Esercitazione di Analisi Matematica I
Esercizi e soluzioni
06/06/2013

SUCCESSIONI DI FUNZIONI

1. Determinare il limite puntuale della successione
$$f_n(x) = \frac{n^2}{1+n^2x^2}$$
e stabilire in quali insiemi la successione converge uniformemente.
2. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e $\{g_n\}$ una successione di funzioni che converge uniformemente a g in I e tali che $g_n(I) \subseteq [a,b]$, dimostrare che $\{f(g_n(\cdot))\}$ converge uniformemente a $f(g(\cdot))$.
È ancora vero se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in $\mathbb{R}$ e l'immagine di g_n non necessariamente limitata? Provare o mostrare un controesempio.
3. Data la successione di funzioni
$$F_n(x) = \int_0^x e^{\frac{1}{(t-n)^2}}\, dt\,.$$
Provare che F_n converge uniformemente sugli intervalli limitati. Possiamo dire la stessa cosa per F_n'?
4. Dare un esempio di una successione di funzioni che converge uniformemente in $[-a,a]$ per ogni $a < 2$ ma che non converge uniformemente in $(-2,2)$.

SERIE DI FUNZIONI E SERIE DI POTENZE

1. Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, uniforme e totale della serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(x^n)\,.$$
2. Determinare l'insieme di convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di potenze
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n x^n}{\log n + 2}$$
3. Data la funzione $f(x) = \cos(x^3)$. Mostrare che è analitica e determinare la sua serie di Taylor.

SERIE DI FOURIER

1. Definiamo la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < \pi \\ 0 & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$
estesa per periodicità su tutto $\mathbb{R}$. Determinare la serie di Fourier di f e calcolarne la somma in tutti i punti di $[0, 2\pi]$.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3y' = 3\cos 2x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

2. Determinare la soluzione $y_a(x)$ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = a \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

   Determinare a in modo che $\lim_{x\to+\infty} y_a(x) = 2$.

3. Determinare la soluzione $y(x)$ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy^3 \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$