TUTORAGGIO DI ANALISI MATEMATICA I
23 V 2013

(1) Calcolare il raggio di convergenza e la somma delle seguenti serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{2n+1},$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+1)2^{n+1}x^n,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n}x^{4n-1},$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(1+2^n)x^{3n},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+a)^{n+1}-1-a^{n+1}}{n(n+1)}x^n,\ a>0.$$

(2) Sia f il prolungamento 2π-periodico su $\mathbb{R}$ della funzione

$$g(x)=\begin{cases}0 & \text{se } -\pi<x\leq 0\\ x & \text{se } 0<x\leq\pi.\end{cases}$$

Usare lo sviluppo in serie di Fourier di f per dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

(3) Sia f il prolungamento 2π-periodico su $\mathbb{R}$ della funzione

$$g(x)=\begin{cases}-1 & \text{se } -\pi<x\leq 0\\ 1 & \text{se } 0<x\leq\pi.\end{cases}$$

Usare lo sviluppo in serie di Fourier di f per dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}=\frac{\pi}{4}.$$

(4) Sia f il prolungamento 2π-periodico su $\mathbb{R}$ della funzione

$$g(x)=\begin{cases}0 & \text{se } -\pi\leq x<-\frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2}+x & \text{se } -\frac{\pi}{2}\leq x<0\\ \frac{\pi}{2}-x & \text{se } 0\leq x<\frac{\pi}{2}\\ 0 & \text{se } \frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi.\end{cases}$$

Determinare i coefficienti della serie di Fourier di f.

(5) Sia f il prolungamento 2π-periodico su $\mathbb{R}$ della funzione

$$g(x) = \begin{cases} -(x-\pi)^2 & \text{se } -\pi \le x \le -\dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } -\dfrac{\pi}{2} \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ (x-\pi)^2 & \text{se } \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

Determinare i coefficienti della serie di Fourier di f.

(6) Sia f il prolungamento 2π-periodico su $\mathbb{R}$ della funzione

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x \le 0 \\ \sin x & \text{se } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Determinare i coefficienti della serie di Fourier di f.

(7) Sia f il prolungamento 2π-periodico su $\mathbb{R}$ della funzione

$$g(x) = |\cos x| \quad \forall x \in]-\pi, \pi[.$$

Usare lo sviluppo in serie di Fourier di f per dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Osservazione. *Se f è una funzione periodica di periodo T, la serie di Fourier di f è data da*

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\omega x) + B_n \sin(n\omega x))$$

dove $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e i coefficienti di Fourier di f sono definiti da

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(n\omega x)\, \mathrm{d}x$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(n\omega x)\, \mathrm{d}x.$$

(8) Sia f il prolungamento periodico di periodo $T = 6$ della funzione

$$g(x) = |x| \quad \forall x \in [-3, 3].$$

Usare lo sviluppo in serie di Fourier di f per dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$