Esercitazione di Analisi Matematica I
Esercizi e soluzioni
19/04/2013

TOPOLOGIA

1. Mostrare che uno spazio infinito con la metrica discreta non può essere compatto.
   Soluzione: Per la metrica discreta $d : X \times X \to [0, +\infty)$, definita da
   $$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq y \\ 1 & \text{se } x = y\,, \end{cases}$$
   le sole successioni convergenti sono quelle costanti. Se X è infinito è possibile costruire una successione di X con elementi tutti distinti. È chiaro quindi che da questa successione non si può estrarre alcuna sottosuccessione convergente.

2. Dati $A, B \supset X$ con X spazio metrico. Provare che
   $$\mathring{A} \cap \mathring{B} = (A \overset{\circ}{\cap} B)\ .$$
   È ancora vero con l'unione? Eventualmente fornire un controesempio.

   Soluzione: Mostriamo prima che $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subseteq (A \overset{\circ}{\cap} B)$.

   Preso $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$, si ha che $x \in \mathring{A}$ e $x \in \mathring{B}$, ossia x è interno a A ed è interno a B. Quindi esistono due raggi r_1 e r_2 tali che
   $$B(x, r_1) \subseteq A \qquad \text{e} \qquad B(x, r_2) \subseteq B\,.$$
   Quindi posto $r = \min\{r_1, r_2\}$, si ha che $B(x, r) \subseteq A \cap B$, ossia x è interno a $A \cap B$ ($x \in (A \overset{\circ}{\cap} B)$). Viceversa se x è interno a $A \cap B$ esiste un intorno $B(x, r)$ tale che $B(x, r) \subseteq A \cap B$ e quindi $B(x, r) \subseteq A$ e $B(x, r) \subseteq B$. Per l'unione non è vero. Un contro esempio è $A = [1, 2] \subset \mathbb{R}$ e $B = [2, 4] \subset \mathbb{R}$. Allora $(A \overset{\circ}{\cup} B) = (1, 4)$, mentre $\mathring{A} \cup \mathring{B} = (1, 4) \setminus \{2\}$.

SUCCESSIONI

1. Calcolare, se esiste, il seguente limite
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{1 + z^n}$$
   per $z = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$ e $z = 3 + 2i$.
   Soluzione: Osserviamo che se $|z| < 1$ allora $z^n \to 0$, mentre se $|z| > 1$ allora $1/z^n \to 0$. Allora nel primo caso $|\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i| < 1$ e quindi, usando le operazioni tra i limiti, si ha che
   $$\lim_{n\to 0} \frac{z^n}{1 + z^n} = 0\,.$$
   Nel secondo caso invece $|3 + 2i| > 1$ e quindi
   $$\lim_{n\to 0} \frac{z^n}{1 + z^n} = \lim_{n\to 0} \frac{1}{\frac{1}{z^n} + 1} = 1\,.$$

2. Data la successione

$$P_n = \left(\frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2+3}}, \operatorname{arctg} n^2 \sin(n\frac{\pi}{2}) \right) \qquad n \in \mathbb{N}\,,$$

determinarne la classe limite.

Soluzione: Denotiamo $P_n = (x_n, y_n)$. È facile vedere che

$$\lim_{k\to+\infty} x_{2k} = 1 \qquad \lim_{k\to+\infty} x_{2k+1} = -1\,.$$

Ora $\sin(2k\frac{\pi}{2}) = 0$ e quindi $y_{2k} = 0$.

Mentre si ha che $\sin((2k+1)\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k$ e quindi $y_{2k+1} = (-1)^k \operatorname{arctg}(2k+1)^2$ ammette due sottosuccessioni convergenti, una a $\frac{\pi}{2}$ e l'altra a $-\frac{\pi}{2}$.

La classe limite è quindi l'insieme

$$\{(1,0), (-1, \frac{\pi}{2}), (-1, -\frac{\pi}{2})\}\,.$$

3. Date due successioni reali x_n e y_n. Provare che

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n\,.$$

Mostrare con un esempio che la disuguaglianza può essere stretta. Provare che se esiste $\lim_{n\to\infty} x_n$, allora

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n\,.$$

Soluzione: Questo esercizio è stato svolto in classe in modo, direi, confuso. Questa è una versione più efficiente.

