Analisi Matematica I – Prova scritta del 12/09/2013 ☐

COGNOME: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| NOME: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

CANALE: ☐ A-H (Pinzari) ☐ l-Z (Garroni)

SPIEGAZIONI:
Svolgendo più esercizi oltre il minimo richiesto si può arrivare fino a un punteggio di 34/30.
Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio n. 1 – (10 punti) **Svolgere 2 dei seguenti esercizi**.

a) (5 punti) Se esistono, calcolare i limiti delle seguenti successioni complesse,

$$\left(\sqrt{n}\sin n,\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1}{k^2}\right) \qquad\qquad \left(\frac{1+i}{2(1-i)}\right)^n$$

b) (5 punti) Siano a_n e b_n due successioni reali tali che $\limsup a_n \in [0,+\infty)$ $\liminf b_n \in [0,+\infty)$. Dimostrare che

$$\limsup(a_n)\liminf(b_n) \le \limsup(a_nb_n) \le \limsup(a_n)\limsup(b_n).$$

c) (5 punti) i) Dimostrare che l'insieme delle successioni x_n che verificano la relazione lineare

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n,$$

con a, $b \in \mathbb{R}$, forma uno spazio vettoriale di dimensione 2. ii) Determinare condizioni su $r \in \mathbb{R}$ affinché $x_n = r^n$ sia soluzione. iii) Risolvere esplicitamente la relazione

$$\begin{cases} x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n \\ x_0 = 0, \quad x_1 = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Soluzione: a) Consideriamo prima la successione in $\mathbb{R}^2$, $P_n = (x_n, y_n) = \left(\sqrt{n}\sin n,\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1}{k^2}\right)$. La successione y_n ammette limite perchè è data dalle somme parziali di una serie assolutamente convergente, mentre la successione x_n non ammette limite perchè è il prodotto tra una successione divergente $\{n\}$ e una successione oscillante (la classe limite di $\sin n$ è tutto l'intervallo $[-1,1]$). In conclusione la successione P_n non ammette limite.

Per quanto riguarda la successione complessa, basta notare che il comportamento di una successione della forma z^n dipende dal modulo di z. In questo caso è facile calcolare il modulo di $\frac{i+1}{2(i-1)}$, che è pare a $\frac{1}{2}$. Quindi si ha che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+i}{2(1-i)}\right)^n = 0\,.$$

b) Denotiamo con $\Lambda_1 = \limsup(a_n)$, $\lambda_2 = \liminf(b_n)$ e $\Lambda_2 = \limsup(b_n)$. Per la prima disuguaglianza possiamo supporre che si abbia $\Lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$, altrimenti la disuguaglianza è banalmente verificata perchè ci sarebbe almeno una sottosuccessione per cui $a_{n_k}b_{n_k} \to 0$. A questo punto per $\varepsilon > 0$ (piccolo abbastanza) si ha che esiste $\bar{n}$ tale che

$$b_n \ge \lambda_2 - \varepsilon \qquad \forall n \ge \bar{n}$$

e esiste una sottosuccessione a_{n_k} che converge a Λ_2 e quindi esiste $\bar{k}$ tale che

$$a_{n_k} \ge \Lambda_1 - \varepsilon \qquad \forall k \ge \bar{k}\,.$$

Da questo si deduce che per k grande abbastanza si ha

$$a_{n_k}b_{n_k} \ge (\Lambda_1 - \varepsilon)(\lambda_2 - \varepsilon) = \Lambda_1\lambda_2 + \varepsilon(\varepsilon - \Lambda_1 - \lambda_2)\,.$$

In particolare si ha che

$$\limsup(b_na_n) \ge \Lambda_1\lambda_2 + \varepsilon(\varepsilon - \Lambda_1 - \lambda_2)$$

da cui si deduce la disuguaglianza cercata, grazie all'arbitrarietà di ε.

