula di Gauss Green).
- iii) La funzione $f(x) = |x|$ ammette derivata debole (sia in \mathbb{R} che in \mathbb{R}^n). Infatti è facile verificare che in \mathbb{R} ,

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

Invece in \mathbb{R}^n si ha che $\partial_{x_i} f(x) = \frac{x_i}{|x|}$.

- iv) La funzione $\chi_{[0, +\infty)}$ non ammette derivata debole, così come la funzione $\chi_{B_1(0)}$, con $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Le derivate distribuzionali di queste funzioni abbiamo visto infatti che sono misure non assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue.

Esercizio 4.1.3. *Mostrare che se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è Lipschitz allora è derivabile debolmente.*

Suggerimento: *Basta scrivere il rapporto incrementale e usare il teorema di convergenza dominata per passare al limite.*

In generale ci sono funzioni anche non Lipschitz (e addirittura discontinue) che sono derivabili debolmente

v) La funzione $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}$ è derivabile in senso debole e $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

vi) In dimensione $n \geq 3$ la funzione di Green $G(x) = \frac{c_n}{|x|^{n-2}}$ è derivabile debolmente e $\partial_{x_i} G(x) = \frac{c_n(2-n)x_i}{|x|^n}$.

Esercizio 4.1.4. *Sia $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$. Consideriamo $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) := |x|^\alpha$. Provare che f è derivabile in senso debole (ossia il suo gradiente nel senso delle distribuzioni appartiene a $(L^1_{loc}(\Omega))^n$) se e soltanto se $\alpha > -n + 1$.*

Suggerimento: *Considerare prima $\int_{B(0,1) \setminus B(0,\varepsilon)} f \partial_{x_i} \varphi dx$, usar la formula di Gauss Green e poi passare al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Insomma le funzioni derivabili debolmente non sono necessariamente continue (possono per esempio avere discontinuità in punti (in dimensione $n \geq 2$), però non possono avere discontinuità su insiemi troppo grandi (per esempio su ipersuperfici). Vedremo in effetti che le funzioni che ammettono derivate deboli devono essere assolutamente continue su quasi tutte le “sezioni unidimensionali” (questo punto verrà trattato più precisamente più avanti).

4.2 Gli spazi $W^{k,p}$

Passiamo ora alla definizione di un'ampia classe di spazi di Sobolev che sono la naturale generalizzazione dello spazio $W^{1,2}(\Omega)$ (adatti a trattare anche problemi non lineari o di ordine superiore).

Definizione 4.2.1. *Dato $1 \leq p \leq +\infty$ lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni in $L^p(\Omega)$ che ammettono derivate deboli in $L^p(\Omega)$, ossia*

$$W^{1,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : \nabla f \in [L^p(\Omega)]^n\}, \quad (4.7)$$

munito della norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\partial_{x_i} u|^p dx + \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

se $p < +\infty$, mentre per $p = +\infty$

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} := \sup_{\Omega} |u| + \sup_{\Omega} |\nabla u|$$

Osserviamo che una successione u_n converge in $W^{1,p}$ a u se e soltanto se u_n converge a u in L^p e tutte le derivate parziali deboli $\partial_{x_i} u_n$ convergono in L^p alle corrispondenti $\partial_{x_i} u$.

Esercizio 4.2.2. *Mostrare che la norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ è equivalente alla norma*

$$\|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^n \|\partial_{x_i} u\|_{L^p}.$$

Suggerimento: *Per mostrare l'equivalenza bisogna mostrare due disuguaglianze. Una si fa applicando la disuguaglianza di Hölder discreta²*

, l'altra usando la subadditività³ di

$$\varphi(t) = t^{\frac{1}{p}}$$

Esercizio 4.2.3. *Sia $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$. Consideriamo $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) := |x|^\alpha$. Dato $p \in [1, +\infty)$, determinare α in modo che f appartenga a $W^{1,p}(\Omega)$.*

Definizione 4.2.4. *Dato $1 \leq p \leq +\infty$ e $k \in \mathbb{N}$ lo spazio di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni in $L^p(\Omega)$ che ammettono derivate deboli in $L^p(\Omega)$, ossia*

$$W^{k,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}, |\alpha| \leq k\}, \quad (4.8)$$

munito della norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

se $p < +\infty$, mentre per $p = +\infty$

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\Omega} |D^\alpha u|$$

(denotiamo $D^0 u = u$).

Osservazione 4.2.5. *Se Ω è limitato, esattamente come per gli spazi di Lebesgue, come conseguenza della disuguaglianza di Hölder si ha*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,q}(\Omega) \quad \forall p > q$$

e l'inclusione è stretta (si veda l'Esercizio ??).

Inoltre è anche chiaro che, qualsiasi sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$W^{k,p}(\Omega) \subset W^{h,p}(\Omega) \quad \forall k > h.$$

e l'inclusione è stretta.

²Disuguaglianza di Hölder discreta:

$$\sum_{i=1}^N |a_i| |b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^N |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^N |b_i|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}$$

³Mostrare che una funzione $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, concava e che verifica $\varphi(0) = 0$ soddisfa

$$\varphi(a+b) \leq \varphi(a) + \varphi(b) \quad \forall a, b \in [0, +\infty),$$

ossia φ è subadditiva.

Osservazione 4.2.6. *In particolare in \mathbb{R} si ha che*

$$W^{1,p}((a,b)) \subset W^{1,1}((a,b)) \quad \forall p \geq 1.$$

Quindi per ogni funzione $u \in W^{1,p}((a,b))$ esiste un rappresentante continuo \tilde{u} di u . Più precisamente esiste una funzione assolutamente continua in $[a,b]$ tale $\tilde{u} = u$ q.o. in (a,b) e

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_x^y u'(t) dt. \quad (4.9)$$

Infatti sappiamo già che la funzione $v(x) = \int_a^x u'(t) dt$ è assolutamente continua e verifica $v(x) = u(x) + c$ q.o. in (a,b) , da cui deduciamo che $\tilde{u}(x) = v(x) - c$ è il rappresentante continuo di u e verifica (??).

Proposizione 4.2.7. *Lo spazio $W^{k,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach per ogni $p \in [1, +\infty]$ e $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*

Inoltre lo spazio $W^{1,2}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} := \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} uv dx$$

Dimostrazione. Per semplicità consideriamo il caso $k = 1$, il caso generale è completamente analogo. La dimostrazione del fatto che $W^{1,p}(\Omega)$ è completo è conseguenza immediata della completezza di L^p e del fatto che se u_n è di Cauchy in $W^{1,p}(\Omega)$, allora u_n e $\partial_{x_i} u_n$ sono di Cauchy in $L^p(\Omega)$. Quindi u_n converge a u in $L^p(\Omega)$ e $\partial_{x_i} u_n$ converge a v_i in $L^p(\Omega)$ che abbiamo già visto, implica che u è differenziabile debolmente e che $v_i = \partial_{x_i} u$ q.o. in Ω . Provare che $W^{1,2}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert, ossia che $(u, v)_{H^1(\Omega)}$ è un prodotto scalare in $W^{1,2}(\Omega)$ è immediato. \square

È anche spazio di Hilbert lo spazio $W^{k,2}(\Omega)$. Con quale prodotto scalare? Come già detto vedremo in particolare che $W^{1,2} = H^1$. Tradizionalmente per $p = 2$ si usa la notazione H^1 al posto di $W^{1,2}$ (H^k per $W^{k,2}(\Omega)$). La “ H ” sta per “Hilbert”.

4.2.1 Densità e estensione

L'affermazione che $H^1 = W^{1,2}$ corrisponde a provare che ogni C^∞ è denso in $W^{1,2}$. Vedremo che questo risultato di approssimazione è vero in generale per tutti gli spazi di Sobolev. Nel caso $\Omega = \mathbb{R}^n$ questo è espresso dal seguente teorema, mentre il caso generale di Ω aperto qualsiasi di \mathbb{R}^n verrà trattato nel Teorema ??.

Teorema 4.2.8. *Sia $p \in [1, +\infty)$. Se $f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ allora esiste una successione $\varphi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ tale che*

$$\varphi_k \rightarrow f \quad \text{in } W^{k,p}(\mathbb{R}^n).$$

Dimostrazione. La dimostrazione viene immediatamente considerando una successione di mollificatori $\rho_k(x) = k^n \rho(kx)$, con $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\text{supp } \rho \subset B_1(0)$ e definendo

$$\varphi_k(x) = f * \rho_k(x).$$

Sappiamo già che $\varphi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e che $D^\alpha \varphi_k = D^\alpha f * \rho_k$, quindi $\varphi_k \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. La convergenza è una conseguenza dei risultati già noti sulle successioni di mollificatori. \square

Osservazione 4.2.9. *Si vede che si può provare un risultato anche un po' più forte, ossia che $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso in $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ (si veda l'Esercizio ??).*

Per mostrare l'affermazione fatta nell'Osservazione ?? consideriamo la seguente funzione di *troncatura*

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 2 \end{cases} \quad \zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (4.10)$$

Come si prova che esiste una funzione fatta così?

Esercizio 4.2.10. *Definiamo la funzione $\zeta_h(x) = \zeta\left(\frac{x}{h}\right)$ e $g_h = \zeta_h g$ con $g \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.*

1. *Provare che $g_h \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ e che $\text{supp } g_h$ è compatto.*
2. *Provare che g_h converge a g in $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.*
3. *Provare che $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ è denso in $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Il nostro obiettivo è ora provare il risultato di densità anche nel caso $\Omega \neq \mathbb{R}^n$.

Osserviamo che se fossimo in grado di estendere una qualsiasi funzione $f \in W^{1,p}(\Omega)$ a una funzione in $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$, il risultato precedente (e quindi la convoluzione con la successione dei mollificatori) garantirebbe il risultato cercato). Per esempio, provare che $C^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$ si ottiene facilmente estendendo una qualsiasi funzione $f \in L^p(\Omega)$ a

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

e quindi usando la convoluzione. Il punto è che in generale se $f \in W^{1,p}(\Omega)$ la funzione $\tilde{f} \notin W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$. Anzi in generale se non si fanno ipotesi sulla "regolarità" del dominio Ω non è detto che sia possibile estendere funzioni di $W^{1,p}(\Omega)$ a tutto \mathbb{R}^n .

4.2.2 Estensione unidimensionale

Analizziamo brevemente il problema dell'estensione di funzioni di Sobolev partendo dal caso 1-dimensionale che può essere trattato abbastanza semplicemente.

Consideriamo una funzione $u \in W^{1,p}((0, +\infty))$ e definiamo

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x) & x \geq 0 \\ u(-x) & x < 0. \end{cases}$$

Allora $u^* \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ e $\|u^*\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{W^{1,p}((0,+\infty))}$. Infatti è facile provare (ed è lasciato per esercizio) che

$$v(x) = \begin{cases} u'(x) & x \geq 0 \\ -u'(-x) & x < 0. \end{cases}$$

è la derivata debole di u^* . La stima della norma, viene facilmente con un cambio di variabili.

In generale in una variabile è sempre possibile estendere funzioni di Sobolev definite su intervalli a funzioni di Sobolev definite su tutto \mathbb{R} . Per convincersene non è restrittivo supporre che $u \in W^{1,p}((0,1))$ (il passaggio da (a,b) a $(0,1)$ si fa facilmente per traslazione e riscaldamento).

Possiamo estendere u a una funzione $\tilde{u} \in W^{1,p}((-1,2))$ riflettendo u intorno a zero e intorno a 1 ponendo

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & 0 < x < 1 \\ u(-x) & -1 < x \leq 0 \\ u(2-x) & 1 \leq x < 2. \end{cases} \quad (4.11)$$

A questo punto si estende a tutto \mathbb{R} “mandando” a zero la funzione fuori di $(0,1)$ (come nel seguente esercizio).

Esercizio 4.2.11. Sia $u \in W^{1,p}((0,1))$ e \tilde{u} definita come in (??). Sia $\zeta \in C_c^\infty((-1,2))$ con $\zeta = 1$ in $(0,1)$. Provare che $u^* = \zeta \tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, che $u^* = u$ in $(0,1)$ e $\|u^*\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}((0,1))}$.

Esercizio 4.2.12. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Provare che $\bar{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \varphi(x)f(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{altrimenti in } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

appartiene a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

4.2.3 Cenni sull'estensione in \mathbb{R}^n

Il meccanismo di estensione in \mathbb{R}^n sfrutta ancora l'idea della riflessione ma ovviamente è complicato dalla geometria del dominio, in particolare richiede che Ω sia regolare.

Definizione 4.2.13. Diciamo che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 se per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste un intorno di x U e una funzione biunivoca $H : Q \rightarrow U$, tale che $H \in C^1(\bar{Q})$, $H^{-1} \in C^1(\bar{U})$, $H(Q^+) = U \cap \Omega$ (dove $Q^+ = \{x \in Q : x_n > 0\}$) e $H(Q \cap \{x_n = 0\}) = U \cap \partial\Omega$.

L'idea è di localizzare con una partizione dell'unità⁴ e riflettere localmente.

Esercizio 4.2.14. Sia $Q = (-1,1)^n \subset \mathbb{R}^n$ e siano $Q^+ = \{x \in Q : x_n > 0\}$ e $Q^- = \{x \in Q : x_n < 0\}$. Data $u \in W^{1,p}(Q^+)$ definiamo

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in Q^+ \\ u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) & \text{se } x \in Q^- \end{cases}$$

⁴Ricordiamo cosa si intende per una partizione dell'unità subordinata a un ricoprimento di aperti. Se A è un aperto e $\{U_i\}$ una famiglia di aperti che ricoprono A , una *partizione dell'unità subordinata* a $\{U_i\}$ è l'insieme di funzioni $\{\varphi_i\}$ che verificano le seguenti proprietà:

1. $\varphi_i \in C_c^\infty(U_i)$;
2. $0 \leq \varphi_i \leq 1$;
3. per ogni compatti $K \subset A$, si ha che $\varphi_i(x) = 0$ per ogni $x \in K$ e per ogni i (tranne al più un numero finito);
4. $\sum_i \varphi_i(x) = 1$ per ogni $x \in A$.

1. Mostrare che

$$\int_{Q^+} u(x) \partial_{x_i} \psi(x) dx = - \int_{Q^+} \partial_{x_i} u(x) \psi(x) dx$$

per ogni $\psi \in C^1(\overline{Q^+})$ e $\psi = 0$ su ∂Q^+ .

Suggerimento: Usare un argomento di densità.

2. Provare che se $\zeta \in C_c^\infty(Q)$ allora per ogni $i \neq n$

$$\int_{Q^+} u(x) \partial_{x_i} \zeta(x) dx = - \int_{Q^+} \partial_{x_i} u(x) \zeta(x) dx$$

Suggerimento: Scegliere nella definizione di derivata debole $\varphi(x) = \eta_k(x_n) \zeta(x)$, con $\eta \in C_c^\infty((0,1))$ e $\eta_k \nearrow 1$ per $k \rightarrow +\infty$ in $(0,1)$ e passare al limite per $k \rightarrow +\infty$.

3. Mostrare che esiste la derivata debole rispetto a x_n ed è data da

$$\partial_{x_n} \bar{u} = \begin{cases} \partial_{x_n} u(x) & \text{se } x \in Q^+ \\ -\partial_{x_n} u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) & \text{se } x \in Q^- . \end{cases}$$

Suggerimento: Nella definizione di derivata debole cambiare variabili e usare che la funzione $\psi(x', x_n) = \varphi(x', x_n) - \varphi(x', -x_n)$, dove x' denota le prime $n-1$ variabili, verifica le ipotesi del punto 1.

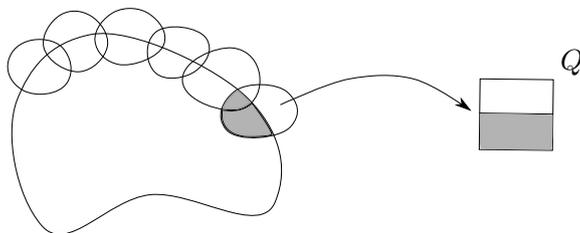
4. Mostrare che esiste la derivata debole rispetto a x_i con $i \neq n$ ed è data da

$$\partial_{x_i} \bar{u} = \begin{cases} \partial_{x_i} u(x) & \text{se } x \in Q^+ \\ \partial_{x_i} u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) & \text{se } x \in Q^- . \end{cases}$$

Suggerimento: Integrale per parti, cambiare variabili e usare che la funzione $\zeta(x', x_n) = \varphi(x', x_n) + \varphi(x', -x_n)$, dove x' denota le prime $n-1$ variabili, verifica le ipotesi del punto 2.

5. Dedurre che \bar{u} è derivabile in senso debole e $\bar{u} \in W^{1,p}(Q)$.

Se quindi $\partial\Omega$ di classe C^1 e compatto, consideriamo un ricoprimento di $\partial\Omega$ con carte locali e localizziamo $u \in W^{1,p}(\Omega)$ nelle carte locali usando una partizione dell'unità.



Su ognuna delle carte locali “raddrizziamo” il bordo usando l’ipotesi di regolarità e estendiamo per riflessione (come nel caso unidimensionale) in un intorno del

bordo. Quindi usiamo lo spazio guadagnato con questa estensione per mandare a zero la funzione e estenderla su tutto \mathbb{R}^n . È chiaro che questa è una descrizione approssimativa del procedimento (giusto per dare l'idea). L'enunciato preciso è il seguente (che non verrà dimostrato qui, ma che può essere trovato in [?]).

Teorema 4.2.15. *Sia Ω di classe C^1 e sia $\partial\Omega$ limitato (oppure $\Omega = \mathbb{R}_+^n$), e $p \in [1, +\infty]$, allora esiste un operatore lineare di estensione*

$$P : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

che verifica

$$Pu(x) = u(x) \quad q.o. \text{ in } \Omega$$

e

$$\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

con C una costante che dipende da Ω .

4.2.4 Teorema di Meyers-Serrin

Il teorema di densità però non richiede alcuna ipotesi di regolarità del dominio.

Teorema 4.2.16 ($H = W$). *Sia $p \in [1, +\infty)$, $k \in \mathbb{N}$. Allora $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ è denso in $W^{k,p}(\Omega)$.*

In particolare questo teorema ci dice che la chiusura di $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ con la norma $W^{k,p}(\Omega)$ coincide con $W^{k,p}(\Omega)$.

Dimostrazione. Faremo la dimostrazione assumendo $k = 1$ (il caso generale è completamente analogo, ma più pensante nelle notazioni). La dimostrazione si articola in più passi: prima si contruisce una opportuna partizione dell'unità di Ω , quindi data una funzione $f \in W^{k,p}(\Omega)$ la si localizza, la si estende a zero su tutto \mathbb{R}^n e la si approssima per convoluzione. Si conclude costruendo un'approssimazione di f a partire dalle approssimazioni locali. Il passo cruciale è la costruzione della partizione dell'unità.

Passo 1: Partizione dell'unità

Per ogni $i \in \mathbb{N}$ consideriamo

$$\Omega_i = \left\{ x \in \Omega : |x| < i, \text{ dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > \frac{1}{i} \right\}.$$

Gli insiemi Ω_i sono aperti limitati, inoltre $\bar{\Omega}_i$ è compatto e

$$\bar{\Omega}_i \subseteq \Omega_{i+1} \quad \Omega = \cup_i \Omega_i.$$

Ora costruiamo due ricoprimenti di Ω , uno con degli aperti V_i e l'altro con dei compatti $K_i \subset V_i$. Poniamo

$$V_i = \Omega_{i+3} \setminus \bar{\Omega}_i \quad K_i = \bar{\Omega}_{i+2} \setminus \Omega_{i+1}$$

e $V_0 = \Omega_3$, $K_0 = \bar{\Omega}_2$. È chiaro che i V_i sono aperti e ricoprono Ω ($\cup_i V_i = \Omega$), così come i K_i sono compatti e ricoprono Ω ($\cup_i K_i = \Omega$). Inoltre i V_i verificano la seguente proprietà: ogni $x \in \Omega$ appartiene al più a tre V_i . Consideriamo quindi per ogni $i \in \mathbb{N}$

una funzione $h_i \in C_c^\infty(V_i)$ tale che $h_i = 1$ in K_i e $0 \leq h_i \leq 1$ e definiamo per $x \in \Omega$ e per ogni i

$$\psi_i(x) = \frac{h_i(x)}{\sum_{j \in \mathbb{N}} h_j(x)}.$$

Poiché ogni $x \in \Omega$ appartiene almeno a un K_i e al più a tre V_i si ha che la somma al denominatore è sempre finita e maggiore o uguale a 1. Quindi le ψ_i sono ben definite e verificano

$$\psi_i \in C_c^\infty(V_i), \quad \psi_i \geq 0, \quad \sum_i \psi_i(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega,$$

in altre parole $\{\psi_i\}$ è una partizione dell'unità subordinata a $\{V_i\}$.