Chiamiamo $l_1 = \limsup_{n\to\infty} x_n$ e $l_2 = \limsup_{n\to\infty} y_n$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una soglia $\bar{n}$ tali che

$$x_n \leq l_1 + \varepsilon \qquad y_n \leq l_2 + \varepsilon \qquad \forall\, n \geq \bar{n}\,.$$

Quindi

$$x_n + y_n \leq l_1 + l_2 + 2\varepsilon \qquad n \geq \bar{n}\,.$$

Da cui si deduce che

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq l_1 + l_2 + 2\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0\,.$$

Si conclude per l'arbitrarietà di ε.

Un esempio in cui vale la disuguaglianza stretta è $x_n = (-1)^n$ e $y_n = (-1)^{n+1}$, per cui si ha

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0 < 2 = \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n\,.$$

Ora se esiste il $\lim_{n\to\infty} x_n$, applicando la disguaglianza appena dimostrata a $y_n = (y_n + x_n) + (-x_n)$ e osservando che $\limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\lim_{n\to\infty} x_n$, si ha

$$\limsup_{n\to\infty} y_n \leq \limsup_{n\to\infty} y_n + x_n - \lim_{n\to\infty} x_n\,.$$

Da cui si deduce l'uguaglianza cercata.

4. Studiare la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{x_n + 3} \\ x_0 = 0\,. \end{cases}$$

Soluzione: La successione è definita dalla funzione $f(x) = \sqrt{x+3}$. La funzione f è definita in $[-3, +\infty)$, è monotona crescente, concava e vale 0 in -3, quindi è facile vedere che ha un unico punto fisso che denotiamo con $\bar{x}$, $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Si puo' facilmente calcolare $\bar{x} = (1 + \sqrt{13})/2$. Poiché f è monotona crescente e $0 = x_0 \leq x_1 = \sqrt{3}$, si vede facilmente per induzione che x_n è crescente. Inoltre sempre per induzione si dimostra che $x_n \leq \bar{x}$ e quindi x_n è convergente all'unico punto fisso $\bar{x}$.

SERIE

1. Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ per cui converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2z+i)^n}{n^2-5}\,.$$

Soluzione: Definiamo $w = 2z + i$. La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w^n}{n^2-5}$$

è una serie di potenze con raggio di convergenza 1 (si calcola facilmente con il criterio della radice). Inoltre se $|w| = 1$ la serie converge assolutamente e quindi l'insieme di convergenza è $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |2z+i| \leq 1\}$, ossia il cerchio chiuso di centro $-i/2$ e raggio $1/2$.

2. Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\pi) \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^\alpha}\,.$$

Soluzione: Osserviamo che $\cos(n\pi) = (-1)^n$ e quindi la serie e una serie a segni alterni. Osserviamo inoltre che il termine generico della serie si può riscrivere della forma

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^\alpha} = \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})n^\alpha} = f(n)$$

e quindi è asintoticamente equivalente a

$$\frac{1}{n^{\alpha + \frac{1}{2}}}\,.$$

In particolare a_n è infinitesimo solo se $\alpha > -\frac{1}{2}$. Se $\alpha + \frac{1}{2} > 1$ si ha che la serie è asintoticamente equivalente a una serie armonica generalizzata convergente e quindi converge assolutamete. Per $-\frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{1}{2}$ si vede che a_n è infinitesimo e (facendo la derivata della funzione f) che è definitivamente decrescente quindi per il criterio di Leibniz la serie è convergente semplicemente ma non assolutamente.

Soluzione: Definiamo $w = 2z + i$. La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w^n}{n^2 - 5}$$

è una serie di potenze con raggio di convergenza 1 (si calcola facilmente con il criterio della radice). Inoltre se $|w| = 1$ la serie converge assolutamente e quindi l'insieme di convergenza è $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |2z+i| \leq 1\}$, ossia il cerchio chiuso di centro $-i/2$ e raggio $1/2$.

