Analisi Matematica I – Prova scritta del 17/06/2013 ☐

COGNOME: ⌊_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_⌋ NOME: ⌊_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_⌋

CANALE: ☐ A-H (Pinzari) ☐ l-Z (Garroni)

PROVA ORALE: ☐ questo appello ☐ prossimo appello

SPIEGAZIONI:
Svolgendo più esercizi oltre il minimo richiesto si può arrivare fino a un punteggio di 34/30.
Un esercizio si considera risolto se le risposte sono corrette e sono giustificate in maniera chiara e completa.

Esercizio n. 1 – (10 punti) **Svolgere 2 dei seguenti esercizi**.

a) (5 punti) Stabilire se esiste il limite della seguente successione complessa, ed eventualmente calcolarlo

$$z_n = n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + i(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1)\sin(n)\,.$$

b) (5 punti) Data la successione reale a_n, mostrare che

$$\liminf_{n\to+\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to+\infty} a_n\,.$$

c) (5 punti) Dato l'insieme

$$E = \{x \in \mathbb{R}:\ \log(x^2-2) > 0\} \cup \{(-1)^n\frac{n+1}{2n}\}\,.$$

Determinare l'insieme E' dei punti di accumulazione, la chiusura $\bar{E}$, l'interno $\mathring{E}$ e la frontiera ∂E di E.

d) (5 punti) Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\,.$$

Dire, giustificando la risposta, se la somma della serie varia riordinando i termini.

Soluzione: a) Si può stabilire la convergenza della successione complessa z_n studiando la convergenza della parte reale e della parte immaginaria. Si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} Re(z_n) = \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = +\infty\,,$$

mentre

$$\lim_{n\to+\infty} Im(z_n) = \lim_{n\to+\infty}(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1)\sin(n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin(n) = 0\,.$$

In conclusione la successione complessa z_n non converge perchè la sua parte reale diverge.

b) Sappiamo che $\lambda = \liminf(-a_n)$ se e solo se

i) Per ogni $l < \lambda$ si ha che $-a_n > l$ definitivamente;

ii) Esiste una sottosuccessione $-a_{n_k}$ convergente a λ.

Ma questo è evidentemente equivalente a

i') Per ogni $l > -\lambda$ si ha che $a_n < -l$ definitivamente;

ii') Esiste una sottosuccessione a_{n_k} convergente a $-\lambda$,

il che equivale a dire che $-\lambda = \limsup a_n$.

c) Osserviamo che

$$\log(x^2-2) > 0 \iff x^2-2 > 1 \iff x < -\sqrt{3} \text{ e } x > \sqrt{3}\,.$$

Quindi $E=(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)\cup\{(-1)^n\frac{n+1}{2n}\}$. Poichè la successione $\{(-1)^n\frac{n+1}{2n}\}$ ha due punti di accumulazione, $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$, si vede facilmente che

$$E'=(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)\cup\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}\quad \bar{E}=(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)\cup\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}\cup\{(-1)^n\frac{n+1}{2n}\}$$

$$\mathring{E}=(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)\quad \partial E=\{-\sqrt{3},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3}\}\cup\{(-1)^n\frac{n+1}{2n}\}\,.$$

d) La serie non converge assolutamente perchè $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, mentre converge semplicemente grazie al criterio di Leibniz. Quindi, grazie al teorema di Riemann sui riordinamenti, possiamo concludere che riordinando i termini della serie possiamo far convergere la serie a qualsiasi valore reale.

Esercizio n. 2 – (5 punti) **Svolgere 1 dei seguenti esercizi**.

a) (5 punti) Stabilire se la funzione

$$f(x)=-x\log x$$

è uniformemente continua in $(0,1]$ e in $[1,+\infty)$.

b) (5 punti) Studiare, al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$, la convergenza del seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^\alpha}\,dx$$

Soluzione: a) Poichè

$$\lim_{x\to 0}-x\log x=0$$

si deduce che la funzione f può essere estesa per continuità in $[0,1]$ e quindi per il teorema di Heine-Cantor è uniformemente continua in $(0,1]$.

Per quanto riguarda l'uniforme contuità in $[1,+\infty)$ osserviamo che la funzione non è sublineare, ossia non possiamo trovare $A,B\in\mathbb{R}$ tale che $|f(x)|\le A|x|+B$ e quindi non può essere uniformemente continua in $[1,+\infty)$, perchè la sublinearità è una condizione necessaria per l'uniforme continuità.

b) La funzione $\arctan x/x^\alpha$ è asintoticamente equivalente a $1/x^{\alpha-1}$ in 0, quindi l'integrale

$$\int_0^1\frac{\arctan x}{x^\alpha}\,dx$$

è convergente per $\alpha-1<1$, ossia per $\alpha<2$. D'altra parte $\arctan x/x^\alpha$ è asintoticamente equivalente a $1/x^\alpha$ per x che tende a $+\infty$ e quindi l'integrale

$$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^\alpha}\,dx$$

è convergente per $\alpha>1$. In conclusione l'integrale converge per $1<\alpha<2$.