Passo 2: Approssimazione locale

Sia $f \in W^{1,p}(\Omega)$ e sia $\varepsilon > 0$.

Per ogni $i \in \mathbb{N}$ definiamo la funzione $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f_i(x) = \begin{cases} \psi_i(x)f(x) & \text{se } x \in V_i \\ 0 & \text{altrimenti in } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Si vede facilmente (Esercizio (??)) che $f_i \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e che

$$\partial_{x_j} f_i = (\partial_{x_j} f)\psi_i + f(\partial_{x_j} \psi_i).$$

Ora prendiamo una delta approssimante

$$\eta_k(x) = k^n \eta(kx),$$

con $\eta \in C_c^\infty(B_1(0))$ con $\int_{B_1(0)} \eta dx = 1$. Per ogni $i \in \mathbb{N}$ si ha che $\eta_k * f_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e $\eta_k * f_i$ converge a f_i in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ per $k \rightarrow \infty$. Inoltre poiché $\text{supp} \eta_k * f_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, \text{supp} f_i) \leq \frac{1}{k}\}$, si ha che possiamo scegliere k abbastanza grande tale che $\eta_k * f_i \in C_c^\infty(V_i)$. Fissiamo quindi k_i in modo che $g_i(x) = \eta_{k_i} * f_i(x)$ verifichi

$$g_i \in C_c^\infty(V_i) \quad \text{e} \quad \|g_i - f_i\|_{W^{1,p}(V_i)} \leq 2^{-i} \varepsilon. \quad (4.12)$$

Passo 3: Conclusione

Poniamo

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x) \quad x \in \Omega.$$

Poiché $g_i \in C_c^\infty(V_i)$ e dato comunque $x \in \Omega$ questo appartiene al più a tre V_i , la serie è sempre finita e la funzione g è ben definita in Ω . Inoltre si verifica facilmente che $g \in C^\infty(\Omega)$. Infatti per ogni fissato $i \geq 3$, poiché $V_i = \Omega_{i+3} \setminus \bar{\Omega}_i$ e $V_j \cap \Omega_i = \emptyset$ per ogni $j \geq i$, per ogni $x \in \Omega_i$ si ha che

$$g_j(x) = 0 \quad \forall j \geq i.$$

Quindi

$$g(x) = \sum_{j=0}^i g_j(x) \quad \forall x \in \Omega_i,$$

e analogamente

$$f(x) = \sum_{j=0}^i f_j(x) \quad \forall x \in \Omega_i.$$

Quindi usando (??) otteniamo

$$\|f - g\|_{W^{1,p}(\Omega_i)} \leq \sum_{j=0}^i \|f_j - g_j\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{j=0}^i 2^{-j} \varepsilon \leq 2\varepsilon,$$

per ogni $i \in \mathbb{N}$. Poiché $f \in W^{1,p}(\Omega)$ facendo il limite per $i \rightarrow \infty$ (ossia per $\Omega_i \nearrow \Omega$) si deduce che $g \in W^{1,p}(\Omega)$ (oltre a essere in $C^\infty(\Omega)$ come già osservato) e

$$\|f - g\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq 2\varepsilon$$

e questo conclude la dimostrazione. \square

Osservazione 4.2.17. *Evidentemente questo risultato non si estende a $W^{1,\infty}(\Omega)$ (cioè $p = +\infty$). Per esempio la funzione $f(x) = |x|$ appartiene a $W^{1,\infty}((-1, 1))$ ma non si può approssimare in norma $W^{1,\infty}$ con funzioni regolari.*

Osserviamo che la funzione g costruita nella dimostrazione è somma di funzioni a supporto compatto in Ω ma in generale non sarà nulla sul bordo di Ω (essendo però nulla fuori di Ω avrà una discontinuità sul bordo).

In generale dato un dominio Ω qualsiasi non è sempre possibile estendere funzioni $W^{1,p}(\Omega)$ e quindi non è sempre possibile approssimarle (in Ω) con funzioni che sono in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Esempio 4.2.18. *Fissiamo $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 1, 0 < y < 1\}$ e consideriamo la funzione*

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Evidentemente questa funzione è in $W^{1,p}(\Omega)$ ma non può essere estesa a una funzione in $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$. Provare per esercizio che non è possibile approssimare u in $W^{1,p}(\Omega)$ con una successione in $C^\infty(\mathbb{R}^2) \cap W^{1,p}(\Omega)$.

4.2.5 Regole di calcolo

Avendo il teorema di approssimazione con funzioni regolari, possiamo estendere alcune delle regole di calcolo alle derivate deboli.

Proposizione 4.2.19 (Regola del prodotto). *Sia $p \in [1, +\infty]$ e p' il suo esponente coniugato (ossia tale che $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$, $p' = 1$ nel caso $p = +\infty$). Sia $f \in W^{1,p}(\Omega)$ e $g \in W^{1,p'}(\Omega)$. Allora $fg \in W^{1,1}(\Omega)$ e*

$$\partial_{x_i}(fg) = g\partial_{x_i}f + f\partial_{x_i}g. \quad (4.13)$$

Dimostrazione. I dettagli della dimostrazione sono lasciati per esercizio (e comunque si possono trovare in [?], Proposizione IX.4). La dimostrazione segue facilmente scrivendo la derivata del prodotto in forma debole per due successioni f_n e g_n di funzioni $C^\infty(\Omega)$ che approssimano f e g , rispettivamente, e quindi passando al limite negli integrali. \square

Esercizio 4.2.20. Se Ω è limitato e $f, g \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, provare che $fg \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e vale (??).

Proposizione 4.2.21 (Regola della catena). Sia $G \in C^1(\mathbb{R})$ con $G(0) = 0$ e $|G'(t)| \leq M$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Dato $f \in W^{1,p}(\Omega)$, provare che $G \circ f \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$\partial_{x_i}(G \circ f) = (G' \circ f) \partial_{x_i} f. \quad (4.14)$$

Dimostrazione. I dettagli della dimostrazione sono lasciati per esercizio (e comunque si possono trovare in [?], Proposizione IX.5). Usando le ipotesi su G si vede facilmente che $G \circ u \in L^p(\Omega)$ e che $(G' \circ u) \partial_{x_i} u \in L^p(\Omega)$. Quindi si procede per approssimazione. Data $u \in W^{1,p}(\Omega)$, con $p < \infty$, troviamo $u_n \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ che converge a u . Per u_n vale

$$\int_{\Omega} G(u_n(x)) \partial_{x_i} \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} G'(u_n(x)) \partial_{x_i} u_n(x) \varphi(x) dx \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Per concludere basta passare al limite per $n \rightarrow +\infty$ usando la lipschitzianità di G . Il caso $p = +\infty$ si fa considerando $\Omega' \subset\subset \Omega$ (in particolare Ω' limitato) e osservando che se $f \in W^{1, \infty}(\Omega)$ allora $f \in W^{1,p}(\Omega')$. \square

Esercizio 4.2.22. Sia $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Provare che le funzioni

$$f^+ := \max\{f, 0\} \quad f^- := \max\{-f, 0\} \quad |f| = f^+ - f^-$$

sono in $W^{1,p}(\Omega)$, come derivate deboli date da

$$\partial_{x_i} f^+ = \chi_{E^+} \partial_{x_i} f \quad \partial_{x_i} f^- = -\chi_{E^-} \partial_{x_i} f \quad \partial_{x_i} |f| = \chi_{E^+} \partial_{x_i} f - \chi_{E^-} \partial_{x_i} f,$$

con

$$E^+ := \{x \in \Omega : f(x) > 0\} \quad E^- := \{x \in \Omega : f(x) < 0\}.$$

Dedurre che per ogni $M > 0$ la funzione troncata

$$T_M f = f \wedge M \vee -M = \max\{\min\{f, M\}, -M\}$$

appartiene a $W^{1,p}(\Omega)$.

Suggerimento: È sufficiente fare il caso f^+ . Data la funzione

$$g_k(t) = \frac{k}{2} \int_{t-\frac{1}{k}}^{t+\frac{1}{k}} s^+ ds,$$

provare che $g_k \in C^1(\mathbb{R})$, che $|g_k(t) - t^+| \leq \frac{1}{k}$, $|g'_k(t)| \leq 1$, $g'_k \rightarrow 0$ in $(-\infty, 0)$ e $g'_k \rightarrow 1$ in $(0, +\infty)$. Definire quindi $\tilde{g}_k(t) = g_k(t - \frac{1}{k})$. Osservare che $\tilde{g}'_k(0) = 0$, $\tilde{g}'_k \rightarrow 0$ in $(-\infty, 0]$ e $\tilde{g}'_k \rightarrow 1$ in $(0, +\infty)$. Quindi usare la regola della catena e passare al limite (giustificando i passaggi) per $k \rightarrow \infty$.

Esercizio 4.2.23. Sia $p \in [1, +\infty]$ e $f \in W^{1,p}(\Omega)$. Sia $E \subseteq \Omega$ misurabile e $a \in \mathbb{R}$. Provare che

$$f = a \quad \text{in } E \quad \implies \quad \partial_{x_i} f = 0 \quad \forall i.$$

Suggerimento: Usare l'Esercizio ?? e il fatto che $f = (f - a)^+ - (f - a)^- + a$.

4.3 Lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$

Usando un argomento di densità si può anche definire un sottospazio di $W^{1,p}(\Omega)$ (con $p < +\infty$) che sarà utile per trattare problemi in cui si vuole assegnare il dato al bordo (ricordiamoci che in linea di principio le funzioni degli spazi di Sobolev sono definite a meno di insiemi di misura nulla e quindi assegnarne il valore su un insieme $n - 1$ dimensionale richiede cautela).

Definizione 4.3.1. Sia $p \in [1, +\infty)$, definiamo lo spazio

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{C_c^1(\Omega)}^{W^{1,p}} = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}}.$$

Useremo soprattutto il caso $p = 2$ che denotiamo con

$$H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega)$$

(per le ragioni già discusse).

Analogamente si può definire lo spazio $W_0^{k,p} := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{k,p}}$ e $H_0^k(\Omega) := W_0^{k,2}(\Omega)$, for $k \in \mathbb{N}$.

Osservazione 4.3.2. Lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ è un sottospazio chiuso di $W^{1,p}(\Omega)$, e quindi è uno spazio di Banach. In particolare $H_0^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare $(\cdot, \cdot)_{H^1}$.

Vedremo più avanti alcune caratterizzazioni degli spazi $W_0^{1,p}(\Omega)$. Vediamo ora qualche caso in cui possiamo riconoscere se una funzione effettivamente appartiene a $W_0^{1,p}$.

Esempi 4.3.3. 1. Se $f \in W^{1,p}(\Omega)$ e esiste un compatto $K \subset \Omega$ tale che $f = 0$ q.o. in $\Omega \setminus K$, allora $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Infatti in questo caso se consideriamo la funzione

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{altrimenti in } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

è facile mostrare che $\bar{f} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Basta infatti fissare una funzione $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ con $\psi = 1$ in K . Allora si ha che $\psi f = \bar{f}$ e si conclude grazie all'esercizio (??). Basta quindi considerare una successione di mollificatori η_j e la convoluzione $f_j = \eta_j * \bar{f}$. Per j grande abbastanza $f_j \in C_c^\infty(\Omega)$ e f_j converge a f in $W^{1,p}$, da cui si conclude.

2. Nel caso uni-dimensionale la caratterizzazione dello spazio $W_0^{1,p}((a,b))$ è immediata. Si vede infatti che

$$f \in W_0^{1,p}((a,b)) \iff \tilde{f}(a) = \tilde{f}(b) = 0,$$

dove \tilde{f} è il rappresentante continuo di f .

Un verso di questa caratterizzazione è immediato. Infatti se f è il limite in $W^{1,p}$ di una successione $f_j \in C_c^\infty((a,b))$, in particolare $f_j(a) = f_j(b) = 0$. Allora grazie al teorema fondamentale del calcolo

$$f_j(x) = \int_a^x f_j'(t) dt \quad e \quad \tilde{f}(x) = \int_a^x f'(t) dt$$

da cui si deduce che f_j converge uniformemente a \tilde{f} in $[a, b]$. Infatti

$$|f_j(x) - \tilde{f}(x)| \leq \int_a^x |f'_j(t) - f'(t)| dt \leq (b-a)^{\frac{1}{p'}} \|f'_j - f'\|_{L^p((a,b))},$$

dove p' è l'esponente coniugato a p e abbiamo usato la disuguaglianza di Hölder. E quindi $\tilde{f}(a) = \tilde{f}(b) = 0$.

Viceversa, per mostrare che se $\tilde{f}(a) = \tilde{f}(b) = 0$, si ha che $f \in W_0^{1,p}((a,b))$ bisogna costruire una successione in $C_c^\infty((a,b))$ che converge a f in $W^{1,p}$. Per fare questo basta “restringere” il supporto di f (in modo che diventi a supporto compatto) e poi usare il punto precedente. Non è restrittivo supporre che f sia continua (altrimenti la sostituiamo con il suo rappresentante continuo). Basta quindi considerare una funzione

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| \leq 1 \\ t & \text{se } |t| \geq 2, \end{cases}$$

con $G \in C^1(\mathbb{R})$, $|G(t)| \leq |t|$ e $G'(t) \leq M$ (è facile vedere che questa funzione esiste, basta mollificare $g(x) = x\chi_{\mathbb{R} \setminus (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})}$). Si definisce quindi

$$f_n(x) = \frac{1}{n} G(nf(x)).$$

È facile provare (lasciato per esercizio) che f_n è a supporto compatto in (a,b) , appartiene a $W^{1,p}((a,b))$ e grazie al punto 1. appartiene a $W_0^{1,p}((a,b))$. Inoltre f_n converge a f in $W^{1,p}$ e quindi deduciamo che $f \in W_0^{1,p}((a,b))$.

Con un argomento simile a quello visto nel caso uni-dimensionale dell'esempio precedente si può provare il seguente risultato (che non proviamo ma che chi è interessato può trovare su [?], Teorema IX.17).

Proposizione 4.3.4. *Se Ω è di classe C^1 allora se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- i) $u = 0$ su $\partial\Omega$;
- ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Osservazione 4.3.5. È facile mostrare che se $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$ allora la funzione

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{altrimenti in } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

appartiene a $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (si lasciano i dettagli per esercizio). Inoltre, dal risultato di densità di $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ deduciamo che

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Capiremo presto che le proprietà generali degli spazi di Sobolev (la struttura di Banach e, nel caso $p = 2$, la struttura di spazio di Hilbert), li rendono “ambienti” molto naturali per la formulazione di vari problemi (anche classici) di equazioni alle derivate parziali.

4.3.1 Applicazione a un'equazione di reazione-diffusione

Come esempio riprendiamo il problema di reazione-diffusione considerato nell'Introduzione

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.15)$$

Abbiamo già discusso che quando esiste una soluzione "classica" (per esempio $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, con $u = 0$ su $\partial\Omega$) di questo problema questa verifica anche

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega). \quad (4.16)$$

Ora se f non è regolare (per esempio è solo in $L^2(\Omega)$) non ci possiamo aspettare una soluzione classica di (??), ma possiamo ridurre le nostre richieste e considerare (??) come la *formulazione debole* di (??), chiedendo che $u \in H_0^1(\Omega)$. Inoltre se $u \in H_0^1(\Omega)$ e vale (??), ragionando per densità possiamo richiedere che

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.17)$$

Proviamo che esiste un'unica *soluzione debole* in $H_0^1(\Omega)$ di (??).

Infatti $H_0^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert e l'equazione (??) corrisponde a

$$(u, v)_{H^1} = \int_{\Omega} fv \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Osserviamo inoltre che

$$v \mapsto \int_{\Omega} fv \, dx$$

è un funzionale lineare e continuo⁵ da $H_0^1(\Omega)$ in \mathbb{R} .

Si può quindi applicare il Teorema di Riezs.

Teorema 4.3.6. *Se H è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare $(\cdot, \cdot)_H$ e T un elemento del duale H' , allora esiste un'unico $u \in H$ tale che*

$$(u, v)_H = T(v) \quad \forall v \in H.$$

Inoltre u è anche l'unico elemento che verifica

$$\frac{1}{2}(u, u)_H - T(u) = \min_{v \in H} \frac{1}{2}(v, v)_H - T(v).$$

Per concludere quindi basta applicare il Teorema di Riezs con $H = H_0^1(\Omega)$,

$$(u, v)_H = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx$$

e

$$T(v) = \int_{\Omega} fv \, dx.$$

Se ne deduce anche che la soluzione u è anche l'unico punto di minimo di

$$\min_{H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\Omega} u^2 \, dx - \int_{\Omega} fu \, dx \right\},$$

ossia la validità del principio di Dirichlet.

⁵Per una caratterizzazione completa del duale degli spazi di Sobolev rimandiamo al Capitolo ??

Esercizio 4.3.7. *Provare che esiste un'unica soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema*

$$\int_{\Omega} a(x) \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} c(x) u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (4.18)$$

con $a, c \in L^\infty(\Omega)$ e $c(x) \geq c > 0$ e $a(x) \geq \alpha > 0$ q.o. in Ω .

Suggerimento: *Provare che $\int_{\Omega} a \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} c uv dx$ definisce un prodotto scalare equivalente a $(\cdot, \cdot)_{H^1}$ e usare il Teorema di Riezs.*

Esercizio 4.3.8. *Data $f \in L^2(a, b)$.*

1. *Provare che esiste un'unica funzione $u \in H^1(a, b)$ che verifica*

$$\int_a^b u' v' dx + \int_a^b uv dx = \int_a^b f v dx \quad \forall v \in H^1(a, b).$$

2. *Mostrare che u è anche l'unico punto di minimo di*

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_a^b |u'|^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b |u|^2 dx - \int_a^b f u : u \in H^1(a, b) \right\}.$$

3. *Provare che $u \in H^2(a, b)$.*

4. *Integrando per parti mostrare che u verifica*

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{q.o. in } (a, b) \\ u'(a) = u'(b) = 0 \end{cases}$$

(le condizioni al bordo $u'(a) = u'(b) = 0$ si chiamano condizioni di Neumann e si dice che sono le condizioni al bordo naturali, nel senso che si ottengono come conseguenza dell'equazione in forma debole senza imporre ulteriori vincoli).

4.3.2 Disuguaglianza di Poincaré

La struttura di spazio di Hilbert quindi ci permette di trattare problemi lineari della forma (??). Vediamo che possiamo trattare anche il caso $c = 0$, in particolare troviamo una soluzione debole del problema di Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.19)$$

Teorema 4.3.9. *Sia $p \in [1, +\infty)$ e Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n . Esiste una costante $C > 0$ (dipendente da p e Ω) tale che*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (4.20)$$

Osservazione 4.3.10. *La disuguaglianza di Poincaré è la versione "quantitativa" del risultato che afferma che se una funzione in $W_0^{1,p}(\Omega)$ che verifica $\nabla u = 0$, allora $u = 0$. In altre parole ci dice quanto vicino (in norma L^p) sia u a zero se ∇u è vicino a zero (sempre in norma L^p).*

La dimostrazione che vediamo ora non fornisce la costante ottimale di Poincaré, che invece verrà discussa in seguito ha un importante significato.