3. Determinare le somme di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\rho^n - \rho^{3n}) \qquad \rho \in [0, 1)\,.$$

Soluzione: Se $\rho \in [0, 1)$ la serie è data dalla somma di due serie geometriche convergenti, quindi la serie della somma è convergente ed è la somma delle due serie. Conoscendo la somma della serie geometrica si ha quindi che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\rho^n - \rho^{3n}) = \frac{1}{1-\rho} - \frac{1}{1-\rho^3}\,.$$

4. Scrivere il prodotto di Cauchy delle due serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}$. Dire se converge, giustificando la risposta. Eventualmente individuarne la somma.

Soluzione: Si tratta solo di sapere la definizione. Il prodotto di Cauchy è

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} 3^{-n+k}\,.$$

Poiché le due serie convergono assolutamente, per il teorema di Mertens, la somma del prodotto è il prodotto delle somme, quindi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} 3^{-n+k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} \right) = 2\frac{3}{2} = 3\,.$$

CONTINUITÀ E INTEGRALI IMPROPRI

1. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(x, y) = (x + y, x - y)$. Provare che f è continua in $\mathbb{R}^2$. È unifermemente continua in $\mathbb{R}^2$? (giustificare la risposta).

Soluzione: La funzione f è lineare e infatti si può scrivere usando la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

come

$$f(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\,.$$

Quindi si ha che

$$\|f(x, y) - f(x_0, y_0)\| \leq \|A\| \|(x, y) - (x_0, y_0)\| = 2\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\,.$$

Allora f è Lipschitziana in $\mathbb{R}^2$ e quindi uniformemente continua in $\mathbb{R}^2$ e in particolare continua.

2. Stabilire, giustificando la risposta, se la funzione $f(x) = (\cos x)^2$ è uniformemente continua in $\mathbb{R}$.

   Soluzione: In questo caso si può usare il fatto che la funzione è Lipschitziana di costante 2 in $\mathbb{R}$ e quindi uniformemente continua. Il risultato però vale per tutte le funzioni periodiche e continue. Infatti se una funzione è periodica di periodo T e continua in $\mathbb{R}$. In particolare è continua in $[-T, T]$ e quindi uniformemente continua in $[-T, T]$ (grazie al teorema di Heine-Cantor). Quindi $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $x, y \in [-T, T]$ con $|x - y| \leq \delta$ allora $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Per la periodicità di f, se prendiamo in generale $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $|x - y| \leq \delta$, allora esistono sempre $x_0, y_0 \in [-T, T]$ tali che $f(x_0) = f(x)$ e $f(y_0) = f(y)$, da cui si deduce che f è uniformemente continua in $\mathbb{R}$.

3. Data la funzione
$$f(x) = \int_1^x \frac{\operatorname{arctg} t}{\sqrt{t}}\, dt\,.$$
   Determinare i sottoinsiemi di $[0, +\infty)$ in cui f è uniformemente continua.

   Soluzione: Osserviamo come prima cosa che $\operatorname{arctg} x = x + o(x)$ e quindi
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}} = 0\,.$$
   Allora la funzione integranda si può estendere in modo continuo e quindi è integrabile secondo Riemann in $[0, 1]$. Da questo deduciamo che la f è continua in $[0, b]$ per ogni $b \geq 0$ e quindi uniformemente continua (grazie al teorema di Heine-Cantor). Inoltre la funzione integranda ha limite 0 all'infinito e quindi è limitata. Da questo deduciamo che la funzione f (la cui derivata è l'integranda) è Lipschitziana (anche se divergente a $+\infty$ perchè l'integranda non è integrabile in senso improprio) e quindi uniformemente continua in $[0, +\infty)$.

4. Determinare i valori di α per cui in seguente integrale è convergente
$$\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{x}\right)^{\alpha} dx$$
   Soluzione: La funzione $f(x) = \left(1 - \cos\frac{1}{x}\right)^{\alpha}$ è integrabile secondo Riemann in $[1, b]$, per ogni $b > 1$. Quindi bisogna solo controllare l'integrabilità a $+\infty$. Facendo lo sviluppo di Taylor del $\cos x$ si riconosce che
$$\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right)^{\alpha} = \frac{1}{2x^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{x^{3\alpha}}\right)\,.$$
   Quindi l'integrale è convergente per $2\alpha > 1$, ossian $\alpha > \frac{1}{2}$.