Analisi Matematica I – Prova scritta del 15/07/2013 ☐

COGNOME: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_| NOME: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

CANALE: ☐ A-H (Pinzari) ☐ l-Z (Garroni)

SPIEGAZIONI:
Svolgendo più esercizi oltre il minimo richiesto si può arrivare fino a un punteggio di 34/30.
Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio n. 1 – (10 punti) **Svolgere 2 dei seguenti esercizi**.

a) (5 punti) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\arctan n, n^2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}+ni}{n+\sqrt{n}i}\,.$$

b) (5 punti) Stabilire se la seguente serie complessa è convergente

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{n+3}\,.$$

c) (5 punti) Stabilire il comportamento della seguente successione per ricorrenza al variare di $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_n=\frac{1}{3}x_{n-1}+2\\ x_0=\lambda\,. \end{cases} \tag{1}$$

d) (5 punti) Date due successioni reali x_n e y_n. Provare che

$$\liminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)\geq\liminf_{n\to\infty}x_n+\liminf_{n\to\infty}y_n\,.$$

Mostrare con un esempio che la disuguaglianza può essere stretta.

Soluzione: a) Si ha che $\lim_{n\to+\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2}$ mentre, poichè $\lim_{n\to+\infty}n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$, si ha che $\lim_{n\to+\infty}n^2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)=+\infty$. Quindi il limite di $\left(\arctan n, n^2\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ non esiste finito.

Per quanto riguarda il limite di $\frac{\sin\frac{1}{n}+ni}{n+\sqrt{n}i}$, è facile vedere che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{n+\sqrt{n}i}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{n}=0\,.$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}+ni}{n+\sqrt{n}i}=\lim_{n\to+\infty}\frac{ni}{n+\sqrt{n}i}=i\,.$$

b) La serie non converge assolutamente, perchè la serie dei moduli è la serie armonica. Si vede invece che la serie converge semplicemente. Si può usare il criterio di Leibniz generalizzato alle serie complesse che garantisce la convergenza semplice. Infatti si riconosce facilmente che

$$\sum_{n=0}^{N}i^n\in\{1,1+i,i,0\}$$

e quindi è limitato, mentre $\frac{1}{n+3}$ è decrescente infinitesima. Alternativamente bastava riconoscere che

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n+3}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+3}+i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)+3}$$

e applicando il criterio di Leibniz alla parte reale a alla parte immaginaria di questa serie, dedurre la convergenza semplice della serie complessa.

c) La successione è definita per ricorrenza tramite la funzione affine crescente $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$. Il punto fisso di questa funzione è $x = 3$. È facile quindi vedere che se $\lambda > 3$, allora $\lambda > f(\lambda)$ e quindi la successione corrispondente decrescente. Inoltre si prova per induzione che in questo caso $x_n > 3$ per ogni n e quindi la successione converge al punto fisso $x = 3$. Analogamente si mostra che se $\lambda < 3$ la successione è crescente e converge a $x = 3$. Se $\lambda = 3$, la successione è costante.
d) Per definizione il limino è l'estremo superiore dei definitivamente maggioranti. Quindi per ogni $l_1 < \lim_{n\to+\infty} x_n$ e $l_2 < \lim_{n\to+\infty} y_n$ si ha che esistono $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tali che

$$x_n > l_1 \quad \forall\, n \geq n_1 \qquad \text{e} \qquad y_n > l_2 \quad \forall\, n \geq n_2 \,.$$

In particolare

$$x_n + y_n > l_1 + l_2 \quad \forall\, n \geq \max\{n_1, n_2\} \,.$$

Da questo si deduce quindi che

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n + y_n > l_1 + l_2$$

e quindi la tesi.

Esercizio n. 2 – (5 punti) **Svolgere 1 dei seguenti esercizi**.

a) (5 punti) Stabilire, giustificando la risposta, se la seguente funzione

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

è uniformemente continua in $(-\infty, -1]$, $(0, 1]$ e $[1, +\infty)$.

b) (5 punti) Studiare la convergenza semplice e assoluta del seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx \,.$$

Soluzione: a) Poichè

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} = +\infty \,,$$

la funzione non è sublineare a $-\infty$ e quindi non può essere uniformante continua in $(-\infty, -1]$, essendo la sublinearità una condizione necessaria per l'uniforma continuità.

Inoltre poichè

$$\lim_{x\to0^+} \frac{e^{-x}}{x} = +\infty \,,$$

la funzione non è uniformante continua in $(0, 1]$ perchè non può essere estesa per continuità in 0.

Infine poichè

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0 \,,$$

la funzione è uniformante continua in $[1, +\infty)$, perchè ivi continua a asintotica a una costante.
b) La funzione integrando verifica

$$\left|\frac{\cos x}{x^2+1}\right| \leq \frac{1}{x^2+1} \,.$$

In particolare è limitata e l'integrale in esame è assolutamente convergente (e quindi anche semplicemente), perchè la funzione $\frac{1}{x^2+1}$ è integrabile in senso improprio.

