

PROVA SCRITTA del 9 settembre 2010

Cognome: Nome:

Esercizio 1. Data la curva parametrica

$$\gamma(t) = (t + \sqrt{t}, t^2 - 2t) \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 5\right]$$

a) Stabilire se è una curva regolare (motivando la risposta) e determinare il vettore tangente nel punto $\gamma(1)$

b) Dire se i punti $(2, -2)$ e $(5, 8)$ appartengono o meno alla curva

c) Disegnare una curva non semplice passante per il punto $(1, 1)$.

Esercizio 2. a) Determinarne nel punto $(1, 0)$ il piano tangente al grafico della seguente funzione

$$f(x, y) = \log(x + 3xy)$$

b) Determinare e disegnare le linee (corrispondenti ai livelli $c = 0, 1, 2$) di livello della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2$$

Esercizio 3. Determinare e disegnare il dominio della seguente funzione

$$f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 4)(1 - x^2 - y^2)}$$

Esercizio 4. a) Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2xy = x \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

al variare del parametro α .

b) Per quale valore di α la soluzione è uguale a $\frac{1}{2}$ nel punto $x = 1$?

Esercizio 5. Disegnare il dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < \sqrt{x}\},$$

e quindi calcolare in coordinate il seguente integrale doppio

$$\iint_D 2x + 3y \, dx \, dy.$$