Dimostrazione. Supponiamo per iniziare che $u \in C_c^\infty(\Omega)$ e fissiamo $L = \text{diam } \Omega$. Senza perdere in generalità possiamo supporre che $\Omega \subseteq Q_L = (0, L)^n$. Per ogni $x \in \Omega$ denotiamo $x = (x_1, x')$, con $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $\bar{x} = (0, x')$. Grazie alla regolarità di u , usando il teorema fondamentale del calcolo e il fatto che u è uguale a zero sul bordo di Q_L , si ha

$$u(x) = \int_0^{x_1} \partial_{x_1} u(s, x') ds.$$

E quindi elevando alla p e usando la disuguaglianza di Hölder (con p e l'esponente coniugato p')

$$\begin{aligned} |u(x)|^p &= \left| \int_0^{x_1} \partial_{x_1} u(s, x') ds \right|^p \leq |x_1|^{\frac{p}{p'}} \int_0^{x_1} |\partial_{x_1} u(s, x')|^p ds \\ &\leq L^{\frac{p}{p'}} \int_0^L |\partial_{x_1} u(s, x')|^p ds. \end{aligned}$$

Quindi integrando su Ω si ha

$$\int_{Q_L} |u(x)|^p dx \leq L^{\frac{p}{p'}+1} \int_{Q_L} |\partial_{x_1} u(x)|^p dx$$

da cui, tenendo conto che $\frac{p}{p'} + 1 = p$ e che u ha supporto in Ω , e stimando il modulo della derivata parziale con il modulo del gradiente, si ha

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \leq L^p \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx. \quad (4.21)$$

Per estendere la stima a tutte le funzioni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, basta notare che per definizione esiste una successione u_k in $C_c^\infty(\Omega)$ convergente a u in norma $W^{1,p}$. In particolare $\|u_k\|_{L^p} \rightarrow \|u\|_{L^p}$ e $\|\nabla u_k\|_{L^p} \rightarrow \|\nabla u\|_{L^p}$. Quindi applicando la disuguaglianza (??) a u_k e passando al limite, si ottiene la tesi. \square

Osservazione 4.3.11. È chiaro che la stessa dimostrazione vale anche per altri domini (non necessariamente limitati). Per esempio se $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_1 < L\}$

Osservazione 4.3.12. La disuguaglianza di Poincaré non vale in $\Omega = \mathbb{R}^n$. Prendiamo per esempio $u \in H^1(\mathbb{R})$ e definiamo

$$v_n(x) = u\left(\frac{x}{n}\right).$$

Allora $v_n'(x) = \frac{1}{n} u'\left(\frac{x}{n}\right)$ e

$$\int_{\mathbb{R}} |v_n|^2 dx = n \int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx \rightarrow +\infty \quad \text{per } n \rightarrow +\infty,$$

mentre

$$\int_{\mathbb{R}} |v_n'|^2 dx = \frac{n}{n^2} \int_{\mathbb{R}} |u'|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Quindi è chiaro che in questo caso la disuguaglianza di Poincaré non può valere.

Osservazione 4.3.13. La dipendenza della costante dalla “grandezza” del dominio è ottimale (ossia è dimensionalmente giusta). Per capire cosa si intende consideriamo $\Omega = Q_1$ e supponiamo di avere una costante di Poincaré ottimale per Q_1 , chiamiamola $C_1(p)$, ossia

$$\int_{Q_1} |u|^p dx \leq C_1(p) \int_{Q_1} |\nabla u|^p dx \quad \forall u \in W_0^{1,p}(Q_1).$$

Ora presa $u \in W_0^{1,p}(Q_L)$ si ha che $\tilde{u}(x) = u(Lx)$ appartiene a $W_0^{1,p}(Q_1)$ e $\nabla \tilde{u}(x) = L \nabla u(Lx)$. Applicando la disuguaglianza di Poincaré a \tilde{u} e facendo un cambio di variabile otteniamo

$$L^{-n} \int_{Q_L} |u|^p dx = \int_{Q_1} |\tilde{u}|^p dx \leq C_1(p) \int_{Q_1} |\nabla \tilde{u}|^p dx = L^{p-n} C_1(p) \int_{Q_L} |\nabla u|^p dx$$

da cui deduciamo che la costante di Poincaré ottimale in Q_L è $L^p C_1(p)$.

Osservazione 4.3.14. Un importante conseguenza della disuguaglianza di Poincaré (la più importante) è che se Ω è limitato (in generale se in Ω vale la disuguaglianza di Poincaré) allora

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

è una norma equivalente alla norma $W^{1,p}$. Infatti evidentemente $\|\nabla u\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p} \leq \|u\|_{W^{1,p}}$, mentre grazie alla disuguaglianza di Poincaré $\|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p} \leq (1+C)\|\nabla u\|_{L^p} = \|u\|_{W_0^{1,p}}$ (dove C è la disuguaglianza di Poincaré).

In particolare lo spazio $H_0^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare

$$(u, v)_{H_0^1} := \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

Per capire l'importanza della disuguaglianza di Poincaré mostriamo un esempio di applicazione che fa uso del fatto che H_0^1 è uno spazio di Hilbert e che in uno spazio di Hilbert vale il teorema di rappresentazione di Riezs, che richiameremo più avanti.

4.3.3 Applicazione al problema di Poisson. Esistenza e regolarità

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e consideriamo il problema di Poisson (??).

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.22)$$

Ora se $f \in L^2(\Omega)$ in genere non ci possiamo aspettare una soluzione *classica* di (??) quindi anche in questo caso consideriamo il problema in forma debole chiedendo che $u \in H_0^1(\Omega)$ verifichi

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.23)$$

Il principio di Dirichlet *rilassato* afferma quindi che u è anche un punto di minimo (l'unico) del problema *variazionale*

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} f u dx : u \in H_0^1(\Omega) \right\}. \quad (4.24)$$

Questo risultato è di nuovo garantito dal Teorema di Riezs applicato in $H_0^1(\Omega)$, con prodotto scalare $(\cdot, \cdot)_{H_0^1}$. Infatti se $f \in L^2(\Omega)$ si ha che

$$\left| \int_{\Omega} f u \, dx \right| \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2}.$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la disuguaglianza di Poincaré. Quindi

$$u \mapsto \int_{\Omega} f u \, dx =: F(u)$$

è un funzionale lineare e continuo in $(H_0^1(\Omega))'$. Quindi il teorema di Riezs garantisce che esista un unico $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

e quindi (??). Inoltre questo u è anche l'unico punto di minimo di (??).

Esercizio 4.3.15. Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato e $f \in L^2(\Omega)$. Fissato $i \in \{1, \dots, n\}$ mostrare che esiste un'unica funzione $w_i \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_{\Omega} \nabla w_i \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f \partial_{x_i} v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (4.25)$$

Suggerimento: Mostrare che $F(v) = \int_{\Omega} f \partial_{x_i} v \, dx$ è un elemento del duale di $H_0^1(\Omega)$.

Il punto di vista delle soluzioni deboli è quindi di diminuire le richieste di regolarità per le soluzioni (si dice “rilassare il problema”) in modo da garantirne l'esistenza e, eventualmente recuperare le soluzioni classiche mostrando a posteriori che le soluzioni deboli sono più regolari di quanto non si fosse richiesto in partenza. Questo secondo processo è quello che va sotto il nome di teoria della regolarità. Per esempio sappiamo già che se fossimo in grado di mostrare che la soluzione u di (??) in realtà è in $C^2(\Omega) \cap C(\Omega)$ e Ω è un dominio regolare, allora sarebbe soluzione classica di (??). A volte non si riesce ad arrivare a tanto, ma si possono mostrare dei risultati di regolarità parziale. Vale per esempio il seguente risultato.

Proposizione 4.3.16. Sia Ω limitato, $f \in L^2(\Omega)$. Se la funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ verifica

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega), \quad (4.26)$$

allora $u \in H_{loc}^2(\Omega)$.

Vedremo più avanti che appartenere H^2 fa guadagnare ulteriore regolarità. Per esempio in una variabile si ha che se $u \in H^2(a, b)$, allora $\tilde{u} \in C^1(a, b)$ (controllare per esercizio).

Dimostrazione. La dimostrazione fa uso del Lemma di Weyl in forma localizzata. Per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ consideriamo la funzione $w_i \in H_0^1(\Omega)$ trovata nell'Esercizio ???. Questa verifica

$$\int_{\Omega} \nabla w_i \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f \partial_{x_i} v \, dx \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega)$$

che confrontata con (??) implica che

$$\int_{\Omega} \nabla w_i \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \partial_{x_i} v \, dx \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega).$$

Questo implica, interpretando u e w_i come distribuzioni che

$$\langle \Delta w_i, v \rangle = -\langle \Delta(\partial_{x_i} u), v \rangle \quad \forall v \in C_c^\infty(\Omega).$$

In altre parole $\Delta(w_i + \partial_{x_i} u) = 0$ nel senso delle distribuzioni in Ω . Possiamo quindi concludere con il Lemma di Weyl (in forma localizzata) che $w_i + \partial_{x_i} u$ è una funzione $C^\infty(\Omega)$. Poiché $w_i \in H_0^1(\Omega)$, si ha che le derivate parziali nel senso delle distribuzioni $\partial_{x_i} u$ sono somma di una funzione $C^\infty(\Omega)$ e una in $H_0^1(\Omega)$, e quindi sono in particolare appartengono a $H_{loc}^1(\Omega)$. In conclusione $u \in H_{loc}^2(\Omega)$. \square

Si noti che la regolarità è solo locale. Se si vuole ottenere un risultato di regolarità fin sul bordo (per esempio il fatto che $u \in H^2(\Omega)$) si deve supporre che Ω sia regolare.

Richiami sugli spazi di Hilbert e applicazioni

Abbiamo già visto quanto la struttura di spazio di Hilbert collegata con le proprietà degli spazi di Sobolev H^1 e H_0^1 sia utile per la soluzione di problemi alle derivate parziali classici, come l'equazione di Poisson e il principio di Dirichlet. Racogliamo qui alcuni fatti essenziali sugli spazi di Hilbert che poi verranno utilizzati in varie applicazioni (in particolare legate a equazioni alle derivate parziali lineari).

5.1 Generalità

Se H è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} , una applicazione $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ è un *prodotto scalare* in H se verifica

- i) (bilineare) $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$ e $(w, \alpha u + \beta v) = \alpha(w, u) + \beta(w, v)$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v, w \in H$;
- ii) (simmetrica) $(u, v) = (v, u)$ per ogni $u, v \in H$;
- iii) (definita positiva) $(u, u) \geq 0$ per ogni $u \in H$ e $(u, u) = 0$ se e solo se $u = 0$;

Osservazione 5.1.1 (Disuguaglianza di Cauchy- Schwartz). *È facile vedere che una forma bilineare simmetrica positiva verifica la disuguaglianza di Cauchy- Schwartz*

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}}(v, v)^{\frac{1}{2}}.$$

Infatti per ogni $u, v \in H$, con $v \neq 0$, e $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$0 \leq (u - tv, u - tv) = (u, u) + t^2(v, v) - 2t(u, v).$$

Scegliendo quindi $t = \left(\frac{(u, v)}{(v, v)}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Dato un prodotto scalare su H allora

$$\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$$

definisce una norma su H . e questa norma verifica *l'identità del parallelogramma*

$$\left\| \frac{a+b}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{a-b}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}\|a\|^2 + \frac{1}{2}\|b\|^2 \quad (5.1)$$

per ogni $a, b \in H$.

Definizione 5.1.2. *Uno spazio vettoriale H munito di un prodotto scalare è uno spazio di Hilbert se è completo rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare.*

Spazi di Hilbert sono ovviamente gli spazi euclidei finito dimensionali \mathbb{R}^n , così come tra gli spazi infinito dimensionali gli esempio principali sono ℓ^2 e L^2 . Abbiamo notato, e già usato, che anche H^1 e H_0^1 hanno la struttura di spazio di Hilbert. Lo spazio $\ell^2 = \{x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \sum_n x_n^2 < +\infty\}$ munito della norma $\|x\| = (\sum_n x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ è evidentemente lo spazio infinito dimensionale “più vicino” a uno spazio euclideo finito dimensionale, per il quale quindi valgono molti risultati naturali in dimensione finita. Contemporaneamente ℓ^2 è un esempio prototipo di spazio di Hilbert. Vale infatti il seguente risultato che enunciamo per completezza, ma che non dimostriamo.

Teorema 5.1.3. *Se H è uno spazio di Hilbert infinito dimensionale, allora H è separabile se e solo se H è isometrico a ℓ^2 .*

In particolare si può dimostrare che se H è un Hilbert separabile esiste sempre una *base ortonormale completa* $\{e_n\} \in H$ tale che $\|e_n\| = 1$ per ogni n , $(e_n, e_m) = 0$ per ogni $n \neq m$ e

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} (x, e_n) e_n \quad \forall x \in H$$

e che la mappa

$$x \mapsto \{x_n\} = \{(x, e_n)\}$$

è un'isometria da H a ℓ^2 .

Questa identificazione permette di provare molte buone proprietà degli spazi di Hilbert separabili, che quindi valgono anche per L^2 e H^1 (che sono Hilbert separabili).

5.2 La proiezione

Anche senza assumere la separabilità, la completezza rispetto a una norma indotta da un prodotto scalare garantisce proprietà molto buone e robuste agli spazi di Hilbert. Il risultato principale in questo senso è il teorema della proiezione.

Teorema 5.2.1. [*Teorema della proiezione*] *Se K è un convesso chiuso non vuoto in uno spazio di Hilbert H , allora per ogni $u \in H$ esiste un unico elemento $u_0 \in K$ tale che*

$$\|u - u_0\| = \min_{v \in K} \|u - v\|.$$

Inoltre questo elemento u_0 è caratterizzato dalla seguente proprietà

$$(u - u_0, v - u_0) \leq 0 \quad \forall v \in K. \quad (5.2)$$

L'elemento u_0 si chiama proiezione di u su K e si indica con $P_K(u) = u_0$.

Dimostrazione. Consideriamo una successione minimizzante, ossia una successione $u_n \in K$ tale che

$$d_n := \|u - u_n\| \rightarrow \inf_{v \in K} \|u - v\| =: d$$

(questa successione esiste per definizione di inf e perché K è non vuoto).

Ora mostriamo che u_n è una successione di Cauchy. Fissiamo quindi $n, m \in \mathbb{N}$ e applichiamo l'identità del parallelogramma (??) con $a = u - u_n$ e $b = u - u_m$. Otteniamo quindi

$$\left\| u - \frac{u_n + u_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u_n - u_m}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \|u - u_n\|^2 + \frac{1}{2} \|u - u_m\|^2. \quad (5.3)$$

Osserviamo che poiché K è convesso abbiamo che $\frac{u_n+u_m}{2} \in K$ e quindi

$$\left\| u - \frac{u_n + u_m}{2} \right\|^2 \geq d.$$

Quindi da (??) deduciamo

$$\left\| \frac{u_n - u_m}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \|u - u_n\|^2 + \frac{1}{2} \|u - u_m\|^2 - d^2 = \frac{1}{2} d_n^2 + \frac{1}{2} d_m^2 - d^2.$$

Il fatto che u_n sia di Cauchy si deduce quindi dall'ipotesi che $d_n \rightarrow d$. Quindi, essendo H completo esiste $u_0 \in H$ tale che $u_n \rightarrow u_0$ e poiché K è chiuso deduciamo che $u_0 \in K$ e quindi realizza il minimo, ossia

$$\|u - u_0\| = \min_{v \in K} \|u - v\|.$$

Per provare (??) notiamo che per ogni $v \in K$, grazie alla convessità di K , $tv + (1-t)u_0 \in K$ per ogni $t \in [0, 1]$. Quindi

$$\begin{aligned} \|u - u_0\|^2 &\leq \|u - (tv + (1-t)u_0)\|^2 \leq (u - u_0 - t(v - u_0), u - u_0 - t(v - u_0)) \\ &= \|u - u_0\|^2 + t^2 \|v - u_0\|^2 - 2t(v - u_0, u - u_0). \end{aligned}$$

Per $t \neq 0$ deduciamo

$$(v - u_0, u - u_0) \leq \frac{1}{2} t \|v - u_0\|^2$$

da cui si conclude facendo il limite $t \rightarrow 0$. L'unicità è conseguenza di (??). Infatti se u_1 e u_2 sono due soluzioni, applicando la (??) per u_1 scegliendo $v = u_2$ e per u_2 scegliendo $v = u_1$ si ha

$$(u - u_1, u_2 - u_1) \leq 0 \quad (u - u_2, u_1 - u_2) \leq 0.$$

Sommando queste due disequazioni si ottiene $\|u_2 - u_1\|^2 = (u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0$ e quindi $u_1 = u_2$. \square

Osservazione 5.2.2. *Notiamo che piuttosto che l'identità del parallelogramma, per la dimostrazione si è usata la seguente disuguaglianza*

$$\left\| \frac{a+b}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{a-b}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \|a\|^2 + \frac{1}{2} \|b\|^2.$$

Vedremo più avanti che un risultato del tipo "Teorema della proiezione" vale infatti in contesti più generali.

Corollario 5.2.3. *Se $K = M$ con M un sottospazio chiuso di H allora per ogni $u \in H$ si ha*

$$(u - P_M(u), v) = 0 \quad \forall v \in M. \quad (5.4)$$

Dimostrazione. Per il Teorema della proiezione infatti $P_M(u)$ è caratterizzato da

$$(u - P_M(u), w - P_M(u)) \leq 0 \quad \forall w \in M. \quad (5.5)$$

Poiché $P_M(u) \in M$ e M è un sottospazio, per ogni $v \in M$ possiamo scegliere in (??) $w = v + P_M(u)$ da cui deduciamo

$$(u - P_M(u), v) \leq 0 \quad \forall v \in M.$$

L'uguaglianza segue testando questa disequazione con $-v$. \square

Osservazione 5.2.4. *In generale la proiezione su un convesso chiuso non è lineare ma è una mappa lipschitziana, ossia*

$$\|P_K(u_1) - P_K(u_2)\| \leq \|u_1 - u_2\|.$$

Se invece $K = M$ è un sottospazio chiuso, grazie all'unicità si mostra facilmente che $P_M(u)$ è una mappa lineare (la verifica di queste due affermazioni è lasciata per esercizio).

Una volta definita la proiezione (ortogonale) su un sottospazio possiamo definire il *sottospazio ortogonale*

$$M^\perp = \{u \in H : (u, v) = 0 \forall v \in M\}.$$

È quindi chiaro dal Corollario ?? che $u - P_M(u) \in M^\perp$. Inoltre si deduce che

$$H = M \oplus M^\perp \quad \text{e} \quad M \cap M^\perp = \{0\}.$$

Infine da (??) si vede che

$$u = P_M(u) \iff u \in M$$

e quindi

$$M^\perp = \{0\} \iff M = H.$$

La verifica di queste affermazioni segue direttamente dall'unicità e dalla definizione di proiezione ed è lasciata per esercizio.

Esempio 5.2.5. *Sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n . Dato $L^2(\Omega)$, consideriamo il sottospazio M delle funzioni q.o. costanti in Ω . Il sottospazio M è un sottospazio chiuso generato dalla funzione $f = 1$ q.o. in Ω . Quindi la proiezione è la soluzione del seguente problema di minimo*

$$\min_{\lambda \in \mathbb{R}} \int_{\Omega} |f(x) - \lambda|^2 dx.$$

Se definiamo $g(\lambda) = \int_{\Omega} |f(x) - \lambda|^2 dx = \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx + \lambda^2 m(\Omega) - 2\lambda \int_{\Omega} f(x) dx$, il minimo in λ deve verificare $g'(\lambda) = 0$. Quindi otteniamo che

$$g'(\lambda) = 2\lambda m(\Omega) - 2 \int_{\Omega} f(x) dx = \implies \lambda = \frac{1}{m(\Omega)} \int_{\Omega} f(x) dx.$$

In altre parole la proiezione di una funzione f di $L^2(\Omega)$ sulle costanti coincide con la media di f e il sottospazio ortogonale M^\perp è l'insieme delle funzioni di $L^2(\Omega)$ a media nulla.

Esercizio 5.2.6. *Dato K convesso chiuso in \mathbb{R}^n e dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e sia $\|\cdot\|$ una norma in \mathbb{R}^n . Consideriamo il seguente problema*

$$\inf_{x \in K} \|x - x_0\|.$$

1. *Data una successione minimizzante (ossia tale che $\|x_0 - x_n\| \rightarrow \inf_{x \in K} \|x - x_0\|$) provare che ammette una sottosuccessione convergente a un elemento \bar{x} .*
2. *Provare che \bar{x} è soluzione del problema di minimo e quindi $\|x_0 - \bar{x}\| = \text{dist}(x_0, K)$.*

3. Provare che se $\|\cdot\|$ è la norma euclidea la soluzione del problema di minimo (ossia la proiezione) è unica.

4. Mostrare un esempio di norma e di K per cui la proiezione non è unica.

Esercizio 5.2.7. Sia $K = \{f \in L^1((0,1)) : \int_0^1 f(x) dx = 1\}$. Evidentemente $0 \notin K$. Mostrare che K è convesso e che esistono infiniti $g \in K$ di norma minima, ossia che verificano $\|g\|_{L^1} = \min_{f \in K} \|f\|_{L^1} = \text{dist}(0, K)$.

5.3 Teorema di Riezs e generalizzazioni

Con il Teorema della proiezione si dimostra il Teorema di Riezs.