La seconda disuguaglianza segue facilmente una volta notato che il limsup è l'estremo inferiore dei definitivamente maggioranti. Quindi per ogni ε si ha che $\Lambda_1 + \varepsilon$ è un definitivamente maggiorante per a_n e $\Lambda_2 + \varepsilon$ è un definitivamente maggiorante per b_n, ossia

$$a_n \leq \Lambda_1 + \varepsilon \qquad b_n \leq \Lambda_2 + \varepsilon \qquad \text{definitivamente}\,.$$

Quindi si ha che definitivamente

$$a_n b_n \leq \Lambda_1\Lambda_2 + \varepsilon(\varepsilon - \Lambda_1 - \Lambda_2)\,,$$

da cui si deduce la tesi.
c) i) Supponiamo che x_n e y_n verifichino la condizione di ricorrenza

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n\,.$$

È facile controllare che, data la linearità della relazione di ricorrenza si ha che anche $z_n = \lambda x_n + \mu y_n$ verifica la stessa relazione, ossia l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale. È anche chiaro che una volta noti i due valori iniziali x_0 e x_1, la successione che verifica la condizione di ricorrenza è univocamente determinata. Questo mostra che bastano due successioni indipendenti (per esempio quella generata dalla condizione iniziale $(1, 0)$ e quella generata dalla condizione iniziale $(0, 1)$) per generare tutte le altre come loro combinazione lineare. Questo prova che questo spazio vettoriale ha dimensione 2.
ii) Imponendo alla successione della forma $x_n = r^n$ di verificare la condizione di ricorrenza, si deduce che questo succede solo se r è soluzione della seguente equazione

$$r^2 = ar + b\,.$$

iii) I passi precedenti suggeriscono di cercare soluzioni del tipo r^n e poi usarle per costruire tutte le altre. Questo è possibile se $r^2 - 3r + 2 = 0$, ossia se $r = 1$ oppure $r = 2$. Quindi la soluzione del problema sarà data da $x_n = \lambda 1^n + \mu 2^n$. Imponendo la condizione $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$ si ottiene $\lambda + \mu = 0$ e $\lambda + 2\mu = 1$ da questo si deduce che $x_n = 2^n - 1$.

Esercizio n. 2 – (5 punti) **Svolgere 1 dei seguenti esercizi**.

a) (5 punti) Stabilire, giustificando la risposta, se la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{x^2} + \sqrt{x}$$

è uniformemente continua in $(0, 1]$ e $[1, +\infty)$.

b) (5 punti) Studiare la convergenza del seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(x)}{x^2(e^x - 1)}dx\,.$$

Soluzione: a) Poichè $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ si ha che la funzione non è estendibile in modo continuo in 0 e quindi non è uniformemente continua in $(0, 1]$.

In $[1, +\infty)$ si ha invece che la funzione è uniformemente continua perchè è la somma di due funzioni lipschiztiane (questo può essere facilmente verificato mostrando che le derivate sono limitate in $[1, +\infty)$).
b) La funzione integranda in zero è asintoticamente equivalente a $1/x^{3/2}$ (infatti $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{e^x - 1} = 1$), e quindi non è integrabile in senso in proprio in 0. In conclusione l'integrale improprio in esame diverge, nonostante che il suo comportamento all'infinito sia buono. Se infatti avessi considerato l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin(x)}{x^2(e^x - 1)}dx$$

questo sarebbe stato convergente perchè $\left|\frac{\sqrt{x}\sin(x)}{x^2(e^x-1)}\right| \leq \frac{C}{x^2}$ per $x \geq 1$.

Esercizio n. 3 – (10 punti) **Svolgere 2 dei seguenti esercizi**.

a) (5 punti) Studiare la convergenza puntuale della serie di funzioni

$$\sum_1^{\infty} \frac{(2x)^n}{2n + x^2}$$

e determinare almeno un intervallo in cui la convergenza è uniforme.

b) (5 punti) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n(x+1)^n}{n-\sqrt{n}}$$

d) (5 punti) Prolungare per periodicità la funzione $f(x) = x^4$, $x \in (-\pi, \pi]$, scriverne lo sviluppo di Fourier e calcolarlo per $x = \pi$.

Soluzione: Se $|2x| > 1$ si ha che $\left|\frac{(2x)^n}{2n+x^2}\right| \to +\infty$ è quindi la serie non converge. Se $2x = 1$ la serie è equivalente alla serie armonica e quindi diverge, mentre per $2x = -1$ la serie è a segni alterni e converge grazie al criterio di Leibniz. Infine se $|2x| < 1$ si ha

$$\left|\frac{(2x)^n}{2n+x^2}\right| \leq \frac{|2x|^n}{n}$$

e quindi per confronto con la serie di potenze $\sum \frac{|2x|^n}{n}$ si deduce la convergenza puntuale.

