TUTORAGGIO DI ANALISI MATEMATICA I
9 V 2013

(1) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni
$$f_n(x) = \left(\frac{1}{n} + \sin^2 x\right)^n$$
sull'intervallo $[0, \pi]$, e calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f_n(x)\, \mathrm{d}x.$$
(2) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni
$$f_n(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$
sulla semiretta $\{x \geq 0\}$.
(3) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni
$$f_n(x) = n^2 \int_0^x \frac{\sin(x^n\, t)}{t}\, \mathrm{d}t$$
sull'intervallo $[0, 1]$.
(4) Sia $f(y) = e^{-y} \log y$. Studiare la convergenza della successione di funzioni
$$f_n(x) = f(nx)$$
sulla semiretta $\{x > 0\}$. Calcolare poi
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, \mathrm{d}x.$$
(5) Data una funzione continua $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiamo una successione $\{f_n\}$ di funzioni su $\mathbb{R}$ ponendo
$$f_0(x) = \varphi(x), \qquad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\, \mathrm{d}t.$$
   (a) Calcolare esplicitamente $f_n(x)$ qualora $\varphi(x) \equiv 1$.
   (b) Supponendo φ limitata, studiare la convergenza della serie di funzioni
$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$
(6) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni
$$f_n(x, y) = \frac{2^n(x + y)}{1 + n2^n(x^2 + y^2)}.$$
(7) Sia $f(x, y)$ una funzione continua tale che $f(0, 0) = 0$ e che
$$\lim_{|(x,y)|\to\infty} f(x, y) = 0,$$
e si ponga per ogni $n \in \mathbb{N}$
$$f_n(x, y) = f(nx, ny).$$

(a) Dimostrare che f_n tende puntualmente a 0 su $\mathbb{R}^2$.
(b) Dire in quali casi la convergenza è uniforme.

(8) Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^{2n} - y^{2n}|^{\frac{1}{n}}.$$

(9) Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!}.$$

(10) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n3^n}.$$

Detta $s = s(x)$ la somma della serie, si calcoli la derivata $s'\left(\frac{3}{2}\right)$.

(11) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^x}$$

sulla semiretta $\{x \geq 0\}$.

(12) Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{x}{n}}$$

sulla semiretta $\{x > 0\}$.

(13) Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{+\infty} e^{-xy^2}\ \mathrm{d}y.$$

(14) Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2} \int_{x-1}^{x+1} e^{-nt^2}\ \mathrm{d}t.$$

Dimostrare che tale serie converge uniformemente sull'insieme $A = \{|x| \geq 2\}$ e diverge sul complementare di A.

(15) Studiare la convergenza delle seguenti serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(nx)e^{-nx^2}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{0.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(nx)e^{-nx^4}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{0.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{n^2}, \quad x \in [-1,1] \tag{0.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+n^2x^2)}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{0.4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2x^2+1}, \quad |x| \geq a > 0 \tag{0.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}, \quad x \geq 0 \tag{0.6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{1+nx^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)x^2} \right), \quad x \in \mathbb{R} \tag{0.7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(nx) - \arctan((n-1)x)), \quad x \in \mathbb{R} \tag{0.8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n(n+1)}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{0.9}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^n \sin^{2n} x)}{n+1}, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]. \tag{0.10}$$