Teorema 5.3.1. Se H è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare (\cdot, \cdot) e T un elemento del duale H' , allora esiste un'unico $u \in H$ tale che

$$(u, v) = T(v) \quad \forall v \in H.$$

Inoltre u è anche l'unico elemento che verifica

$$\frac{1}{2}\|u\|^2 - T(u) = \min_{v \in H} \frac{1}{2}\|v\|^2 - T(v).$$

La dimostrazione usa la decomposizione di H in M e M^\perp con $M = T^{-1}(\{0\})$ e viene omessa.

Con l'Esercizio ?? abbiamo già applicato il Teorema di Riezs per trovare un'unica soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema

$$\int_{\Omega} a(x) \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} c(x) u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (5.6)$$

con $a, c \in L^\infty(\Omega)$ e $c(x) \geq c > 0$ e $a(x) \geq \alpha > 0$ q.o. in Ω , mostrando che $\int_{\Omega} a \nabla u \nabla v dx + \int_{\Omega} c uv dx$ definisce un prodotto scalare equivalente a $(\cdot, \cdot)_{H^1}$. Una soluzione di (??) coincide quindi con l'unico punto di minimo del problema

$$\min_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} a(x) |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} c(x) |u(x)|^2 dx - \int_{\Omega} f(x) u(x) dx \right\}$$

L'equazione in forma debole (??) può anche essere intesa nel senso delle distribuzioni è quindi, "integrando per parti" o per definizione di derivate nel senso delle distribuzioni, come

$$-\text{div}(a \nabla u) + cu = f \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Il Teorema di Riezs ci permette quindi di trattare una larga classe di problemi. In verità negli spazi di Hilbert vale un risultato ancora più generale che ci garantisce l'esistenza di un teorema di rappresentazione "tipo Riezs" anche per forme bilineari che non sono prodotti scalari, "ma quasi".

Definizione 5.3.2. Dato H spazio di Hilbert la forma bilineare $a(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ si dice

i) Continua se esiste una costante $\beta > 0$ tale che

$$|a(u, v)| \leq \beta \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in H.$$

ii) Coerciva se esiste una costante $\alpha > 0$ tale che

$$|a(u, u)| \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in H.$$

ii) Simmetrica se $a(u, v) = a(v, u)$ per ogni $u, v \in H$.

Teorema 5.3.3. Sia H uno spazio di Hilbert e $a(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare continua e coercitiva. Allora per ogni $f \in H'$ esiste un'unica $u \in H$ tale che

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H. \quad (5.7)$$

Inoltre se $a(\cdot, \cdot)$ è simmetrica, allora u è anche l'unico punto di minimo di

$$\min \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \langle f, v \rangle : v \in H \right\}. \quad (5.8)$$

Omettiamo la dimostrazione di questo Teorema che si può trovare per esempio in [?]. Osserviamo che in generale se $a(\cdot, \cdot)$ non è simmetrica la soluzione di (??) non coincide con la soluzione del problema di minimo (??), che pure esiste unica sempre grazie al Teorema di Lax Milgram applicato alla forma bilineare simmetrica $\tilde{a}(u, v) = (a(u, v) + a(v, u))/2$.

Inoltre è chiaro che se $a(\cdot, \cdot)$ è simmetrica il risultato è semplicemente il Teorema di Riesz una volta osservato che le ipotesi di continuità e coercività rendono $a(\cdot, \cdot)$ un prodotto scalare che induce in H una norma equivalente a quella di partenza.

5.4 Applicazioni

5.4.1 Il problema a ostacolo

Dato Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n e fissiamo $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Chiamiamo un *problema a ostacolo* il seguente problema di minimo

$$\min_{u \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx : u \geq \varphi \text{ q.o. in } \Omega \right\}.$$

Osserviamo che questo problema può essere riformulato usando il teorema della proiezione. Infatti non è altro che la proiezione di 0 sul convesso $K := \{u \in H_0^1(\Omega) : u \geq \varphi \text{ q.o. in } \Omega\}$ (la verifica che K sia convesso, chiuso, non vuoto è immediata e lasciata per esercizio).

Il teorema della proiezione quindi garantisce l'esistenza di un solo punto di minimo u_0 , caratterizzato anche come l'unica soluzione della seguente disequazione variazionale

$$\int_{\Omega} \nabla u_0 (\nabla v - \nabla u_0) dx \leq 0 \quad \forall v \in K. \quad (5.9)$$

In caso in cui la soluzione sia più regolare che H_0^1 la condizione (??) si può riscrivere in forma "classica". Supponiamo infatti che ci sia un aperto A in cui $u_0 > \varphi$, allora si ha che

$$\begin{cases} u_0 = \varphi & \text{in } \Omega \setminus A \\ u_0 & \text{armonica in } A \\ u_0 = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.10)$$

Per illustrare più rigorosamente questo esempio consideriamo il caso unidimensionale.

Esempio 5.4.1. Sia $\varphi \in C_c^1(a, b)$ e $u_0 \in H_0^1(a, b)$ l'unico punto di minimo del problema

$$\min_{u \in H_0^1(a, b)} \left\{ \int_a^b |u'|^2 dx : u \geq \varphi \text{ q.o. in } (a, b) \right\}.$$

(che sappiamo esistere per quanto già osservato in generale) e caratterizzato da

$$\int_a^b u_0'(v' - u_0') dx \leq 0 \quad \forall v \in K = \{u \in H_0^1(a, b) : u \geq \varphi \text{ q.o. in } (a, b)\}. \quad (5.11)$$

Notiamo che nel caso unidimensionale possiamo sempre assumere u_0 continua (ossia scegliere il suo rappresentante continuo) e quindi supporre che la condizione $u_0 \geq \varphi$ sia verificata ovunque in (a, b) .

Sia ora $A = \{x \in (a, b) : u_0(x) > \varphi(x)\}$ e dato $n \in \mathbb{N}$ poniamo $A_n = \{x \in (a, b) : u_0(x) > \varphi(x) + \frac{1}{n}\}$. Ora per ogni n fissato A_n è aperto e scegliendo $\psi \in C_c^1(A_n)$, la funzione $u_0 + t\psi \in K$ per t piccolo abbastanza. Da (??) (i dettagli si lasciano per esercizio) si ottiene quindi

$$\int_a^b u_0' \psi' dx \leq 0 \quad \forall \psi \in C_c^1(A_n). \quad (5.12)$$

In particolare testando con ψ e $-\psi$ e facendo variare $n \in \mathbb{N}$, si ottiene che

$$\int_a^b u_0' \psi' dx = 0 \quad \forall \psi \in C_c^1(A), \quad (5.13)$$

Ossia

$$\begin{cases} u_0 = \varphi & \text{in } \Omega \setminus A \\ u_0'' = 0 & \text{in } A \\ u_0(a) = u_0(b) = 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

Esercizio 5.4.2. Dato un insieme aperto $E \subset \subset \Omega$ con Ω aperto limitato in \mathbb{R}^n con $n \geq 1$, definiamo

$$\text{Cap}(E, \Omega) := \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx : u \in H_0^1(\Omega), u \geq \chi_E \text{ q.o. in } \Omega \right\}.$$

Questa si chiama la capacità (armonica) di E in Ω .

- Provare che l'insieme $\{u \in H_0^1(\Omega), u \geq \chi_E \text{ q.o. in } \Omega\}$ è non vuoto.
- Mostrare che $\text{Cap}(E, \Omega) < +\infty$. Dedurre che il problema che definisce $\text{Cap}(E, \Omega)$ ammette minimo, u_E (potenziale capacitario).

Suggerimento: Usare il teorema della proiezione.

- Provare che il minimo è unico.

- Provare che $u_E = 1$ q.o. in E .

Suggerimento: Usare che $u_E \wedge 1$ è una funzione test ammissibile

- Provare che se $F \subset E$ con F aperto, allora $\text{Cap}(F, \Omega) \leq \text{Cap}(E, \Omega)$.

f) (Facoltativo) Per $n = 2$ calcolare $\text{Cap}(B_r, B_R)$ (dove $0 < r < R$ e B_r denota la palla di raggio r e centro 0).

Suggerimento: Usare che u_{B_r} minimizza

$$\min \left\{ \int_{B_R \setminus B_r} |\nabla u|^2 dx : u \in H_0^1(\Omega), u = 1 \text{ q.o. in } B_r \right\}$$

è a simmetria radiale e calcolarla usando l'equazione di Eulero.

5.4.2 Il problema di Dirichlet

Fissiamo Ω limitato in \mathbb{R}^n . Possiamo dare una formulazione debole del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.15)$$

Data $g \in C(\partial\Omega)$, una soluzione classica consiste nel determinare $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ che verica (??). Per avere un'idea di una "buona" formulazione debole consideriamo il caso unidimensionale del seguente esercizio.

Esercizio 5.4.3. Sia $I = (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Dato $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f \in L^2(I)$.

a) Si provi che esiste un'unica soluzione $u \in H^1(I)$, tale che $u(0) = \alpha$ e $u(1) = \beta$ (intendendo con u l'estensione continua a $[0, 1]$ del rappresentante continuo di u) del problema

$$\int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 uv dx = \int_0^1 fv dx \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

e che è il punto di minimo di

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 (|u'|^2 + |u|^2) dx - \int_0^1 fu dx : u \in H^1(I), \text{ con } u(0) = \alpha \text{ e } u(1) = \beta \right\} \quad (5.16)$$

Suggerimento: Considerare la funzione $w = u - u_0$ con $u_0(x) = (\beta - \alpha)x + \alpha$ e determinare il problema di cui è soluzione w .

b) Dedurre che $u \in H^2$ e che u è la soluzione debole del problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{in } I \\ u(0) = \alpha \quad u(1) = \beta. \end{cases}$$

Supponiamo quindi che esista $\tilde{g} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ con $\tilde{g} \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, con $\tilde{g}(x) = g(x)$ se $x \in \partial\Omega$.

Allora una possibile formulazione debole del problema di Dirichlet (??) è

$$\min_{u - \tilde{g} \in H_0^1(\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad (5.17)$$

o in alternativa $u = w + \tilde{g}$ dove $w \in H_0^1(\Omega)$ è la soluzione debole di

$$\int_{\Omega} \nabla w \nabla v dx = - \int_{\Omega} \nabla \tilde{g} \nabla v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (5.18)$$

Il fatto che il problema (??) ha una sola soluzione è stato già visto ed è conseguenza del teorema di Riezs e la disuguaglianza di Poincaré. Mostrare che questa soluzione è anche l'unico punto di minimo per (??) è lasciato per esercizio.

5.4.3 I problemi ellittici a coefficienti non costanti

Il teorema di Lax-Milgram enunciato sopra permette di determinare l'esistenza di un'unica soluzione di un'ampia classe di equazioni alle derivate parziali *uniformemente ellittiche*, lineari del secondo ordine. In molte applicazioni infatti, dall'elettrostatica a problemi di elasticità (come già menzionato nell'introduzione), è naturale avere a che fare con "mezzi" *non omogenei* e *anisotropi*. Questo in termine delle equazioni di equilibri o delle relative *energie* si traduce nella presenza di coefficienti dipendenti dalla variabile spaziale e (eventualmente) diversi per le diverse "direzioni". In altre parole ci si trova a risolvere equazioni, per esempio, della forma

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.19)$$

ossia a sostituire l'operatore del secondo ordine Laplaciano, con l'operatore

$$Lu := -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = \sum_{i=1}^n \partial_{x_j}(a_{ij}(x)\partial_{x_i}u)$$

dove $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ è la matrice dei coefficienti. In generale non c'è alcuna ragione per cui i coefficienti del problema (??) siano regolari, anzi ci sono applicazioni molto rilevanti in cui la scelta più naturale è considerare coefficienti discontinui¹. È quindi necessario anche in questo caso considerare una formulazione debole.

Supponiamo che Ω sia limitato in \mathbb{R}^n . Diremo che u è una soluzione debole di $Lu = f$, con dati di Dirichlet al bordo ($u = 0$ su $\partial\Omega$), se $u \in H_0^1(\Omega)$ e verifica

$$\int_{\Omega} a_{ij}\partial_{x_i}u\partial_{x_j}v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (5.20)$$

Se assumiamo che i coefficienti della matrice $A(x)$ siano funzioni in $L^\infty(\Omega)$, otteniamo che

$$\left| \int_{\Omega} a_{ij}\partial_{x_i}u\partial_{x_j}v \, dx \right| \leq \beta \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega),$$

per qualche $\beta > 0$. Inoltre se supponiamo che la matrice A sia *uniformemente ellittica*, ossia che esista $\alpha > 0$ per cui

$$a_{ij}(x)\xi\xi \geq \alpha|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \forall x \in \Omega.$$

Allora deduciamo che

$$a(u, v) := \int_{\Omega} a_{ij}\partial_{x_i}u\partial_{x_j}v \, dx$$

è una forma bilineare coerciva e continua in $H_0^1(\Omega)$ e quindi grazie al Teorema di Lax Milgram esiste un'unica soluzione debole di (??). Se inoltre $A(x)$ è una matrice simmetrica, è simmetrica anche la forma $a(u, v)$ e la soluzione debole è anche l'unico minimo del problema variazionale

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_{ij}\partial_{x_i}v\partial_{x_j}v \, dx - \int_{\Omega} f v \, dx : v \in H_0^1(\Omega) \right\}. \quad (5.21)$$

Infine anche in questo caso la formulazione debole (??) è l'equazione di Eulero-Lagrange associata al problema di minimo (??).

¹È questo il caso dei modelli per i materiali compositi, ossia materiali costituiti da agglomerati di diversi materiali che quindi hanno proprietà (quali conduttività o elasticità) diverse in diversi punti.

5.4.4 Osservazioni sulla migliore costante di Poincaré

Abbiamo provato che se Ω è limitato, esiste una costante $C >$ tale che vale la disuguaglianza di Poincaré, ossia

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (5.22)$$

Abbiamo anche già osservato che con la nostra dimostrazione non otteniamo in generale una costante ottimale, se pur ottimale come ordine di grandezza rispetto al diametro del dominio. Definiamo ora

$$\lambda_1 := \inf_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} |u|^2 dx}. \quad (5.23)$$

Dalla (??) si deduce che $\lambda_1 > 1/C > 0$ e che quindi

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \quad (5.24)$$

dove a questo punto la costante è ottimale.

Consideriamo ora il problema in forma debole

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - c \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (5.25)$$

con $c > 0$. Definiamo in $H_0^1(\Omega)$ la forma bilineare

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - c \int_{\Omega} uv dx.$$

È facile vedere che questa è continua. Per mostrare la coercività usiamo la disuguaglianza di Poincaré (??) e otteniamo

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - c \int_{\Omega} u^2 dx \geq \left(1 - \frac{c}{\lambda_1}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Quindi deduciamo che la forma bilineare è continua e coercitiva se $c < \lambda_1$. Quindi se $c < \lambda_1$ grazie al Teorema di Lax Milgram (o semplicemente il Teorema di Riesz) esiste un'unica soluzione in $H_0^1(\Omega)$ di (??). In particolare se $f = 0$ l'unica soluzione è $u = 0$.

Si vedrà più avanti (come conseguenza del *metodo diretto del calcolo delle variazioni*) che il valore λ_1 in (??) è effettivamente un minimo.

Esercizio 5.4.4. Sia $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ una funzione che realizza il minimo di (??). Provare che u_1 è anche una soluzione debole di

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1 u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.26)$$

ossia verifica

$$\int_{\Omega} \nabla u_1 \nabla v dx = \lambda_1 \int_{\Omega} u_1 v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Il problema di minimo che definisce λ_1 si chiama *quoziente di Rayleigh* e definisce “il primo autovalore dell’operatore Laplaciano” per il problema di Dirichlet in Ω . Non approfondiamo questo punto che riguarda lo studio delle proprietà spettrali degli operatori compatti, ma lo illustriamo brevemente nel caso unidimensionale attraverso gli Esercizi ?? e ??.

Esercizio 5.4.5. *Determinare l’integrale generale dell’equazione differenziale ordinaria $-u'' = \lambda u$, con $u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *Quindi provare che il problema ai limiti*

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u & \text{in } (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (5.27)$$

per $\lambda < 0$ ammette soluzione unica $u = 0$.

2. *Determinare per quali $\lambda \geq 0$ (??) ammette soluzione non nulla.*

Svolgendo l’esercizio si ottiene che per $\lambda_k = k^2\pi^2$ il problema (??) ammette soluzione non banale $u_k(x) = \sin k\pi x$.

Esercizio 5.4.6. *Ora data una qualsiasi funzione $u \in H_0^1(0, 1)$ provare che la funzione*

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in (0, 1) \\ -u(-x) & x \in (-1, 0) \end{cases}$$

appartiene a $H_0^1(-1, 1)$, è dispari e estende u . Sviluppare in serie di Fourier dei soli seni la funzione \tilde{u} e provare che vale

$$\int_0^1 u^2 dx \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 |u'|^2 dx \quad \forall u \in H_0^1(0, 1),$$

con l’uguaglianza per $u(x) = \sin(\pi x)$. In altre parole in una dimensione si può calcolare esattamente la migliore costante di Poincaré per un intervallo, e nel caso dell’intervallo $(0, 1)$ è uguale a $\frac{1}{\pi^2}$.

Suggerimento: Usare che \tilde{u} e \tilde{u}' sono in $L^2(-1, 1)$ e scrivere le loro norme usando l’identità di Parseval.

Funzionali lineari su spazi di Banach

Uno *spazio di Banach* è uno spazio normato completo rispetto alla topologia indotta dalla norma. Esempi noti di spazi di Banach sono evidentemente gli spazi normati finito dimensionali e gli spazi di Lebesgue L^p , per $p \in [1, +\infty]$, gli spazi di Sobolev $W^{k,p}$ con $k \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, +\infty]$.

Esercizio 6.0.1. Sia $\alpha \in (0, 1)$ e consideriamo l'insieme delle funzioni α -hölderiane sull'intervallo $[a, b] \in \mathbb{R}$

$$C^{0,\alpha}([a, b]) := \left\{ f \in C([a, b]); [f]_\alpha := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}$$

1. Mostrare che $[f]_\alpha$ è un seminorma;
2. Provare che $C^{0,\alpha}([a, b])$ è denso in $C([a, b])$;
3. Mostrare che

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}} = \|f\|_\infty + [f]_\alpha$$

è una norma e che rende $C^{0,\alpha}([a, b])$ uno spazio di Banach;

4. Provare che dato $r \in [a, b]$ la funzione $g_r(x) = |x - r|^\alpha$ è in $C^{0,\alpha}([a, b])$;
5. Provare che per ogni $r \neq s$

$$[g_r - g_s]_\alpha \geq 2.$$

Da questo dedurre che $C^{0,\alpha}([a, b])$ non è separabile (ossia non ammette un sottoinsieme numerabile denso).

In questa sezione vedremo alcuni risultati riguardanti la struttura degli spazi di Banach e in particolare dei funzionali lineari su questi definiti.

6.1 Richiamo sugli operatori lineari

Siano X e Y due spazi vettoriali topologici (ossia spazi vettoriali in cui la topologia rende continue le operazioni di spazio vettoriale), $F : X \rightarrow Y$ è un operatore lineare da X in Y se

$$F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad x, y \in X.$$

Indichiamo con $\mathcal{L}(X, Y)$ lo spazio degli operatori da X a Y lineari e continui.

Definizione 6.1.1. Siano X e Y due spazio normati un operatore $T : X \rightarrow Y$ si dice limitato se esiste $M > 0$ tale che

$$\|F(x)\|_Y \leq M \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Proposizione 6.1.2. *Siano X e Y spazi normati e $F : X \rightarrow Y$ lineare. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

- i) T è continuo
- ii) T è continuo in 0
- iii) T è limitato

La dimostrazione di questa proposizione dovrebbe essere nota ed è lasciata per esercizio.