Infine, sempre confrontando con la serie di potenze si vede facilmente che per $|2x| < \rho < 1$ si ha convergenza totale e quindi uniforme.

In conclusione si ha convergenza puntuale in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, mentre si ha convergenza uniforme in insiemi del tipo $[-\rho, \rho]$, per $\rho < \frac{1}{2}$.

b) Cambiando variabile $y = 2(x+1)$ si ottiene la serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{y^n}{n-\sqrt{n}}$$

che ha raggio di convergenza 1. Inoltre per $y = 1$ la serie diverge, mentre per $y = -1$ la serie è a segni alterni con coefficienti $\frac{1}{n-\sqrt{n}}$ infinitesimi e decrescenti (infatti $f(x) = x - \sqrt{x}$ è crescente in $[\frac{1}{4}, +\infty)$), quindi grazie al criterio di Leibniz è convergente. Usando quindi il teorema di Abel si deduce che la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{y^n}{n-\sqrt{n}}$ converge puntualmente in $[-1, 1)$, totalmente in insieme del tipo $[-\rho, \rho]$ con $\rho < 1$ e uniformemente in $[-1, \rho]$. Si ha quindi che la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n(x+1)^n}{n-\sqrt{n}}$ converge puntualmente in $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, totalmente in insieme del tipo $[-\frac{3}{2}+\varepsilon, -\frac{1}{2}-\varepsilon]$ e uniformemente in $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}-\varepsilon]$, con $\varepsilon > 0$.

c) Poichè la funzione è pari la sua serie di Fourier sarà costituita dai termini con il coseno. Calcolando quindi il coefficiente

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2}{5}\pi^4$$

e, integrando varie volte per parti, i coefficienti

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \cos(nx) dx = \left(\frac{8}{n^2}\pi^2 - \frac{48}{n^4}\right)$$

si ottiene che la serie di Fourier cercata è

$$\frac{1}{5}\pi^4 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{8}{n^2}\pi^2 - \frac{48}{n^4}\right) \cos(nx) \,.$$

Ora calcolandola in $x = \pi$ e usando che in questo punto la serie di Fourier converge a π^4 si ottiene

$$\frac{1}{5}\pi^4 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{8}{n^2}\pi^2 - \frac{48}{n^4}\right) = \pi^4 \,.$$

Esercizio n. 4 – (5 punti) **Svolgere 1 dei seguenti esercizi**.

a) (5 punti) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale,

$$y' = \frac{e^{x-y}}{1+e^x}$$

specificando un dominio massimale.

b) (5 punti) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y' + y = \sin(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

Soluzione: a) L'equazione è a variabili separabili e si integra facilmente ottenendo

$$y(x) = \log(\log(1 + e^x) + C) \qquad C \in \mathbb{R}\,.$$

Per determinare il dominio massimale di esistenza delle soluzioni è utile riscrivere l'integrale generale nella forma

$$y(x) = \log(\log(1 + e^x) + \log c) \qquad c > 0$$

da cui deduciamo che le soluzioni sono ben definite se $e^x > c - 1$. Quindi per le soluzioni per cui $c \in (0, 1]$ l'intervallo massimale di esistenza è tutto $\mathbb{R}$ (perchè la disuguaglianza riportata sopra è sempre verificata). Nel caso in cui $c \in (1, +\infty)$ le soluzioni sono ben definite in $(\log(c-1), +\infty)$ che, essendo connesso, è anche l'insieme massimale di esistenza della soluzione dell'equazione differenziale.
b) L'equazione differenziale del secondo ordine è lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ che ha soluzioni complesse coniugate $-\frac{1}{2} \pm i\sqrt{3}$. Da questo si deduce che l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x) \right)\,.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare della forma $\bar{y}(x) = A \cos x + B \sin x$ e otteniamo $\bar{y}(x) = -\cos x$. Quindi l'integrale generale dell'equazione è

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x) \right) - \cos x\,.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene che la soluzione è

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(\cos(\sqrt{3}x) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}x) \right) + \cos x\,.$$