Esercizio n. 3 – (10 punti) **Svolgere 2 dei seguenti esercizi**.

a) (5 punti) Data la successione di funzioni:

$$f_n(x)=\frac{1}{1+nx^2}$$

studiare la convergenza puntuale nel suo dominio e determinare almeno un intervallo in cui la convergenza è uniforme.

b) (5 punti) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della seguente serie di potenze:

$$\sum_0^\infty\frac{(x-2)^n}{n^3+1}.$$

c) (5 punti) Studiare la convergenza puntuale della serie di funzioni

$$\sum_0^\infty\frac{e^{-nx}}{n+1}$$

e determinare almeno un intervallo in cui converge totalmente.

d) (5 punti) Data la funzione $f(x)$ definita in $[0,\pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$$

considerare la sua estensione a una funzione pari nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ e quindi estenderla per periodicità a una funzione 2π periodica. Scrivere la serie di Fourier di questa estensione e calcolarne la somma in $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

Soluzione: a) La successione converge puntualmente alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0\,. \end{cases}$$

Poichè le funzione f_n sono continue in $\mathbb{R}$ e f non lo è in 0, non ci potrà essere convergenza uniforme negli insiemi che contengono l'origine (in particolare in $\mathbb{R}$). Però la funzioni è pari e decrescente in $(0,+\infty)$, quindi se $a > 0$

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} f_n(x) = \frac{1}{1+na^2} \to 0 \qquad \text{per } n \to +\infty\,.$$

Da questo deduciamo che la successione converge uniformemente in tutti gli insiemi del tipo $(-\infty,-a] \cap [a,+\infty)$, con $a > 0$.

b) Ponendo $y = x - 2$ si ottiene la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n^3+1}$$

che ha raggio di convergenza $R = 1$. Inoltre la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^3+1}$$

converge assolutamente. Quindi la serie di potenze di partenza converge totalmente e quindi uniformemente in $[1,3]$.

c) Anche questa serie si può ridurre a una serie di potenze ponendo $y = e^{-x}$. La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n+1}$$

ha raggio 1, quindi converge puntualmente in $(-1,1)$ e divere in $y = 1$. Inoltre converge totalmente e quindi uniformemente in $[-a,a]$, per $a < 1$. Tornando alla variabile x si ha quindi che la serie converge puntualmente solo per $x > 0$, per cui si ha che $e^{-x} < 1$ e si ha convergenza totale e quindi uniforme in $[b,+\infty)$, con $b > 0$.

d) L'estensione pari della funzione è data da

$$f(x) = \begin{cases} |x| & |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |x| \le \pi\,. \end{cases}$$

Essendo una funzione pari si avrà che i coefficienti di Fourier di $\sin(nx)$ sono nulle e quindi basta calcolare

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |x|\,dx = \frac{\pi}{8}$$

e

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |x|\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cos(nx)\,dx = \sin(n\frac{\pi}{2})\frac{1}{n} - \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\,.$$

Poichè la funzione f è C^1 a tratti e continua in $x = 0$ si ha che la serie per $x = 0$ converge a $f(0) = 0$, ossia

$$\frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\sin(n\frac{\pi}{2})\frac{1}{n} - \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\right) = 0$$

mentre poichè in $x = \pi/2$ la funzione è discontinua si ha che la serie di Fourier in $x = \pi/2$ converge alla metà del salto, ossia

$$\frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sin(n\frac{\pi}{2})\frac{1}{n} - \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\right)\cos(n\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}\,.$$

Esercizio n. 4 – (5 punti) **Svolgere 1 dei seguenti esercizi.**

a) (5 punti) Trovare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

b) (5 punti) Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y = x + \sin(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

Soluzione: a) Moltiplicando l'equazione per e^{x^2} si ottiene

$$(ye^{x^2})' = x\,.$$

Da cui integrando si ottiene l'integrale generale

$$y(x) = \frac{x^2}{2}e^{-x^2} + Ce^{-x^2}\,.$$

b) L'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea è $\lambda^2 - 4 = 0$ e quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}\,.$$

Si può trovare la soluzione particolare usando il principio di sovrapposizione cercando una soluzione $y_1(x) = Ax$ e $y_2(x) = B\cos x + C\sin x$. Imponendo che $y_1(x) + y_2(x)$ sia soluzione si ottiene la soluzione particolare $\bar{y}(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{5}\sin x$, quindi l'integrale generale è

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{5}\sin x\,.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene la soluzione del problema di Cauchy

$$y(x) = \frac{29}{80}e^{2x} - \frac{29}{80}e^{-2x} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{5}\sin x\,.$$