A questo punto si può introdurre una norma operatoriale per $F \in \mathcal{L}(X, Y)$, con X e Y normati

$$\|F\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|F(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{x \neq 0, \|x\|_X \leq 1} \|F(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X = 1} \|F(x)\|_Y.$$

Proposizione 6.1.3. *Siano X e Y spazi normati e sia Y di Banach, allora $\mathcal{L}(X, Y)$ è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Sia F_n una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(X, Y)$, quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n, m \geq \bar{n}$ si ha $\|F_n - F_m\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \varepsilon$. Quindi

$$\|F_n(x) - F_m(x)\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

In particolare per ogni $x \in X$ la successione $F_n(x)$ è di Cauchy in Y e quindi converge a un qualche $F(x)$ in Y . È facile verificare che $F(x)$ così definito è in lineare e limitato e quindi in $\mathcal{L}(X, Y)$. Infatti si ha che si ha che $\|F_n\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$ è limitata e quindi

$$\|F(x)\|_Y = \lim_n \|F_n(x)\|_Y \leq \liminf_n \|F_n\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \|x\|_X \leq M \|x\|_X.$$

Infine se $x \in X$ con $\|x\|_X = 1$ si ha che per ogni $n \geq \bar{n}$

$$\|F_n(x) - F(x)\|_Y = \lim_{m \rightarrow +\infty} \|F_n(x) - F_m(x)\|_Y \leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} \|F_n - F_m\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq \varepsilon,$$

e quindi $\|F_n - F\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. □

In particolare il duale $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ di uno spazio normato è sempre uno spazio di Banach con norma

$$\|F\|_{X'} = \sup_{x \neq 0} \frac{|F(x)|}{\|x\|_X} = \sup_{x \neq 0, \|x\|_X \leq 1} |F(x)| = \sup_{x \neq 0, \|x\|_X \leq 1} F(x).$$

Ricordiamo che grazie al teorema di rappresentazione di Riesz sugli spazi di Lebesgue si ha $(L^p)' = L^{p'}$ con $p \in (1, +\infty)$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $(L^1)' = L^\infty$, mentre vedremo che $L^1 \subsetneq (L^\infty)'$.¹

¹Come già visto si usano indifferentemente (se non dà adito ad ambiguità) le notazioni

$$\langle f, x \rangle \quad \text{o} \quad \langle f, x \rangle_{X', X} \quad \text{o} \quad f(x),$$

per indicare l'azione su x di un elemento $f \in X'$ (ci si riferisce a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, come l'applicazione di dualità in X).

6.2 Teoremi di Hahn Banach

Il primo risultato che vediamo riguarda la possibilità di estendere funzionali lineari definiti su sottospazi.

Definizione 6.2.1. *Sia X uno spazio vettoriale e $p : X \rightarrow \mathbb{R}$.*

i) p è positivamente 1-omogenea se

$$p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha > 0 \quad \forall x \in X;$$

ii) p è subadditiva se

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X.$$

Osserviamo che se p è positivamente 1-omogenea allora $p(0) = 0$. Inoltre p è positivamente 1-omogenea è subadditiva se e soltanto se p è convessa (la verifica è facile ed è lasciata per esercizio).

Se $X = \mathbb{R}^n$ e M un suo sottospazio, è facile estendere un funzionale lineare definito su M a un funzionale lineare definito su tutto \mathbb{R}^n , basta infatti definirlo arbitrariamente sulle direzioni ortogonali a M (per esempio 0 se non vogliamo far crescere la norma). In uno spazio infinito dimensionale questa operazione è più delicata, ma è possibile grazie al teorema di Hahn-Banach.

Teorema 6.2.2 (di Hahn Banach). *Sia X uno spazio vettoriale e sia $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ una mappa positivamente 1-omogenea e subadditiva. Se $G \subseteq X$ è un sottospazio di X e $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ è un funzionale lineare che verifica*

$$g(x) \leq p(x) \quad x \in G,$$

allora esiste un funzionale lineare $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in G$ (ossia f estende g) e

$$f(x) \leq p(x) \quad x \in X.$$

Osservazione 6.2.3. *Notiamo che applichiamo il teorema a uno spazio normato X e $g : G \rightarrow \mathbb{R}$, lineare e continuo, con $p(x) = \|g\|_{G'} \|x\|_X$ otteniamo una estensione f di g che verifica*

$$f(x) \leq \|g\|_{G'} \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

È facile vedere quindi che f è continuo e verifica $\|f\|_{X'} = \|g\|_{G'}$, ossia abbiamo esteso g a tutto X senza aumentare la norma.

Dimostrazione. La dimostrazione del Teorema di Hahn Banach si basa sul Lemma di Zorn. Per le dimostrazioni di entrambi rimandiamo a [?], Teorema I.1 e Lemma I.2. □

Vediamo alcune altre notevoli conseguenze del Teorema di Hahn Banach in forma analitica, per gli spazi normati.

Corollario 6.2.4. *Indichiamo con $L^\infty(\Omega)$ e $L^1(\Omega)$ gli spazi di Lebesgue in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ rispetto alla misura di Lebesgue. Allora $(L^\infty(\Omega))' \supseteq L^1(\Omega)$.*

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre Ω limitato. Sia $F : C(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\langle F, g \rangle = g(0) \quad \forall g \in C(\overline{\Omega}).$$

Allora

$$|\langle F, g \rangle| \leq \sup_{\Omega} |g| = \|g\|_{\infty}.$$

Ora grazie al Teorema di Hahn Banach (e l'Osservazione ??), possiamo estendere F a un $\tilde{F} \in (L^{\infty}(\Omega))'$ tale che

$$|\langle \tilde{F}, g \rangle| \leq \|g\|_{\infty}.$$

Supponiamo ora che esiste una funzione $h \in L^1(\Omega)$ tale che

$$\langle \tilde{F}, g \rangle = \int_{\Omega} gh \, dx \quad \forall g \in L^{\infty}(\Omega).$$

Scegliendo $g(x) = g_k(x) = e^{-k|x|}$, poiché $g_k \in C(\overline{\Omega})$ si ha

$$1 = \langle \tilde{F}, g_k \rangle = \langle F, g_k \rangle = \int_{\Omega} e^{-k|x|} h(x) \, dx,$$

ma questa è una contraddizione perché il membro destro di questa formula tende a zero per k che tende all'infinito, grazie al Teorema di Convergenza Dominata. \square

Esercizio 6.2.5. *Trovare uno spazio di misura (Ω, μ) in cui $(L^{\infty}(\Omega, \mu))' = L^1(\Omega, \mu)$.*

Corollario 6.2.6. *Se X è uno spazio normato e $X \neq \{0\}$ e $x_0 \in X$, allora esiste $f \in X'$ tale che $\|f\|_{X'} = 1$ e $f(x_0) = \|x_0\|_X$.*

Dimostrazione. Prendiamo $p(x) = \|x\|_X$ e definiamo su $G = x_0\mathbb{R} = \text{span}\{x_0\}$ il funzionale lineare $g(tx_0) = t\|x_0\|_X$. Utilizzando il teorema di Hahn Banach (Teorema ??) troviamo $f \in X'$ tale che $f(tx_0) = g(tx_0) = t\|x_0\|_X$, e quindi $|f(tx_0)| = \|tx_0\|_X$, e che soddisfa $f(x) \leq \|x\|_X$. In particolare $f(x_0) = \|x_0\|_X$ da cui si deduce anche che $\|f\|_{X'} = 1$. \square

Come conseguenza di questo corollario è facile provare che per ogni $x \in X$ si ha

$$\|x\|_X = \max_{\|f\|_{X'} \leq 1} |f(x)|.$$

Notare che questo è un risultato mentre la formula che da la norma del duale

$$\|f\|_{X'} := \sup_{\|x\|_X \leq 1} |f(x)|$$

è una definizione. In generale non è vero che il sup in questa formula sia raggiunto.

Esercizio 6.2.7. *Consideriamo il sottospazio di $C([0, 1])$*

$$X = \{u \in C([0, 1]) : u(0) = 0\}$$

e definiamo

$$F(u) = \int_0^1 u(t) \, dt.$$

Mostrare che non esiste alcuna funzione in X per la quale la norma $\|F\|_{X'}$ è raggiunta da $|F(u)|/\|u\|_{\infty}$.

Esercizio 6.2.8. Dato X normato e $x_0 \in X$.

1. Se $x_0 \neq 0$, esiste $f_0 \in X'$, con $\|f_0\|_{X'} = 1$ e $f_0(x_0) = \|x_0\|_X$;
2. Se $f(x_0) = 0$ per ogni $f \in X'$, allora $x_0 = 0$;
3. Diciamo che uno spazio normato è strettamente convesso se per ogni $x, y \in X$, con $x \neq y$ e $\|x\| = \|y\| = 1$ si ha che $\|\frac{x+y}{2}\| < 1$. Mostrare che L^1 e L^∞ non sono strettamente convessi;
4. Provare che se X' è strettamente convesso allora l'elemento f_0 del punto 1) è unico.
5. Mostrare un esempio di uno spazio X in cui l'elemento f_0 del punto 1) non è unico.

Corollario 6.2.9. Sia X uno spazio normato e G un suo sottospazio chiuso proprio. Consideriamo $x_0 \in X \setminus G$ tale che $\text{dist}(x_0, G) = \delta > 0$. Allora esiste $f \in X'$ tale che $\|f\|_{X'} = 1$, $f|_G = 0$ e $f(x_0) = \delta$.

Dimostrazione. Scegliamo ancora $p(x) = \|x\|_X$. Consideriamo $\tilde{G} = G + x_0\mathbb{R}$ e definiamo $g(x + tx_0) = t\delta$. Ovviamente g è lineare in \tilde{G} e non nulla (infatti $g|_G = 0$ ma $g(x_0) = \delta > 0$).

Inoltre, usando che $\text{dist}(x_0, G) \leq \|x_0 - y\|$ per ogni $y \in G$,

$$g(x + tx_0) = t\delta \leq |t| \left\| x_0 + \frac{x}{t} \right\| = \|x + tx_0\| = p(x + tx_0).$$

In particolare g è continua e $\|g\|_{\tilde{G}} \leq 1$. Proviamo che $\|g\|_{\tilde{G}} = 1$. Poiché G è chiuso (e quindi $\delta > 0$), per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon \in G$ tale che $\|x_0 - x_\varepsilon\| \leq \delta(1 + \varepsilon)$, da cui abbiamo che

$$\left\| \frac{x_0}{\delta(1 + \varepsilon)} - \frac{x_\varepsilon}{\delta(1 + \varepsilon)} \right\| \leq 1$$

e quindi

$$g\left(-\frac{x_\varepsilon}{\delta(1 + \varepsilon)} + \frac{x_0}{\delta(1 + \varepsilon)}\right) = \frac{1}{1 + \varepsilon}.$$

Quindi $\|g\| \geq 1/(1 + \varepsilon)$ e grazie all'arbitrarietà di ε si conclude che $\|g\| = 1$. Allora applicando il Teorema di Hahn Banach troviamo $f \in X'$ con le proprietà richieste. \square

Il Teorema di Hahn Banach fornisce anche una importante caratterizzazione degli insiemi densi di uno spazio normato.

Esercizio 6.2.10. Provare il seguente enunciato:

Sia X normato e M un suo sottospazio.

Allora M è denso se e solo se per ogni $f \in X'$ tale che $f|_M = 0$ si ha $f = 0$.

Il funzionale ottenuto attraverso il Corollario ?? in un certo senso è l'equivalente della proiezione in uno spazio di Banach.

Vediamo ora un'altra forma del Teorema di Hahn Banach che afferma che due convessi disgiunti possono essere separato da un iperpiano. Questo è un fatto intuitivo in un contesto finito dimensionale e si può dimostrare senza alcuna ulteriore

²La distanza di un punto da un insieme è definita come $\text{dist}(x_0, G) := \inf_{x \in G} \|x_0 - x\|$. Mostrare che sotto le ipotesi del Corollario ?? si ha $\text{dist}(x_0, G) > 0$.

ipotesi se non la convessità (vedi Esercizio ??), mentre in un contesto generale richiede alcune ipotesi topologiche sugli insiemi. Questo risultato ha molte conseguenze importanti in analisi.

Definizione 6.2.11. *Un iperpiano affine in X (spazio vettoriale normato) è il seguente insieme*

$$H = \{x \in X \mid f(x) = \alpha\} =: [f = \alpha]$$

per qualche $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ lineare con $f \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6.2.12. *Dato $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ lineare e $\alpha \in \mathbb{R}$. $[f = \alpha]$ è chiuso se e solo se f è continua*

Definizione 6.2.13. *Siano $A, B \subseteq X$. Diciamo che un iperpiano $[f = \alpha]$ separa in senso largo i due insiemi A e B se*

$$f(x) \leq \alpha \quad \forall x \in A \quad \text{e} \quad f(y) \geq \alpha \quad \forall y \in B.$$

Diciamo che un iperpiano $[f = \alpha]$ separa in senso stretto i due insiemi A e B se esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon \quad \forall x \in A \quad \text{e} \quad f(y) \geq \alpha + \varepsilon \quad \forall y \in B.$$

Esercizio 6.2.14 (Funzionale di Minkowski o Gauge di C). *Sia X normato e $C \subseteq X$ un convesso aperto con $0 \in C$. Il funzionale di Minkowski di C è dato da*

$$p_C(x) = \inf \left\{ r > 0 : \frac{x}{r} \in C \right\} \quad x \in X.$$

1. *Provare che l'insieme su cui si fa l'inf è non vuoto;*
2. *Mostrare che p_C è positivamente 1-omogeneo e subadditivo su X ;*
3. *Provare che esiste $M > 0$ tale che $0 \leq p_C(x) \leq M\|x\|_X$;*
4. *Provare che $p_C(x) < 1 \iff x \in C$.*

Nota: Questo esercizio è un risultato che sta su [?].

Esercizio 6.2.15. *Sia X normato e $C \subseteq X$ convesso aperto con $0 \in C$. Assumiamo che $C = -C$ (ossia C sia simmetrico) e che C sia limitato. Provare che p_C è una norma equivalente a $\|\cdot\|_X$.*

Esercizio 6.2.16. *Sia $X = C([0, 1])$ con la norma del sup, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. Per ogni $p \in (1, +\infty)$ consideriamo*

$$C = \left\{ f \in X : \int_0^1 |f|^p dx < 1 \right\}.$$

1. *Provare che C è aperto, simmetrico e convesso;*
2. *È limitato?*
3. *Calcolare p_C . È equivalente a $\|\cdot\|_\infty$?*

Lemma 6.2.17. *Sia $C \subset X$, $C \neq \emptyset$ aperto convesso e sia $x_0 \in X \setminus C$. Allora esiste $f \in X'$ tale che*

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in C,$$

ossia $[f = f(x_0)]$ separa C e x_0 .

Dimostrazione. La dimostrazione, con notazioni leggermente diverse si trova su [?], Lemma I.3. \square

Questo risultato si può estendere al caso di due convessi disgiunti nei due seguenti modi.

Teorema 6.2.18 (Teorema di Hahn-Banach, I forma geometrica). *Siano A e B due sottoinsieme di X , convessi e non vuoti, con $A \cap B = \emptyset$. Supponiamo che almeno uno dei due sia aperto, allora esiste un iperpiano chiuso che li divide (in senso largo).*

Dimostrazione. La dimostrazione si ottiene applicando il lemma ?? a $C = A - B$ e si trova in [?], Teorema I.6. \square

Teorema 6.2.19 (Teorema di Hahn-Banach, II forma geometrica). *Siano A e B due sottoinsieme di X , convessi e non vuoti, con $A \cap B = \emptyset$. Supponiamo che A sia chiuso e B sia compatto, allora esiste un iperpiano chiuso che li divide in senso stretto.*

Dimostrazione. La dimostrazione si ottiene applicando il Teorema ?? a $A' = A - B$ (notando che grazie alle ipotesi è chiuso) e $B' = B(0, \varepsilon) \subset (A')^c$. È lasciata per esercizio, ma trova per esteso in [?], Teorema I.6. \square

Osservazione 6.2.20. *In generale, in dimensione infinita, non si possono separare due convessi disgiunti con un iperpiano se non si fa qualche ipotesi topologica (vedi Esercizio ??), mentre è sempre possibile in dimensione finita (vedi Esercizio ??).*

Esercizio 6.2.21. *Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ considerare l'insieme di $L^2([-1, 1])$*

$$C_\alpha := \{f \in L^2([-1, 1]) : \text{continua e } f(0) = \alpha\}.$$

Mostrare che C_α è un convesso nè aperto, nè chiuso. Che per ogni α C_α è denso in $L^2([-1, 1])$. Dedurre che se $\alpha \neq \beta$ C_α e C_β non possono essere separati da un iperpiano chiuso.

Esercizio 6.2.22. *Sia X uno spazio vettoriale normato di dimensione finita. Sia $C \in X$ non vuoto, convesso tale che $0 \notin C$.*

1. *Scegliere un insieme $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq C$ denso in C (perché esiste?). Per ogni n poniamo*

$$C_n = \text{co}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} := \left\{ x = \sum_{i=1}^n t_i x_i : t_i \in \mathbb{R} \ t_i \geq 0 \ \sum_i t_i = 1 \right\}.$$

Mostrare che C_n è compatto e che $\cup_n C_n$ è denso in C .

2. *Provare che esiste $f_n \in X'$ tale che $\|f_n\|_{X'} = 1$ e $\langle f_n, x \rangle \geq 0$ per ogni $x \in C_n$.*
3. *Dedurre che esiste $f \in X'$ tale che $\|f\|_{X'} = 1$ e $\langle f, x \rangle \geq 0$ per ogni $x \in C$.*
4. *Concludere che dati comunque due insiemi convessi disgiunti A e B in X , esiste un iperpiano chiuso che li separa (senza ulteriori ipotesi su A e B).*

Concludiamo questa parte sulle conseguenze del Teorema di Hahn Banach, con qualche cenno del suo ruolo nei teoremi di rappresentazione degli spazi duali. In particolare vogliamo dare un'idea di come si ottiene che il duale delle funzioni continue in un compatto è uno spazio di misure finite sul compatto.

Teorema 6.2.23. *Sia K compatto. Allora $(C(K))' = \mathcal{M}(K)$. Ossia per ogni $T \in (C(K))'$ esiste un'unica $\mu \in \mathcal{M}(K)$ tale che*

$$\|T\| = |\mu|(K)$$

e viceversa, per ogni $\mu \in \mathcal{M}(K)$

$$T(\varphi) = \int_K \varphi d\mu \quad \varphi \in C(K) \quad (6.1)$$

definisce un elemento del duale di $C(K)$.

Dimostrazione. La dimostrazione nel dettaglio di questo risultato è piuttosto tecnica e usa vari risultati di teoria della misura. Diamo però un'idea da dove nasce questa identificazione. Un verso, ossia che $(?)$ definisca un elemento di $(C(K))'$, è facile (ed è lasciato per esercizio). Per mostrare il viceversa fissiamo $T \in (C(K))'$. Poichè $C(K) \subset B(K)$ (dove con $B(K)$ intendiamo lo spazio delle funzioni limitate, definite puntualmente, munito della norma del sup), allora, grazie all'Osservazione ??, si può estendere T a un funzionale $\tilde{T} \in (B(K))'$ tale che $\|T\| = \|\tilde{T}\|$. Allora, per ogni boreliano $E \subset K$, possiamo definire

$$\lambda(E) = \tilde{T}(\chi_E).$$

In questo modo λ è una funzione di insieme che verifica $|\lambda(E)| \leq \|T\|$. Inoltre usando la linearità di \tilde{T} si ha che se $E_1 \cap E_2 = \emptyset$,

$$\lambda(E_1 \cup E_2) = \lambda(E_1) + \lambda(E_2),$$

ossia λ è una misura finitamente additiva. Esattamente come si fa per le misure di Borel σ -additive si può definire l'integrale rispetto a λ di una funzione semplice f

$$\int_K f d\lambda \quad \forall f \in B(K) \quad f \text{ semplice}$$

e quindi per approssimazione, usando la continuità di \tilde{T} si ottiene

$$\tilde{T}(f) = T(f) = \int_K f d\lambda \quad \forall f \in C(K).$$

Si può concludere mostrando, con un argomento di teoria della misura che permette di regolarizzare la misura λ rendendola σ -additiva senza però variare l'integrale delle funzioni continue. Ossia si può in effetti trovare una misura $\nu \in \mathcal{M}(K)$ con $\|\nu\|(K) = \|T\|$ e tale che

$$T(f) = \int_K f d\lambda = \int_K f d\nu \quad \forall f \in C(K).$$

□

6.3 Uniforme limitatezza

In questa sezione tratteremo una importante proprietà delle applicazioni lineari tra spazi di Banach (il principio di uniforme limitatezza). Di nuovo come vedremo con il prossimo esempio questa è una proprietà molto naturale in \mathbb{R}^n , che in un opportuno senso si estende anche agli spazi normati in generale.

