Programma del corso di Istituzioni di Analisi Superiore
Sapienza a.a. 2016/17

Adriana Garroni

1 Funzioni a variazione limitata e assolutamente continue

Derivabilità delle funzioni monotone. Teorema di Lebesgue. Ricoprimenti fini. Lemma del ricoprimento di Vitali. Derivabilità della funzione integrale di funzioni sommabili. Funzioni a variazione limitata. La funzione di Cantor-Vitali. Funzioni assolutamente continue, teorema fondamentale del calcolo. Collegamenti con il teorema di Radon-Nykodim.

2 Le distribuzioni

Introduzione alle distribuzioni. Definizione di misura di Radon. Enunciato del Teorema di Riesz di rappresentazione del duale delle funzioni continue a supporto compatto con le misure di Radon.

Lo spazio $\mathcal{D}$. Convergenza in $\mathcal{D}$. Le funzioni mollificatrici. Convoluzioni. Il sottospazio $\mathcal{D}_K$ delle funzioni a supporto in K, compatto. La metrica in $\mathcal{D}_K$. Caratterizzazione dei funzionali lineari in $\mathcal{D}_K$. Definizione di distribuzione. Esempi. Derivata distribuzionale, definizione e proprietà. Caratterizzazione delle distribuzioni la cui derivata prima nulla. Distribuzioni con derivata in L^1 e distribuzioni misure (e relazione con le funzioni assolutamente continue e le funzioni a variazione limitata di una variabile). Supporto di una distribuzione, esempi. Convergenza in distribuzioni. Esempi. Il prodotto di una distribuzione per una funzione in C^∞. La regola di Leibniz per le derivate. La composizione. La convoluzione. Cenni sulla trasformata di Fourier per le distribuzioni e le distribuzioni temperate.

3 Definizione di spazi di Sobolev

Nozione di derivata debole. Esempi e proprietà. Definizione degli spazi di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ e $W^{k,p}(\Omega)$. Proprietà di riflessività e separabilità degli spazi di Sobolev. Densità delle funzioni $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Teorema di Meyers-Serrin ($H = W$). Caso unidimensionale e prolungamento per riflessione. Teorema di estensione nel caso multi-dimensionale (enunciato e cenni di dimostrazione). Caratterizzazione delle funzioni di Sobolev con i rapporti incrementali. Regole di calcolo ottenute per approssimazione. Lo spazio $W_0^{1,p}(\Omega)$. Il caso delle funzioni di Sobolev in una dimensione, rappresentante continuo, valore zero al bordo. Caratterizzazione dei duale di $W_0^{1,p}$ e di $W^{1,p}$. Esempi unidimensionali.

4 Funzionali Lineari su spazi di Banach

Spazi di Banach. Esempi. Operatori lineari tra spazi topologici. Operatori limitati. Operatori tra spazi normati, norma operatoriale. Spazio duale di uno spazio normato, delle applicazioni lineari su $\mathbb{R}$. Esempi. Forma analitica del Teorema di Hahn Banach. Lemma di Zorn. Applicazioni del teorema di Hahn Banach. Definizione di insiemi separati e strettamente separati. Funzionale di Minkowski (definizione e proprietà). Teorema di Hanh Banach in forma geometrica e applicazioni. Teorema di Banach Steinhaus sull'uniforme limitatezza. Conseguenze per le successioni di operatori lineari tra spazi di Banach che convergono puntualmente. Teorema dell'applicazione aperta. Teorema del grafico chiuso. Conseguenze ed esempi.

5 Topologie deboli

Topologie deboli in uno spazio di Banach. Dimostrazione che la topologia debole separa i punti. Caratterizzazione di una base di intorni per la topologia debole. Propriet della convergenza debole. Immersione canonica. Esempi in ℓ^2 e in L^p. Oscillazione, concentrazione, fuga all'infinito per traslazione, fuga all'infinito per dilatazione. Osservazioni sulla convergenza debole in L^∞. Definizione di topologia $*$-debole. La topologia $*$-debole separa i punti. Proprietà della topologia $*$-debole. Esempi: in L^∞ e per le misure di Radon. Teorema di compattezza per successioni della palla unitaria nella topologia $*$-debole in X' (con ipotesi di separabilità di X). Enunciato del teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki, senza dimostrazione). Spazi riflessivi. Varie proprietà degli spazi riflessivi. Teorema di compattezza debole per successioni negli spazi riflessivi. Proprietà di separabilità. Spazi uniformemente convessi. Esempi (disuguaglianza di Clarkson). Gli spazi uniformemente convessi sono riflessivi (senza dimostrazione).

6 Ancora su spazi di Sobolev

Caratterizzazione della convergenza debole negli spazi di Sobolev.. Disuguaglianza di Poincaré su un dominio limitato e su una striscia. Comportamento della costante di Poincaré rispetto a riscalamenti del dominio. Cenni sul quoziente di Rayleigh e sul primo autovalore del Laplaciano e migliore costante di Poincaré. Immersioni di Sobolev in $\mathbb{R}$. immersioni continue e immersioni compatte. Teorema di Frechet-Kolmogorov-Riesz. Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev su $\mathbb{R}^n$. Soluzioni di Talenti (cenni). Estensione della disuguaglianza di GNS a spazi di Sobolev su domini. Immersioni continue: il caso $p < n$, il caso $p = n$ e teorema di Morrey. Teorema di Rellich per le immersioni compatte. Disuguaglianza di Poincaré Wirtinger. Il teorema di traccia nel semispazio. Cenni sul teorema di traccia in un dominio con bordo regolare. Cenni sugli spazi di Sobolev frazionari.

7 Applicazioni

Il metodo diretto del calcolo delle variazioni: Esistenza del minimo per un problema astratto. Applicazione a funzionali integrali in L^p. Definizione di Epigrafico di una funzione. Caratterizzazione di convessit e di semicontinuità attraverso l'epigrafico. Esempi di funzionali integrali: Cahn Hilliard (transizioni di fase), operatori di Nemytskii. Condizioni necessarie e sufficienti per la semicontinuit debole di funzionali integrali.

Soluzioni deboli di equazioni alle derivate parziali Problema di Poisson. Il problema a ostacolo. Il problema di Neumann e il problema di Dirichlet. Il principio di Dirichlet. Il problema di Dirichlet con il metodo di Perron (cenni). Teorema di regolarità interna H^2 e sue conseguenze.

Riferimenti bibliografici

[1] Brezis H.: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer.

[2] Evans C. e Gariepy R.: *Measure theory and fine properties of functions.* CRC Press 1992

[3] Kesavan S.: *Topics in functional analysis and applications*, Wiley Eastern 1989

[4] Kolmogorov A.N. e Fomin S.V. : *Elementi di teoria delle funzioni e analisi funzionale*, Editori Riuniti.

[5] Royden, H. L. : *Real analysis.* Macmillan Publishing Company, New York, 1988

[6] Salsa S.: *Equazioni a derivate parziali, Metodi, modelli e applicazioni*, Springer 2010.