Esercizio n. 3 – (10 punti) **Svolgere 2 dei seguenti esercizi**.

a) (5 punti) Stuadiare la convergenza puntuale della successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx^2+1}{nx+1}$$

in $[0, +\infty)$ e determinare almeno un intervallo in cui la convergenza è uniforme.

b) (5 punti) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n x^n}{n^3 + \sqrt{n}}$$

c) (5 punti) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{1}^{\infty} x e^{-nx^2}$$

in $[0, +\infty)$.

d) (5 punti) Data una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, 2π-periodica, determinare la relazione che intercorre tra i coefficienti di Fourier di f e f'',

$$\hat{f}(k) \qquad \hat{f''}(k)\,.$$

Soluzione: a) La successione converge puntualmente a $f(x) = x$ per ogni $x \in (0, +\infty)$, mentre è costantemente uguale a 1 se $x = 0$. Già da questo capiamo che non ci può essere convergenza uniforme in $[0, +\infty)$ perchè il limite non è continuo in 0 mentre gli elementi della successione lo sono. Se ora consideriamo la funzione

$$g_n(x) = \frac{nx^2 + 1}{nx + 1} - x = \frac{1 - x}{nx + 1}\,,$$

si vede facilmente che questa è decrescente e quindi, per ogni $a \in (0, +\infty)$

$$\sup_{[a,+\infty)} g_n(x) = \max_{[a,+\infty)} g_n(x) = g_n(a) \qquad \text{e} \qquad \inf_{(0,+\infty)} g_n(x) = \lim_{x\to+\infty} g_n(x) = -\frac{1}{n}\,.$$

Quindi

$$d_n = \sup_{[a,+\infty)} \left| \frac{nx^2 + 1}{nx + 1} - x \right| = \max\{|g_n(a)|, \frac{1}{n}\} \to 0$$

(disegnare un grafico qualitativo di $g_n(x)$ e di $|g_n(x)|$ per convincersi che quest'ultima identità è vera). Da questo deduciamo che si ha convergenza uniforme in tutti gli insieme del tipo $[a, +\infty)$, con $a > 0$.

b) Effettuando il cambio di coordinate $y = 3x$ si ottiene una serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n^3 + \sqrt{n}}$$

che ha raggio di convergenza 1. Inoltre, poichè per $|y| \le 1$ (e quindi $x \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$)

$$\left| \frac{y^n}{n^3 + \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{3^n x^n}{n^3 + \sqrt{n}} \right| \le \frac{1}{n^3}\,.$$

Poichè la serie $\sum_n \frac{1}{n^3}$ è convergente, si ha che la serie di partenza converge totalmente (e quindi uniformemente) in $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.

c) Per $x = 0$ la serie è chiaramente convergente. Se invece $x > 0$, basta osservare che

$$\sum_{1}^{\infty} x e^{-nx^2} = x \sum_{1}^{\infty} (e^{-x^2})^n\,,$$

e quindi, avendola riscritta come una serie geometrica, ne sappiamo calcolare la somma

$$\sum_{1}^{\infty} x e^{-nx^2} = \frac{x}{1 - e^{-x^2}}\,.$$

In altre parole la serie, di funzioni continue, converge puntualmente in $[0, +\infty)$ alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ x = 0 \\ \frac{x}{1 - e^{-x^2}} & \text{se } \ x > 0 \end{cases}\,.$$

Non essendo questa una funzione continua in 0 (in quanto $f(x) \sim \frac{1}{x}$ vicino a 0) si deduce che non si può avere in $[0, +\infty)$ convergenza uniforme e quindi neanche totale.
d) Per definizione

$$\hat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \,.$$

Integrando per parti due volte si deduce che

$$\hat{f}(k) = -ik \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = -k^2 \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) e^{-ikx} dx = -k^2 \hat{f}''(k) \,.$$

Esercizio n. 4 – (5 punti) **Svolgere 1 dei seguenti esercizi**.

a) (5 punti) Mostrare che ogni soluzione dell'equazione

$$x^3 y' + 2x^2 y = 1$$

nell'intervallo $(0, +\infty)$ tende a 0 per $x \to +\infty$

b) (5 punti) Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - y = xe^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \,. \end{cases}$$

Soluzione: a) Poichè $x \neq 0$, possiamo dividere per x^3 e ottenere

$$y' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x^3} \,.$$

Questa è un'equazione lineare che si integra facilmente usando la formula. Infatti una primitiva del coefficiente $\frac{2}{x}$ è $2 \log x$ e quindi moltiplicando l'equazione per $e^{2 \log x} = x^2$ si ottiene

$$(x^2 y(x))' = \frac{1}{x}$$

e quindi le funzioni del tipo

$$y(x) = \frac{\log x}{x^2} + \frac{C}{x^2} \qquad C \in \mathbb{R}$$

sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione in $(0, +\infty)$. È facile vedere che queste tendono a zero per x che tende a $+\infty$.
b) L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è $\lambda^2 - 1 = 0$, da cui si deduce che l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \qquad C_1 \,,\ C_2 \in \mathbb{R} \,.$$

Per determinare una soluzione particolare, poichè e^x è soluzione dell'equazione omogenea, basta cercarla della forma $\bar{y}(x) = (ax^2 + bx)e^x$. Imponendo che questa sia soluzione si ottiene $\bar{y}(x) = (\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x)e^x$ e quindi l'integrale generale dell'equazione non omogenea è

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{4} x^2 e^x - \frac{1}{4} x e^x \qquad C_1 \,,\ C_2 \in \mathbb{R} \,.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene la soluzione del problema di Cauchy

$$y(x) = \frac{1}{8} e^x - \frac{1}{8} e^{-x} + \frac{1}{4} x^2 e^x - \frac{1}{4} x e^x \,.$$