Esempio 6.3.1. Supponiamo di avere una famiglia $\{T_i\}_{i \in I}$ di applicazioni lineari $T_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. In particolare abbiamo una famiglia di vettori $\{b_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}^2$ tale che $T_i(x) = b_i \cdot x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$. Supponiamo che

$$\sup_i |T_i(x)| < +\infty \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (6.2)$$

Da questo possiamo dedurre che

$$\sup_i \|T_i\| = \sup_i \|b_i\| < +\infty. \quad (6.3)$$

Infatti applicando (??) ai vettori della base di \mathbb{R}^2 si ottiene che esistono $M_1, M_2 > 0$ tali che

$$|b_i^1| \leq M_1 \quad e \quad |b_i^2| \leq M_2 \quad \forall i \in I,$$

da cui si conclude l'uniforme limitatezza delle b_i , ossia (??).

L'equivalente per spazi infinito dimensionali di questo fatto illustrato nell'esempio è il Teorema di Banach-Steinhaus.

Teorema 6.3.2 (Teorema di Banach Steinhaus). *Siano X uno spazio di Banach e Y uno spazio normato e sia $\{T_i\}_{i \in I}$ una famiglia (non necessariamente numerabile) di operatori in $\mathcal{L}(X, Y)$, lineari e continui. Supponiamo che*

$$\sup_i \|T_i(x)\|_Y < +\infty \quad x \in X. \quad (6.4)$$

Allora

$$\sup_i \|T_i\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < +\infty, \quad (6.5)$$

ossia esiste $C > 0$ tale che

$$\|T_i(x)\|_Y \leq C \|x\|_X \quad x \in X$$

e quindi T_i sono equi-limitati e equi-continui.

Osservazione 6.3.3. *La condizione di limitatezza puntuale (??) equivale a richiedere che per ogni $x \in X$ esista $M_x > 0$ tale che*

$$\sup_i \|T_i(x)\|_Y < M_x.$$

Il teorema dice che queste costanti sono equi-limitate se x sta in un insieme limitato e questo basta per stimare la norma di T_i (ossia da una stima puntuale deduciamo una stima uniforme).

La dimostrazione del Teorema di Banach-Steinhaus (per la quale si deve vedere [?], Teorema II.1) fa uso essenziale del Lemma di Baire che qui riportiamo e per la cui dimostrazione rimandiamo a [?], Lemma II.1.

Lemma 6.3.4. *Se $X \neq \emptyset$ è uno spazio metrico completo e $\{X_n\}_n$ sono dei chiusi tali che $\text{Int}(X_n) = \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\text{Int}(\cup_n X_n) = \emptyset$.*

Osservazione 6.3.5. *Rifrasando il Lemma sopra enunciato si può mostrare che la tesi del Lemma è equivalente a dire che se $X = \cup_n X_n$ con X_n chiusi, allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che*

$$\text{Int}(X_{n_0}) \neq \emptyset.$$

Ossia uno spazio metrico completo è di seconda categoria di Baire

Vediamo ora qualche corollario importante (per il seguito) del Teorema di Banach Steinhaus.

Normalmente il limite puntuale di mappe continue non è continuo, mentre il Teorema di Banach Steinhaus garantendo l'equicontinuità ha come conseguenza che questo è vero per le mappe lineari.

Corollario 6.3.6. *Siano X e Y due spazi di Banach. Sia $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Supponiamo che per ogni $x \in X$ si abbia che $T_n(x)$ converge a qualche $T(x)$, allora*

1. $\sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < +\infty$;
2. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$;
3. $\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$.

Dimostrazione. La dimostrazione è un'immediata conseguenza del Teorema di Banach-Steinhaus. Per i dettagli si veda [?], Corollario II.2. \square

Particolarmente interessante per noi sarà l'applicazione di questi risultati al caso in cui X sia un Banach e $Y = \mathbb{R}$, in questo modo quindi deduciamo proprietà di successioni di elementi nel duale di X , X' .

Esempio 6.3.7. *Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 1-periodica data da $f(x) = \chi_{[0, \frac{1}{2})}(x)$ per $x \in [0, 1)$. Definiamo quindi $f_k(x) = f(kx)$. Sappiamo che*

$$T_k(\varphi) := \int_0^1 f_k \varphi dx \quad \forall \varphi \in L^2((0, 1))$$

è un'applicazione lineare e continua in $L^2((0, 1))$ e abbiamo già visto (Lemma 3.3.4) che verifica

$$T_k(\varphi) \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi dx =: T(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((0, 1)).$$

Usando la densità di $C_c^\infty((0, 1))$ in $L^2((0, 1))$ si ha

$$T_k(\varphi) \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi dx =: T(\varphi) \quad \forall \varphi \in L^2((0, 1)).$$

È facile verificare in questo esempio che la tesi del Corollario ?? è verificata e in particolare che il punto 3. è verificato con la disuguaglianza stretta (la verifica è lasciata per esercizio).

Esercizio 6.3.8. *Provare che se $f_k, f \in L^2(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ verificano*

$$\int_{\Omega} f_k g dx \rightarrow \int_{\Omega} f g dx \quad \forall g \in L^2(\Omega)$$

e

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|f_k\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$$

allora f_k converge a f in $L^2(\Omega)$.

Corollario 6.3.9. *Sia G è uno spazio di Banach e $B \subseteq G$. Supponiamo che per ogni $f \in G'$, $f(B)$ sia limitato. Allora B è limitato.*

Dimostrazione. Segue direttamente dal Teorema (??) applicato a $X = G'$ e $I = B$ (si veda [?], Corollario II.3 per i dettagli). \square

In altre parole il Corollario ci dice che la limitatezza di un insieme è garantita se è limitata la sua immagine attraverso tutti funzionali lineari (questo in dimensione finita è immediato e coincide con la limitatezza delle componenti). Si noti che un criterio di limitatezza “duale” vale anche per sottoinsiemi di G' , ossia $B' \subset G'$ è limitato se $\cup_{f \in B'} \{f(x)\}$ è limitato in \mathbb{R} (non fatto a lezione, ma reperibile su [?], Corollario II.4).

Vediamo altre due importanti conseguenze del Teorema di Hahn Banach che sono vere solo sugli spazi di Banach (mentre ricordiamo che il Teorema di Hahn Banach non si applica al caso generale di spazi vettoriali).

Definizione 6.3.10. *Siano X e Y due spazi topologici. Diciamo che una mappa $f : X \rightarrow Y$ è aperta se per ogni $U \subseteq X$ aperto, si ha che $f(U)$ è aperto in Y .*

Teorema 6.3.11 (Teorema della mappa aperta). *Siano X e Y due spazi di Banach e sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Allora*

$$T \text{ è surgettiva} \iff T \text{ è aperta}$$

Osservazione 6.3.12. *Notiamo che la tesi del teorema della mappa aperta è banalmente verificata se $X = \mathbb{R}^n$ e $Y = \mathbb{R}^m$ (ossia in dimensione finita). Da caso finito dimensionale si capisce però che la linearità è importante per concludere (si pensi infatti a $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^3 - x$ che manda $(-\infty, 0)$ in $(-\infty, \frac{2}{3\sqrt{3}}]$).*

Osservazione 6.3.13. *La proprietà di $T : X \rightarrow Y$ di essere una mappa aperta è equivalente a dire che*

$$\exists \delta > 0 \text{ tale che } B(0, \delta) \subseteq T(B(0, 1)). \quad (6.6)$$

Mostriamo che (??) implica che T è aperta. Infatti se U è aperto in X , fissiamo $y \in T(U)$. Allora esiste $x \in U$ tale che $y = T(x)$ e esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \subseteq U$, perché U è aperto. Quindi da (??) si ha che

$$\begin{aligned} T(U) &\supseteq T(B(x, \varepsilon)) = T(x) + T(B(0, \varepsilon)) \\ &= T(x) + \varepsilon T(B(0, 1)) \\ &\supseteq T(x) + B(0, \varepsilon\delta) = B(y, \varepsilon\delta). \end{aligned}$$

Da cui si deduce che $T(U)$ è aperto.

Viceversa se T è aperta, in particolare $T(B(0, 1))$ è aperto (e contiene 0), da cui si deduce immediatamente (??).

Corollario 6.3.14 (Teorema dell'operatore inverso). *Siano X e Y due spazi di Banach. Sia $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e supponiamo che T sia biettiva. Allora $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ (ossia è continua).*

Dimostrazione. È un'immediata conseguenza del Teorema della mappa aperta. \square

Dimostrazione del Teorema della mappa aperta. Per prima cosa osserviamo che $\overline{T(B(0, 1))}$ è un insieme convesso. Infatti la palla $B(0, 1)$ è convessa in qualsiasi spazio normato (la cosa è di facile verifica) e grazie alla linearità di T anche $\overline{T(B(0, 1))}$ è convesso.

Dividiamo la dimostrazione in due passi.

Passo 1: Mostriamo che esiste $\sigma > 0$ tale che

$$B(0, \sigma) \subseteq \overline{T(B(0, 1))}. \quad (6.7)$$

Poiché T è una mappa suriettiva si ha che

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \overline{T(B(0, k))} = Y.$$

Gli insiemi $X_k = \overline{T(B(0, k))}$ sono chiusi e Y è uno spazio di Banach, quindi per il Teorema di Baire si ha che esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\text{Int}(\overline{T(B(0, k_0))}) \neq \emptyset$. Quindi esiste $y_0 \in \text{Int}(\overline{T(B(0, k_0))})$ e esiste $r > 0$ tale che

$$B(y_0, r) \subseteq \overline{T(B(0, k_0))}$$

e quindi dalla linearità di T si ha

$$B(y_0, \frac{r}{k_0}) \subseteq \overline{T(B(0, 1))}.$$

Sempre usando la linearità è facile convincersi che $-y_0 \in \overline{T(B(0, 1))}$ e che quindi

$$B(0, \frac{r}{k_0}) = B(y_0, \frac{r}{k_0}) - y_0 \subseteq \overline{T(B(0, 1))} + \overline{T(B(0, 1))}.$$

Da cui usando la concessità di $\overline{T(B(0, 1))}$ si ottiene

$$B(0, \frac{r}{2k_0}) \subseteq \overline{T(B(0, 1))}.$$

Che conclude il primo passo ponendo $\sigma = \frac{r}{2k_0}$.

Passo 2: Proviamo che

$$B(0, \frac{\sigma}{2}) \subseteq T(B(0, 1)). \quad (6.8)$$

Scegliamo $y_0 \in B(0, \sigma)$ allora grazie al Passo 1 esiste $x_0 \in B(0, 1)$ tale che $y_0 - T(x_0) \in B(0, \frac{\sigma}{2})$ e quindi $2(y_0 - T(x_0)) \in B(0, \sigma)$. Procediamo così induttivamente e costruiamo due successioni $y_n \in B(0, \sigma)$ e $x_n \in B(0, 1)$ tali che

$$2(y_n - T(x_n)) \in B(0, \sigma) \quad \text{e} \quad y_{n+1} = 2(y_n - T(x_n)).$$

In particolare se ha $2^{-n-1}y_{n+1} = 2^{-n}y_n - T(2^{-n}x_n)$.

Sommando per n da 0 a m si ottiene

$$T\left(\sum_{n=0}^m 2^{-n}x_n\right) = y_0 - 2^{-m-1}y_{m+1} \rightarrow y_0 \quad \text{se } m \rightarrow +\infty.$$

Ora poiché $x_n \in B(0, 1)$ allora la serie $\sum 2^{-n}x_n$ converge totalmente e allora successione delle somme parziali $s_m = \sum_{n=0}^m 2^{-n}x_n$ è di Cauchy, quindi, poiché X è completo, è convergente a $s \in X$. Poiché $\|x_n\| < 1$ si ha quindi che $\|s\| < 2$. Dato che $T(s) = y_0$ (e y_0 è stato scelto arbitrariamente in $B(0, \sigma)$) otteniamo che

$$B(0, \sigma) \subseteq T(B(0, 2))$$

da cui concludiamo (??).

Viceversa il fatto che una mappa aperta è suriettiva è una facile conseguenza della caratterizzazione data nell'Osservazione ???. Infatti da (??) segue che $T(B(0, k)) \supseteq B(0, k\delta)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi $T(X) \supseteq Y$. \square

Osserviamo che abbiamo usato la completezza sia di X che di Y facendo cadere una di queste due si possono costruire dei controesempi. Con il seguente esempio mostriamo che non possiamo rinunciare alla completezza di Y (un esempio in cui cade la completezza di X si trova tra gli esercizi).

Esempio 6.3.15. Sia $X = \ell^\infty = \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \sup_n |x_n| < \infty\}$ e sia

$$Y = \{y \in \ell^\infty : \sup_n (n+1)|x_n| < \infty\},$$

entrambi muniti della norma del sup. Notare che Y non è completo, infatti consideriamo $y = \{\frac{1}{\sqrt{n}}\}_n$ e la successione $y^k = \sum_{n=1}^k e_n/\sqrt{n}$, dove e_n è la successione di elementi tutti nulli tranne l'ennesimo che è 1. Questa successione è di Cauchy e converge a y , ma $y \notin Y$.

Prendiamo ora l'operatore $T : X \rightarrow Y$ dato da

$$(Tx)_n = \frac{1}{n+1}x_n.$$

Si verifica facilmente che T è continua e biunivoca, ma che non esiste $\delta > 0$ tale che $B_Y(0, \delta) = B(0, \delta) \cap Y$ che è contenuta in $T(B(0, 1))$. Infatti per ogni $\delta > 0$ $y = \frac{\delta}{2}e_k \in B(0, \delta)$, ma $T^{-1}(y) = (n+1)\frac{\delta}{2}e_n$ non appartiene a $B(0, 1)$ per ogni n grande abbastanza.

Vediamo un'altra conseguenza interessante del teorema della mappa aperta.

Proposizione 6.3.16. Sia X uno spazio vettoriale munito di due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$, e supponiamo che entrambe le norme rendano X uno spazio di Banach. Supponiamo che esista $C > 0$ tale che

$$\|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \quad \forall x \in X. \quad (6.9)$$

Allora le due norme sono equivalenti.

Dimostrazione. Infatti se $T = \text{Id} : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$, questa è ovviamente lineare, e grazie a (6.9) è continua. Dalla suriettività quindi deduciamo che esiste $\delta > 0$ tale che

$$B_2(0, \delta) \subseteq T(B_1(0, 1)),$$

da cui si deduce che

$$\|x\|_1 \leq \frac{1}{\delta}\|x\|_2 \quad \forall x \in X.$$

□

Dato un operatore $T : X \rightarrow Y$ il grafico di T è dato da

$$\text{Graph}(T) := \{(x, Tx) : x \in X\}.$$

Teorema 6.3.17 (del Grafico Chiuso). Siano X e Y due spazi di Banach e sia $T : X \rightarrow Y$ lineare. Allora

$$\text{Graph}(T) \text{ è chiuso in } X \times Y \iff T \text{ è continuo.}$$

Dimostrazione. Osserviamo per prima cosa la topologia prodotto in $X \times Y$ è indotta dalla norma $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$ e che $\text{Graph}T$ è chiuso in $X \times Y$ se e soltanto se $x_n \rightarrow x$ e $Tx_n \rightarrow y$ implica che $Tx = y$. Da questo segue banalmente che la continuità implica che il grafico è chiuso.

Proviamo il viceversa. Muniamo X delle norme

$$\|x\|_1 = \|x\|_X + \|Tx\|_Y \quad (\text{norma del grafico e } \|x\|_2 = \|x\|_X).$$

Chiaramente $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$. Inoltre usando che il grafico chiuso e la sua caratterizzazione data all'inizio della dimostrazione si ottiene che X è completo rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$. Quindi grazie alla Proposizione ?? si ha che esiste $c > 0$ tale che

$$\|Tx\|_Y \leq \|x\|_1 \leq c\|x\|_X,$$

e quindi T è continua. □

Esempio 6.3.18. Siano $X = C^1([0, 1])$ e $Y = C([0, 1])$ entrambi muniti della norma del sup. Notare che X non è completo rispetto alla norma del sup. Consideriamo la mappa $T : X \rightarrow Y$ data da $Tf = f'$. È facile vedere che il grafico di T è chiuso, infatti se f_n converge F uniformemente e f'_n converge a g uniformemente, allora $g = f'$. La mappa T non è continua (trovare per esercizio una successione di funzioni derivabili in $[0, 1]$, uniformemente limitate e le cui derivate non sono uniformemente limitate).

Topologie deboli

Questo capitolo è dedicato a studiare le topologie deboli in spazi di Banach e a individuarne le sue proprietà di compattezza.

7.1 Convergenza debole in L^p : Introduzione

Abbiamo già anticipato che una successione f_k converge debolmente in $L^p(\Omega)$ a f , con $p \in [1, +\infty)$, se

$$\int_{\Omega} f_k g \, dx \rightarrow \int_{\Omega} f g \, dx \quad \forall g \in L^{p'}(\Omega). \quad (7.1)$$

Con il Lemma 3.3.4, e gli Esercizi 3.3.6 e 3.3.5 abbiamo visto che le successioni oscillanti in generale convergono debolmente ma non fortemente, mentre è facile vedere che una successione che converge nella topologia indotta dalla norma in L^p , allora converge nel senso di (??).

Esercizio 7.1.1. *Sia $p \in [1, +\infty)$. Provare che se f_k converge a f in $L^p(\Omega)$, ossia converge in norma, allora converge debolmente in $L^p(\Omega)$ a f , ossia verifica (??).*

In altre parole ci sono più successioni convergenti debolmente che successioni convergenti in norma. Ci aspettiamo quindi, che avendo una nozione di convergenza più debole sia più facile avere buone proprietà di compattezza.

7.1.1 Successioni oscillanti

Proviamo in generale un risultato sulle successioni oscillanti illustrato nell'Esercizio 3.3.6.

Lemma 7.1.2. *Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $[0, 1]^n$ -periodica (ossia tale che $f(x + z) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $z \in \mathbb{Z}^n$), con $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, con $p \in [1, +\infty)$. Definiamo la successione*

$$f_k(x) = f(kx).$$

Denotiamo che $\bar{f} = \int_{Q_1(0)} f(x) \, dx$ la media di f sul cubo $Q = Q_1(0)$ centrato in 0 di lato 1.

1. La successione f_k converge a \bar{f} in \mathcal{D}' ;
2. La successione f_k converge debolmente in $L^p(\Omega)$ alla media di f , ossia a \bar{f} , ossia dato $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^n$

$$\int_{\Omega} f_k g \, dx \rightarrow \bar{f} \int_{\Omega} g \, dx \quad \forall g \in L^{p'}(\Omega),$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, se $p > 1$, e $p' = +\infty$ se $p = 1$.

Dimostrazione. La dimostrazione del punto 1) è uguale a quella già vista nel caso uni-dimensionale nel Lemma 3.3.4. Basta infatti prendere $\varphi \in \mathcal{D}$ con $\text{supp } \varphi \subseteq Q_N(0)$, con $N \in \mathbb{N}$ e riscrivere, usando un cambio di variabili

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \varphi dx &= \frac{1}{k^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \varphi \left(\frac{y}{k} \right) dy = \sum_{i \in \mathbb{Z}^n \cap Q_{kN}(0)} \frac{1}{k^n} \int_{Q_1(i)} f(y) \varphi \left(\frac{y}{k} \right) dy \\ &= \bar{f} \sum_{i \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{k^n} \int_{Q_1(i)} \varphi \left(\frac{i}{k} \right) + \sum_{i \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{k^n} \int_{Q_1(i)} f(y) \left[\varphi \left(\frac{y}{k} \right) - \varphi \left(\frac{i}{k} \right) \right] dy \quad (7.2) \\ &\quad I_1^k + I_2^k. \end{aligned}$$

La prima somma I_1^k , è data da \bar{f} moltiplicato per le somme di Riemann di φ e quindi converge a $\bar{f} \int \varphi dx$. La seconda somma va a zero per $k \rightarrow \infty$. Infatti

$$\begin{aligned} |I_2^k| &\leq \sum_{i \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{k^n} \int_{Q_1(i)} |f(y)| \left| \varphi \left(\frac{y}{k} \right) - \varphi \left(\frac{i}{k} \right) \right| dy \\ &\leq \|f\|_{L^1(Q)} \frac{1}{k^n} \sup |\nabla \varphi| \frac{1}{k} k^n N^n = \|f\|_{L^1(Q)} \sup |\nabla \varphi| \frac{1}{k} N^n, \end{aligned} \quad (7.3)$$

che tende a zero per $k \rightarrow \infty$.

Ora per dimostrare 2) usiamo la densità delle funzioni $C_c^\infty(\Omega)$ in $L^{p'}(\Omega)$ per $p' < +\infty$ (e quindi $p > 1$). Il caso $p = 1$ verrà recuperato alla fine. Infatti data $g \in L^{p'}(\Omega)$ sia $g_m \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che $\|g_m - g\|_{L^{p'}(\Omega)} \rightarrow 0$ se $m \rightarrow \infty$. Poiché $g_m \in C_c^\infty(\Omega)$ sappiamo che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k g_m dx = \bar{f} \int_{\Omega} g_m dx. \quad (7.4)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f_k g dx - \bar{f} \int_{\Omega} g dx \right| &\leq \int_{\Omega} |f_k| |g - g_m| dx \\ &\quad + \left| \int_{\Omega} f_k g_m dx - \bar{f} \int_{\Omega} g_m dx \right| + |\bar{f}| \int_{\Omega} |g_m - g| dx \\ &\leq \|f_k\|_{L^p(\Omega)} \|g_m - g\|_{L^{p'}(\Omega)} + \left| \int_{\Omega} f_k g_m dx - \bar{f} \int_{\Omega} g_m dx \right| \\ &\quad + |\bar{f}| m(\Omega)^{\frac{1}{p'}} \|g_m - g\|_{L^{p'}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Ora se $\Omega \subseteq Q_N$ possiamo stimare la norma L^p di f_k con

$$\|f_k\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{Q_N} |f_k|^p dx = \frac{1}{k^n} \int_{Q_{kN}} |f|^p dx = N^n \int_{Q_1} |f|^p dx.$$

Quindi abbiamo che

$$\left| \int_{\Omega} f_k g dx - \bar{f} \int_{\Omega} g dx \right| \leq \left| \int_{\Omega} f_k g_m dx - \bar{f} \int_{\Omega} g_m dx \right| + C \|g_m - g\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

da cui si conclude facendo prima il limite per $k \rightarrow \infty$ e poi il limite $m \rightarrow \infty$.

Notiamo che non avremmo potuto usare lo stesso metodo nel caso $p = 1$ poiché C_c^∞ non è denso nel duale di L^1 , ossia non è denso in L^∞ con la norma del sup. Per

provare ora il risultato nel caso $p = 1$ adottiamo un metodo di troncatura. Ossia data $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 1-periodica, per ogni $M > 0$ consideriamo la funzione troncata

$$T_M f(x) = f(x) \wedge M \vee (-M).$$

La funzione $T_M f$ ora appartiene a L^∞ e quindi $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ per ogni p . È anche facile verificare che

$$(T_M f)_k = T_M(f_k).$$

Quindi usando il passo precedente abbiamo che $T_M(f_k)$ converge debolmente in L^p alla media della funzione troncata, ossia a

$$\bar{f}_M := \int_{Q_1} T_M f \, dx.$$

Ora grazie al teorema di convergenza dominata si ha che $T_M f$ converge in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ a f per $M \rightarrow \infty$ (infatti $|T_M f| \leq |f|$), quindi per ogni $g \in L^\infty(\Omega)$ si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f_k g \, dx - \bar{f} \int_{\Omega} g \, dx \right| &\leq \left| \int_{\Omega} f_k g \, dx - \int_{\Omega} T_M f_k g \, dx \right| \\ &+ \left| \int_{\Omega} T_M f_k g \, dx - \bar{f}_M \int_{\Omega} g \, dx \right| + \left| \bar{f}_M \int_{\Omega} g \, dx - \bar{f} \int_{\Omega} g \, dx \right|. \end{aligned}$$

Si conclude facendo il limite per $k \rightarrow \infty$ e poi per $M \rightarrow \infty$ (i dettagli sono lasciati per esercizio). \square

Osserviamo che la dimostrazione del Lemma di Riemann Lebesgue si poteva fare anche usando il fatto che se la funzione test g è la funzione caratteristica di un cubo Q allora l'integrale di f_k su Q , per k grande si approssima bene con la media di f per la misura del cubo Q . In altre parole la convergenza debole si fa “a mano” sulle funzioni test che sono funzioni caratteristiche di cubi. Quindi si deduce passando per linearità alle funzioni semplici e quindi per densità a tutte le funzioni test in $L^{p'}$. L'esercizio che segue chiarisce questo punto.¹

Esercizio 7.1.3. Sia $1 < p < +\infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Consideriamo una successione $\{f_k\} \subset L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, provare che

$$f_k \rightharpoonup f \text{ in } L^p \iff \|f_k\|_{L^p} \leq C \quad \int_Q f_k \, dx \rightarrow \int_Q f \, dx \quad \forall Q \text{ cubo } \subset \Omega.$$

7.1.2 Compattezza debole in L^2

Il punto della questione è illustrato dal seguente esempio fondamentale.

Esempio 7.1.4. Consideriamo una successione f_k limitata in $L^2(\Omega)$, con Ω aperto di \mathbb{R}^n , ossia tale che

$$\sup_k \|f_k\|_{L^2(\Omega)} < +\infty.$$

Proviamo che possiamo estrarre una sottosuccessione f_{k_j} e $f \in L^2(\Omega)$ tale che

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_{k_j} g \, dx = \int_{\Omega} f g \, dx \quad \forall g \in L^2(\Omega),$$

¹Maggiori dettagli di questa dimostrazione alternativa del Lemma di Riemann Lebesgue sono stati dati a lezione

ossia tale che f_{k_j} converge debolmente a f in L^2 .

Dimostrazione. Poiché L^2 è separabile (come d'altronde L^p per $1 \leq p < +\infty$), esiste una famiglia numerabile $\{h_1, h_2, \dots\}$ di funzioni di $L^2(\Omega)$ densa in $L^2(\Omega)$.

Osserviamo che

$$\left| \int_{\Omega} f_n h_1 dx \right| \leq \|f_n\|_{L^2} \|h_1\|_{L^2} \leq C \|h_1\|_{L^2}$$

e quindi possiamo estrarre una sottosuccessione $f_n^{(1)}$ tale che

$$\int_{\Omega} f_n h_1 dx \rightarrow L(h_1) \quad |L(h_1)| \leq C \|h_1\|_{L^2}.$$

Possiamo ripete questo procedimento e quindi estrarre, con un procedimento diagonale, una sottosuccessione f_{n_j} di f_n tale che per ogni $h \in \{h_1, h_2, \dots\}$

$$\int_{\Omega} f_{n_j} h dx \rightarrow L(h) \quad |L(h)| \leq C \|h\|_{L^2}.$$

È chiaro che per linearità possiamo estendere L a tutti gli elementi di $\text{span}\{h_1, h_2, \dots\} =: G$. Infatti se $g \in G$, si ha che $g = \sum_{i=1}^N \lambda_i h_i$ e quindi

$$L(g) := \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_{n_j} g dx = \sum_{i=1}^N \lambda_i \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_{n_j} h_i dx = \sum_{i=1}^N \lambda_i L(h_i).$$

Osserviamo che è facile vedere che la definizione di $L(g)$ non dipende dalla rappresentazione di g che abbiamo scelto (vedere i dettagli per esercizio). Allo stesso modo è facile convincersi che L così definito su G è continuo. Infatti

$$|L(g)| = \lim_{j \rightarrow +\infty} \left| \int_{\Omega} f_{n_j} g dx \right| \leq \lim_{j \rightarrow +\infty} \|f_{n_j}\|_{L^2} \|g\|_{L^2} \leq C \|g\|_{L^2}.$$

Ora poiché $\{h_1, h_2, \dots\}$ è denso in $L^2(\Omega)$ lo è anche in G e quindi esiste un'unica estensione di L

$$\tilde{L} : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

lineare e continua, che verifica

$$\int_{\Omega} f_{n_j} g dx \rightarrow \tilde{L}(g) \quad \forall g \in L^2(\Omega). \quad (7.6)$$

Basta infatti osservare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g_\varepsilon \in L^2(\Omega)$ tale che $\|g_\varepsilon - g\|_{L^2} < \varepsilon$ e $|\tilde{L}(g) - L(g_\varepsilon)| < C\varepsilon$ e quindi

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f_{n_j} g dx - \tilde{L}(g) \right| &\leq \left| \int_{\Omega} f_{n_j} g dx - \int_{\Omega} f_{n_j} g_\varepsilon dx \right| + \left| \int_{\Omega} f_{n_j} g_\varepsilon dx - \tilde{L}(g_\varepsilon) \right| \\ &\quad + \left| \tilde{L}(g) - L(g_\varepsilon) \right| \\ &\leq \|f_{n_j}\|_{L^2} \|g_\varepsilon - g\|_{L^2} + \left| \int_{\Omega} f_{n_j} g_\varepsilon dx - \tilde{L}(g_\varepsilon) \right| + C\varepsilon \\ &\leq \left| \int_{\Omega} f_{n_j} g_\varepsilon dx - \tilde{L}(g_\varepsilon) \right| + 2C\varepsilon, \end{aligned}$$

con cui si conclude facendo il limite per $j \rightarrow +\infty$ e $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ora grazie al teorema di rappresentazione di Riesz, esiste allora $f \in L^2(\Omega)$ tale

$$\tilde{L}(g) = \int_{\Omega} fg \, dx$$

che grazie a (??) conclude la dimostrazione.

Osservazione 7.1.5. Osserviamo che il risultato illustrato in questo esempio (e che di fatto è il risultato fondamentale riguardo alla topologia debole, si sarebbe potuto ottenere analogamente in $L^p(\Omega)$, per $p \in (0, +\infty)$ (il cui duale $L^p'(\Omega)$ è separabile), ma non in $L^1(\Omega)$ (il cui duale è $L^\infty(\Omega)$ che non è separabile).

Esempio 7.1.6. Si consideri per esempio la successione di mollificatori $\rho_k(x) = k^n \rho(kx)$. Questa successione è limitata in $L^1(\mathbb{R}^n)$ ma non converge debole (infatti converge alla delta in 0 nel senso delle distribuzioni che sappiamo non si può rappresentare in forma integrale attraverso una funzione di L^1)

Quanto descritto nel caso di L^2 può essere ottenuto in un contesto più generale.

7.2 Convergenza debole in spazi di Banach

In questa sezione introdurremo le topologie deboli per gli spazi di Banach e le loro principali proprietà.

Domanda 1: Se X è un insieme, Y uno spazio topologico e $\varphi_\alpha : X \rightarrow Y$ con $\alpha \in A$ (A un insieme di indici), qual'è la topologia τ in X meno fine (ossia con meno aperti) che rende continue tutte le mappe φ_α , $\alpha \in A$?

Osservazione 7.2.1. Evidentemente, per definizione di continuità, τ deve contenere tutti gli insiemi della forma $\varphi_\alpha^{-1}(V)$ con V aperto in Y e $\alpha \in A$.

Notiamo che più è fine la topologia e meno successioni convergenti ci sono (e quindi più è difficile avere criteri di compattezza).

Domanda 2: Data una collezione \mathcal{S} di sottoinsiemi di X , come si costruisce la topologia meno fine che contiene \mathcal{S} ?

Lemma 7.2.2. Se $\mathcal{S} \subset 2^X$ (ossia \mathcal{S} è una famiglia di sottoinsiemi di X) e $\cup_{V \in \mathcal{S}} V = X$, denotiamo con \mathcal{B} la famiglia di insiemi ottenuta facendo intersezioni finite di insiemi di \mathcal{S}

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{k=1}^N W_k : N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, W_k \in \mathcal{S}, \forall k \in \{1, \dots, N\} \right\}.$$

Allora la famiglia degli insiemi ottenuta facendo le unioni qualsiasi di elementi di \mathcal{B}

$$\tau := \left\{ \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha : A \text{ un insieme } V_\alpha \in \mathcal{B} \forall \alpha \in A \right\} \cup \emptyset.$$

è la topologia (ossia è chiusa rispetto a unioni qualsiasi e intersezioni finite, $\emptyset \in \tau$ and $X \in \tau$) meno fine che contiene \mathcal{S} (ossia tale che presa un'altra topologia $\tau' \supset \mathcal{S}$ allora $\tau' \supset \tau$).

Dimostrazione. La dimostrazione è lasciata per esercizio. \square

Quindi \mathcal{B} è una *base di intorni* (e \mathcal{S} una *sottobase*) per la topologia τ , meno fine che contiene \mathcal{S} .

In particolare

$$U \in \tau \iff \forall x \in U \exists W_1, \dots, W_N \in \mathcal{S} \text{ tali che } x \in \bigcap_{i=1}^N W_i \subseteq U.$$

Quindi, tornando alla domanda di partenza, la topologia meno fine che rende continue tutte le applicazioni $\varphi_\alpha : X \rightarrow Y$, $\alpha \in A$, è data dalla costruzione appena esposta, scegliendo

$$\mathcal{S} = \{ \varphi_\alpha^{-1}(V) : V \text{ aperto di } Y, \alpha \in A \}.$$

Osserviamo che è facile generalizzare un po' questi argomenti e considerare $\varphi_\alpha : X \rightarrow Y_\alpha$, $\alpha \in A$, dove Y_α sono spazi topologici (eventualmente distinti).

Proposizione 7.2.3. *Sia $\{x_n\}$ una successione in X e \mathcal{B} la base di intorni generata da $\varphi_\alpha^{-1}(V)$ al variare di V tra gli aperti di Y_α (o eventualmente tra gli elementi di una base di intorni di Y_α) e $\alpha \in A$, e sia τ la topologia da questa generata. Allora*

$$x_n \xrightarrow{\tau} x^* \iff \varphi_\alpha(x_n) \rightarrow \varphi_\alpha(x^*) \forall \alpha \in A.$$

Dimostrazione. La dimostrazione si trova su [?], Proposizione III.1. \square

Esempio 7.2.4. *Se $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ossia l'insieme di tutte le successioni reali ($X = \{x : x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}\}$). Possiamo introdurre la topologia come spazio prodotto. Consideriamo le mappe $\varphi_k(x) = x_k$ (ossia il k -esimo elemento della successione x , questa non è altro che la proiezione sulla k -componente). La topologia prodotto è la meno fine che rende continue tutte le proiezioni. Quindi per quanto appena visto*

$$x^{(n)} \xrightarrow{\tau} x^* \iff x_k^{(n)} \rightarrow x_k^* \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Osserviamo che gli intorni di questa topologia sono molto grandi. Infatti sono insiemi della forma

$$U = \prod_{k \in \mathbb{N}} U_k,$$

dove U_k sono aperti di \mathbb{R} e solo un numero finito di questi è diverso da \mathbb{R} (infatti ogni elemento della sottobase \mathcal{S} in questo caso è della forma $\prod_{k \in \mathbb{N}} U_k$ con $U_k = \mathbb{R}$ per ogni $k \neq k_0$, ossia $U = \varphi_{k_0}^{-1}(U_{k_0})$). In particolare ogni intorno di questa topologia contiene un sottospazio affine di dimensione infinita.

Introduciamo quindi la topologia debole, applicando i ragionamenti appena fatti al caso di uno spazio X normato e a φ_α elementi del duale di X' .

Definizione 7.2.5. *Se X è uno spazio di Banach e X' il suo duale, la topologia debole $\sigma(X, X')$ su X è la topologia meno fine che rende continui tutti gli elementi di X' .*

Osservazione 7.2.6. *Chiameremo forte la topologia indotta dalla norma. Per definizione di X' , la topologia forte τ_s contiene $\sigma(X, X')$ ed è più fine di quella debole. In generale questa inclusione è stretta (come abbiamo visto in L^p per le successioni oscillanti). Questo è vero negli spazi infinito dimensionali.*

Applicando la Proposizione ?? alla topologia debole in L^p , ossia la topologia $\sigma(L^p, L^p')$ si ha

$$f_n \text{ debolmente a } f \text{ in } L^p(\Omega) \iff \int_{\Omega} f_n g \, dx \rightarrow \int_{\Omega} f g \, dx \quad \forall g \in L^p'(\Omega).$$

Notazione: In generale per ogni $x \in X$ e $f \in X'$, denotiamo

$$f(x) = \langle f, x \rangle_{X, X'} = \langle f, x \rangle,$$

mentre, quando non ci saranno ambiguità, per indicare che una successione x_n converge debolmente (ossia nella topologia $\sigma(X, X')$) useremo la notazione

$$x_n \rightharpoonup x.$$

Esercizio 7.2.7. *Mostrare che in uno spazio normati di dimensione finita la topologia debole e la forte coincidono e quindi*

$$x_n \rightarrow x \iff x_n \rightharpoonup x.$$

Proposizione 7.2.8. *La topologia debole separa i punti (ossia è di Hausdorff).*

Dimostrazione. Si veda [?], Proposizione III.3. □

Proposizione 7.2.9. *Sia $x_0 \in X$. Una base di intorni di x_0 per la topologia debole $\sigma(X, X')$ è data dagli insiemi della forma*

$$V(f_1, \dots, f_n, x_0, r) := \{x \in X : |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < r \quad \forall i = 1, \dots, n\},$$

con $f_i \in X'$ e $r > 0$.

Dimostrazione. Si veda [?], Proposizione III.4. □

È chiaro quindi che anche nel caso della topologia debole (come per l'Esempio ??) tutti gli intorni in $\sigma(X, X')$ contengono degli spazi affini infinito dimensionali, non appena X è infinito dimensionale.

Infatti, dato $V = V(f_1, \dots, f_n, x_0, r)$ con $f_i \in X'$, se definiamo

$$L = \{x \in X : \langle f_i, x \rangle = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n\}$$

è chiaro che $x_0 + L \subseteq V$. Ora per vedere che $L \neq \{0\}$ poniamo $T : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $T(x) = (\langle f_1, x \rangle, \dots, \langle f_n, x \rangle)$. Se $L = \{0\}$, allora T è iniettiva (infatti L è il nucleo di T), quindi T è una biezione tra X e un sottospazio di \mathbb{R}^n , da cui si avrebbe che X ha dimensione finita. Questo implica che L contiene delle "rette". Si può anche vedere che, con la stessa mappa, X/L si può rendere isomorfo a un sottospazio di \mathbb{R}^n , da cui si deduce che se X ha dimensione infinita, anche L deve averla. In conclusione V è illimitato e contiene uno spazio affine di dimensione infinita.

Proposizione 7.2.10. *Sia X uno spazio di Banach e $\{x_n\} \subset X$. Allora*

i) $x_n \rightharpoonup x$ debolmente in $\sigma(X, X')$ se e soltanto se $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ per ogni $f \in X'$;

ii) Se $x_n \rightarrow x$ fortemente in X , allora $x_n \rightharpoonup x$ debolmente in $\sigma(X, X')$;

iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ debolmente in $\sigma(X, X')$, allora $\sup_n \|x_n\| < +\infty$ e $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$;

iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ debolmente in $\sigma(X, X')$ e $f_n \rightarrow f$ fortemente in X' , allora $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Dimostrazione. Si veda [?], Proposizione III.5. □

Esercizio 7.2.11. Consideriamo lo spazio $\ell^2 = \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < +\infty\}$ munito della norma

$$\|x\|_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2.$$

1. Mostrare che ℓ^2 è uno spazio di Banach (in realtà vedremo che è meglio, è uno spazio di Hilbert);
2. Mostrare che il duale di ℓ^2 è ℓ^2 (cosa che potremmo dedurre dalla sua struttura Hilbertiana, ma che si può fare esplicitamente in questo caso), ossia mostrare che per ogni $F \in (\ell^2)'$, esiste $y \in \ell^2$ tale che

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n \quad \forall x \in \ell^2;$$

Suggerimento: definire $y_n = F(e_n)$.

3. Mostrare che se $y : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ verifica $\sup_n |y_n| < +\infty$ allora la successione di elementi di ℓ^2

$$y^{(k)} = y_k e_k,$$

dove $(e_k)_n = 0$ per ogni $n \neq k$ e $(e_k)_k = 1$, converge debole a 0 in ℓ^2 .

4. Usando il punto precedente mostrare che per ogni $x \in \ell^2$ con $\|x\|_{\ell^2} < 1$ esiste una successione $x^{(k)}$ in ℓ^2 con $\|x^{(k)}\|_{\ell^2} = 1$ che converge debole a x .

L'esercizio precedente suggerisce una caratteristica della topologia debole che vale in generale negli spazi infinito dimensionali. Si può provare (vedi [?]) infatti che se X ha dimensione infinita allora l'insieme

$$\{x \in X : \|x\|_X < 1\}$$

non è mai aperto nella topologia debole (si capisce se ricordiamo che gli intorni nella topologia debole sono illimitati). Inoltre si può anche vedere che l'insieme

$$\{x \in X : \|x\|_X = 1\}$$

non è mai chiuso nella topologia debole e la sua chiusura è

$$\{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}.$$

In particolare $\{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$ è chiuso sia nella topologia forte che in quella debole. Infatti anche se in generale i debolmente chiusi non coincidono con i fortemente chiusi, questo è vero se in più aggiungiamo la convessità. Questa è una conseguenza del Teorema di Hahn Banach e del fatto che il complementare di un convesso chiuso è unione di iperpiani (ossia intorni nella topologia debole) e quindi è debolmente aperto.

Proposizione 7.2.12. Se $C \subseteq X$ è convesso. Allora C è debolmente chiuso se e solo se è fortemente chiuso.

Dimostrazione. Si veda [?] Teorema III.7. \square

Osservazione 7.2.13. *In particolare la Proposizione precedente mostra che se C è un convesso chiuso (fortemente) e $x_n \in C$ converge debolmente a x^* , allora $x^* \in C$.*

Si può mostrare una proprietà ancora più forte. Data una qualsiasi successione debolmente convergente si può trovare una successione ottenuta facendo combinazioni convesse di elementi di $\{x_n\}$ che converge fortemente allo stesso limite. Questo risultato prende il nome di Lemma di Mazur.

Esercizio 7.2.14 (Lemma di Mazur). *Sia X uno spazio di Banach e $x_n \rightharpoonup x$. Il convessificato di $\{x_n\}$ è l'insieme di tutte le combinazioni convesse (finite) di elementi di $\{x_n\}$, ossia*

$$\text{co}\{x_1, x_2, \dots\} := \left\{ x = \sum_{i=1}^N t_i x_{k_i} : x_{k_i} \in \{x_n\} \text{ e } t_i \in \mathbb{R} \ t_i \geq 0 \ \sum_{i=1}^N t_i = 1, N \in \mathbb{N} \right\}.$$

Considerare l'insieme

$$C_n := \text{co}\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

1. *Provare che gli insiemi C_n sono convessi.*
2. *Dato $K_n = \overline{C_n}^{\|\cdot\|}$, provare che*

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$$

3. *Provare che esiste una successione y_n tale che*

$$y_n \in C_n \quad y_n \rightarrow x.$$

4. *Provare che esiste z_n tale che*

$$z_n \in \text{co}\{x_1, \dots, x_n\} \quad z_n \rightarrow x.$$

Suggerimento: Usare il punto precedente reindicizzando la successione.

7.3 Prototipi di convergenza debole in L^p

7.3.1 Convergenza debole in domini limitati: oscillazione e concentrazione

Nei domini limitati ci sono essenzialmente due situazioni in cui c'è convergenza debole. Il primo è quello individuato dal Lemma di Riemann Lebesgue.

Oscillazione

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $[0, 1]^n$ -periodica, con $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$, con $p \in [1, +\infty)$. Abbiamo già visto che la successione

$$f_k(x) = f(kx).$$

converge debolmente a $\bar{f} = \int_{Q_1(0)} f(x) dx$ (la media di f sul cubo $Q = Q_1(0)$) in L^p .

Concentrazione

Se $p \in (1, +\infty)$ consideriamo una funzione $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $\text{supp } f \subseteq B(0, R)$, con $R > 0$. Definiamo la successione

$$f_k(x) = k^{\frac{n}{k}} f(kx).$$

Proviamo che la successione f_k converge debolmente a zero in $L^p(B(0, 1))^2$.

Osserviamo che, $k > R$, allora si vede facilmente che $\|f_k\|_{L^p(B(0, 1))} = \|f\|_{L^p}$. Quindi è chiaro che f_k non convergerà fortemente a zero. Fissiamo $g \in L^{p'}(B(0, 1))$, con p' esponente coniugato di p (notiamo che $p' < +\infty$ perché $p > 1$), e $k > R$

$$\left| \int_{B(0, 1)} f_k g \, dx \right| = \left| \int_{B(0, \frac{R}{k})} f_k g \, dx \right| \leq \|f_k\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}(B(0, \frac{R}{k}))}.$$

Grazie alla sommabilità di $|g|^{p'}$ si ha che $\lim_{k \rightarrow \infty} \|g\|_{L^{p'}(B(0, \frac{R}{k}))} = 0$, da cui deduciamo la convergenza debole a zero di f_k .

7.3.2 Convergenza debole in domini illimitati: fuga all'infinito

Se ora consideriamo anche il caso di domini illimitati troviamo altri due “modi” con cui si può convergere debolmente e non fortemente.

Fuga all'infinito per traslazione

Sia $p \in (1, +\infty)$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Fissiamo un vettore $e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e definiamo la successione

$$f_k(x) = f(x + ke).$$

Questa successione converge debolmente a zero in $L^p(\mathbb{R}^n)$, ma non fortemente visto che è facile controllare che $\|f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ (a meno ovviamente che non sia $f \equiv 0$).

Per provare la convergenza debole fissiamo $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, con $p' < +\infty$ esponente coniugato di p e osserviamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k g \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x + ke) g(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x - ke) \, dx.$$

Ora scegliamo $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\text{supp } g \subseteq B(0, R)$ abbiamo

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f_k g \, dx \right| = \left| \int_{B(ke, R)} f(x) g(x - ke) \, dx \right| \leq \|g\|_{L^{p'}} \left(\int_{B(ke, R)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Grazie alla sommabilità di $|f|^p$ si ha che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{B(ke, R)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = 0,$$

e quindi si ha che $\int_{\mathbb{R}^n} f_k g \, dx$ tende a zero. Per concludere si ragiona per densità su g .

²In verità la successione f_k converge debolmente a zero in $L^p(\Omega)$, qualunque sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

È facile vedere che questa successione converge forte a zero in $L^p(\Omega)$ per ogni Ω limitato.

Inoltre osserviamo che in generale questa successione non converge mai debolmente in $L^1(\mathbb{R}^n)$ (per il quale per altro non possiamo usare l'argomento di densità appena visto). Basta scegliere per esempio f non a media nulla e $g = 1$ per convincersene.

“Vanishing” o fuga all'infinito per dilatazione

Sia $p \in (1, +\infty)$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Consideriamo la successione

$$f_k(x) = \frac{1}{k^{\frac{n}{p}}} f\left(\frac{x}{k}\right).$$

Osserviamo che in questo caso se $\text{supp } f \subseteq B(0, 1)$, allora $\text{supp } f_k \subseteq B(0, k)$, ossia il supporto si allarga e la funzione si abbassa (ossia il contrario di ciò che avviene nella concentrazione).

Anche in questo caso con un cambiamento di variabili si vede facilmente che $\|f_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Inoltre se $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k g \, dx = \frac{1}{k^{\frac{n}{p}-n}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(ky) \, dy = k^{\frac{n}{p'}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(ky) \, dy$$

e quindi se $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\text{supp } g \subseteq B(0, R)$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f_k g \, dx \right| \leq k^{\frac{n}{p'}} \|f\|_{L^p(B(0, \frac{R}{k}))} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(ky)|^{p'} \, dy \right)^{\frac{1}{p'}} = \|f\|_{L^p(B(0, \frac{R}{k}))} \|g\|_{L^{p'}}$$

che tende a zero grazie all'integrabilità di $|f|^p$. Come al solito si conclude per densità.

Di nuovo si può vedere che questa convergenza non c'è in $L^1(\mathbb{R}^n)$ (testando con $g = 1$), ma che invece la successione f_k converge fortemente a zero in $L^p(\Omega)$ per ogni Ω limitato e per ogni $p \in [1, +\infty)$.

Gli esempi visti sono tutti esempi di successioni che convergono debolmente (in particolare limitate) e da cui non si può estrarre alcuna successione convergente fortemente, ossia sono tutti (e essenzialmente i soli) controesempi alla compattezza forte dei limitati in L^p (come esempio di spazio infinito dimensionale).

7.4 Convergenza *-debole

Osserviamo che negli esempi di convergenza debole in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $p \in [1, +\infty)$ visti sopra, non abbiamo testato la convergenza debole in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Questo infatti richiederebbe di testare le successioni con funzionali lineari e continui su $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. L'esercizio che segue chiarisce che questo può presentare delle sorprese.

Esempio 7.4.1. Consideriamo l'insieme $\Omega = (0, 1)$ e per ogni $x \in (0, 1)$ consideriamo il funzionale $F_x \in (L^\infty(\Omega))'$ che verifica

$$\langle F_x, \varphi \rangle = \varphi(x) \quad \forall \varphi \in C_c((0, 1)). \quad (7.7)$$

Questo si può ottenere da (??) estendendolo con Hahn Banach. In particolare se si prende la successione $\varphi_n(x) = \sin nx$ la convergenza debole in $L^\infty(\Omega)$ richiede che

$$\langle F_x, \varphi_n \rangle = \sin(nx)$$

sia convergente per ogni $x \in \Omega$. Ma è facile verificare (si faccia per esercizio) che $f_n(x) = f(nx)$ non converge mai puntualmente a meno che f non sia costante. Si deduce che le successioni oscillanti in generale non possono convergere debolmente in $L^\infty(\Omega)$.

Introduciamo un'altra topologia su spazi di Banach che, come vedremo, ha buone proprietà di compattezza. Questa topologia può essere introdotta in tutti gli spazi di Banach che sono duali di qualche altro spazio di Banach (come nel caso di $L^\infty(\Omega)$ che è il duale di $L^1(\Omega)$, o $\mathcal{M}(\Omega)$ che è il duale di $C_c(\Omega)$).

Se X' è il duale di X , Banach, fino ad ora sappiamo che si possono introdurre almeno due topologie interessanti, che in generale sono distinte

- i) La topologia forte τ_s (indotta dalla norma di X);
- ii) La topologia debole $\sigma(X', (X')')$, ossia la topologia meno fine che rende continui tutti i funzionali lineari e continui (nella topologia forte) su X' .

D'altronde a volte (come nel caso di $L^\infty(\Omega)$) l'uso della topologia debole è una richiesta ancora troppo forte (oltre che non particolarmente agevole).

Definizione 7.4.2. Dato X Banach, introduciamo in X' la topologia *debole, che indichiamo con $\sigma(X', X)$ ossia la topologia meno fine che rende continue tutte le applicazioni

$$\varphi_x : f \rightarrow \langle f, x \rangle, \quad (7.8)$$

al variare di $x \in X$.

Osservazione 7.4.3. Abbiamo già incontrato la mappa in (??), nella dimostrazione della Proposizione ???. Infatti questa non è altro che $J(x)$ dove J è l'immersione canonica di X in X'' . In particolare questo vuol dire che $\sigma(X', X)$ è meno fine di $\sigma(X', X'')$, infatti garantisce la continuità degli elementi di un sottospazio di X'' , $J(X)$.

Quindi se $X'' = J(X)$ la topologia debole e la topologia *debole coincidono. Questo è il caso degli spazi L^p con $p \in (1, +\infty)$.

Definizione 7.4.4. Diciamo che uno spazio di Banach X è riflessivo se $J(X) = X''$, ossia l'immersione canonica è suriettiva.

Osservazione 7.4.5. È chiaro che gli spazi $L^p(\Omega)$ sono riflessivi per ogni $p \in (1, +\infty)$.

Anche in questo caso possiamo mostrare che la topologia σ debole è Hausdorff e quindi separa i punti.

Proposizione 7.4.6. Sia X Banach e sia X' il suo duale. La topologia $\sigma(X', X)$ in X' è Hausdorff.

Dimostrazione. Si veda [?], Proposizione III.10. □

Analogamente a quanto visto per la topologia debole $\sigma(X, X')$ si ottiene una base di intorni per $\sigma(X', X)$ della forma

$$V(f_0, x_1, \dots, x_n; r) = \{f \in X' : |\langle f - f_0, x_i \rangle| < r \quad \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Infatti questi sono intersezioni finite di insiemi del tipo

$$J^{-1}(x_i)(a_i - r, a_i + r) \quad \text{con } a_i = \langle f_0, x_i \rangle.$$

Per una successione f_n che converge a f *debolmente, utilizziamo la notazione

$$f_n \xrightarrow{*} f.$$

Proposizione 7.4.7. *Sia f_n una successione in X' . Allora*

- i) $f_n \xrightarrow{*} f$ *debolmente in $\sigma(X', X'')$ se e soltanto se $\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ per ogni $x \in X$;
- ii) Se $f_n \rightarrow f$ fortemente in X' , allora $f_n \xrightarrow{*} f$ *debolmente in $\sigma(X', X'')$;
- iii) Se $f_n \xrightarrow{*} f$ *debolmente in $\sigma(X', X'')$, allora $\sup_n \|f_n\|_{X'} < +\infty$ e $\|f\|_{X'} \leq \liminf_n \|f_n\|_{X'}$;
- iv) Se $f_n \xrightarrow{*} f$ *debolmente in $\sigma(X', X'')$ e $x_n \rightarrow x$ fortemente in X , allora $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Dimostrazione. Si veda [?], Proposizione III.5, con le ovvie modifiche. □

In generale non è vero che se $f_n \xrightarrow{*} f$ e $x_n \rightarrow x$, allora $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$. Ne vediamo subito un esempio.

Esempio 7.4.8. 1) *Una tipica situazione in cui è naturale usare la convergenza *debole è quella di $L^\infty(\Omega)$. Infatti se $f_n, f \in L^\infty(\Omega)$, allora*

$$f_n \xrightarrow{*} f \quad \text{in } \sigma(L^\infty, L^1) \quad \iff \quad \int_{\Omega} f_n g \, dx \rightarrow \int_{\Omega} f g \, dx \quad \forall g \in L^1(\Omega).$$

Quindi come abbiamo già osservato la successione $f_k(x) = f(kx)$ con $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 1-periodica, verifica

$$f_k \xrightarrow{*} \int_{Q_1} f \, dx$$

(anche questo risultato si ottiene prima testando con le funzioni $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e poi ragionando per densità.

In particolare abbiamo che

$$\sin(nx) \xrightarrow{*} 0 \quad \text{in } L^\infty$$

e anche

$$\sin(nx) \rightarrow 0 \quad \text{in } L^1,$$

ma

$$\langle \sin(nx), \sin(nx) \rangle_{L^\infty, L^1} = \int_0^{2\pi} |\sin(nx)|^2 dx = \pi \not\rightarrow 0.$$

2) In \mathbb{R}^n consideriamo $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, con supporto di f in $B(0, R)$. Fissiamo un vettore $e \in \mathbb{R}^n$ e definiamo $f_k(x) = f(x + ke)$. È facile vedere che f_k converge *debolmente in L^∞ a 0. Infatti se $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f_k g \, dx \right| = \left| \int_{B(ke, R)} f_k g \, dx \right| \leq \sup |f| \int_{B(ke, R)} |g| \, dx \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty.$$

3) Un altro notevole caso in cui si usa la convergenza **debole* è quello delle misure di Radon finite. In $\mathcal{M}(\Omega)$, che ricordiamo è il duale di $C_0(\Omega)$, la convergenza **debole* corrisponde a

$$\mu_k \xrightarrow{*} \mu \iff \int_{\Omega} \varphi d\mu_k \rightarrow \int_{\Omega} \varphi d\mu \quad \forall \varphi \in C_0(\Omega).$$

Notare che se una successione di misure converge **debolmente* in $\mathcal{M}(\Omega)$ in particolare converge nel senso delle distribuzioni.

Esempio 7.4.9. Se $x_n \in \Omega$ e $x_k \rightarrow x$, con $x_k \neq x$ (definitivamente), allora

$$\delta_{x_k} \xrightarrow{*} x \iff \varphi(x_k) \rightarrow \varphi(x) \quad \forall \varphi \in C_0(\Omega),$$

ma evidentemente non convergono fortemente (ossia in variazione totale, che ricordiamo coincide con la norma duale in $\mathcal{M}(\Omega)$). Infatti

$$|\delta_{x_k} - \delta_x|(\Omega) = 2$$

perché i punti x_k e x sono distinti.

Esercizio 7.4.10. Mostrare che la successione di misure in $\mathcal{M}((0, 1))$

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-1)^i \delta_{\frac{i}{n}}$$

Esercizio 7.4.11. **Provare che il sottoinsieme E delle misure di Radon finite in $[0, 1]$, $\mathcal{M}([0, 1])$, definito da*

$$E := \left\{ \sum_{i=1}^n c_i \delta_{x_i} : x_i \in [0, 1] \text{ e } c_i \in \mathbb{R} \right\}$$

è denso in $\mathcal{M}([0, 1])$ rispetto alla topologia **debole*, ma non rispetto alla topologia forte (indotta dalla variazione totale).

Suggerimento: Data $\mu \in \mathcal{M}([0, 1])$ considerare partizioni di $[0, 1]$, $\cup_i I_i$, e definire $c_i = \mu(I_i)$.

L'importanza della topologia **debole* è chiarita dal seguente risultato di compattezza.

Teorema 7.4.12 (La palla unitaria è **debolmente* compatta per successioni). Sia X uno spazio normato separabile e X' il suo duale. Allora la palla unitaria in X' è compatta per successioni nella topologia **debole* in X' , ossia per ogni successione $\{f_n\}$ in X' con $\|f_n\|_{X'} \leq 1$, allora esiste una sottosuccessione f_{n_k} e $f \in X'$ tale che

$$f_{n_k} \xrightarrow{*} f \quad \text{in} \quad \sigma(X', X).$$

Osservazione 7.4.13. Vale un teorema più generale (il Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki, [?] Teorema III.16) che garantisce la **debole* compattezza della palla unitaria di X' anche se X è un Banach non necessariamente separabile. La dimostrazione che vedremo invece vale nel caso separabile, sufficiente ai nostri scopi, ed è costruttiva.

Dimostrazione del Teorema ??. La dimostrazione è la versione generale di quello che abbiamo già fatto nel caso di L^2 .

Sia $E := \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un insieme numerabile denso di X e sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di X' tale che $\|f_n\|_{X'} \leq 1$ per ogni n . Dato $x_1 \in E$ abbiamo che

$$|\langle f_n, x_1 \rangle| \leq \|f_n\|_{X'} \|x_1\|_X \leq \|x_1\|_X.$$

Quindi $\langle f_n, x_1 \rangle$ è una successione in \mathbb{R} limitata da cui, quindi, possiamo estrarre una sottosuccessione convergente $f_n^{(1)}$. Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n^{(1)}, x_1 \rangle =: L(x_1),$$

e $|L(x_1)| \leq \|x_1\|_X$. Analogamente possiamo estrarre da $f_n^{(1)}$ una sottosuccessione, che denotiamo con $f_n^{(2)}$, che verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n^{(2)}, x_2 \rangle =: L(x_2),$$

e $|L(x_2)| \leq \|x_2\|_X$. Iterando questo procedimento e attraverso un procedimento diagonale troviamo una successione f_{n_k} tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_{n_k}, x \rangle = L(x)$$

e $|L(x)| \leq \|x\|_X$ per ogni $x \in E$. Ora esattamente come abbiamo già fatto per la dimostrazione del caso di L^2 possiamo estendere $L(x)$ per linearità allo $\text{span}E$. Infatti dato $x \in E$, sia $x = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i$, poniamo

$$L(x) := \sum_{i=1}^N \alpha_i L(x_i) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle f_{n_k}, x_i \rangle = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \alpha_i \langle f_{n_k}, x_i \rangle = \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle f_{n_k}, x \rangle$$

da cui in particolare si deduce che il limite dell'ultima identità esiste. Inoltre abbiamo

$$|L(x)| = \lim_{k \rightarrow +\infty} |\langle f_{n_k}, x \rangle| \leq \|f_{n_k}\|_{X'} \|x\|_X \leq \|x\|_X.$$

Infine per densità possiamo estendere L a tutto X . Infatti per ogni $x \in X$, sia $x_p \rightarrow x$ una successione in E . Allora poiché

$$|L(x_n) - L(x_m)| \leq \|x_n - x_m\|_X$$

il fatto che x_p sia convergente implica che la successione $L(x_p)$ sia convergente e quindi definiamo

$$L(x) := \lim_{p \rightarrow +\infty} L(x_p).$$

La verifica che $L(x)$ è lineare e continuo, ossia esiste $f \in X'$ tale che $L(x) = \langle f, x \rangle$, e che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \langle f_{n_k}, x \rangle = \langle f, x \rangle \quad \forall x \in X,$$

è lasciata per esercizio. □

Bibliografia

- [1] Brezis H.: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer.
- [2] Evans C. e Gariepy R.: *Measure theory and fine properties of functions*. CRC Press 1992
- [3] Fomin A.N. e Kolmogorov S.V.: *Elementi di teoria delle funzioni e analisi funzionale*
- [4] Royden H.L. e Fitzpatrick P.M. *Real Analysis* Fourth Edition-Prentice Hall 2010.
- [5] Rudin W.: *Functional Analysis*. Second edition, McGraw-Hill International Editions, 1991.