Lezione 11: Il Determinante

Abbiamo capito come sia sufficiente determinare il rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa di un sistema per determinarne completamente il comportamento. In questa lezione svilupperemo uno strumento operativo (algebrico) che ci permetterà di determinare il rango di una qualsiasi matrice.

Ricordiamoci che il rango è il numero delle colonne indipendenti della matrice e partiamo dal caso più semplice, una matrice 2×2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Qui il rango può essere 0, 1 o 2. Ovviamente il rango è zero solo se sono tutti nulli gli elementi della matrice. Supponiamo che i numeri a, b, c e d non siano tutti nulli. Quindi rimangono solo 1 e 2 come possibilità per il rango. Se il rango è 2 se i vettori colonna sono indipendenti, ossia se non sono proporzionali.

Il rango è invece 1 se le due colonne sono proporzionali, ossia se

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} ,$$

cioè se

$$\begin{cases} a = \lambda b \\ c = \lambda d \end{cases} .$$

Moltiplicando la prima equazione per d (che possiamo supporre non sia zero) e usando la seconda equazione si ha

$$ad = \lambda bd = bc \qquad \Longleftrightarrow \qquad ad - cb = 0 .$$

Quindi la conclusione è la seguente:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{ha rango 2 (rango massimo)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad ad - cb \neq 0 .$$

Questo numero $ad - cb$ lo chiamiamo il **determinante** della matrice A. Il simbolo $\det A$ o la matrice con le barre piuttosto che con le parentesi rappresentano due modi alternativi di denotare il determinante di A

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb .$$

Esempio 91 1. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ si ha

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 ;$$

2. Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ si ha

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 2 = 6\,;$$

3. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ si ha

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0\,.$$

In questo esempio la prima e la seconda hanno determinante non nullo e quindi hanno rango 2 (le loro colonne sono vettori linearmente indipendenti, non proporzionali), mentre la terza ha determinante nullo e quindi ha rango 1.

Finora abbiamo definito il determinante di una matrice 2×2, cioè un operazione che a ogni matrice 2×2 associa un numero reale e abbiamo visto come questa nozione sia legata alla nozione di rango e di lineare indipendenza. Vedremo come questa operazione si può definire (a partire dal caso delle matrici 2×2) per tutte le matrici 3×3, e da queste alle matrici 4×4 e così via....per tutte le matrici **quadrate**. E come anche nel caso generale questa operazione ci dia informazioni sul rango.

Come dicevo, l'idea è definire il determinante per le matrici $n \times n$ riconducendolo a quello delle matrici $(n-1) \times (n-1)$.

Per fare questo abbiamo bisogno di qualche definizione: data una matrice A, $n\times n$, denotiamo con M_{ij} la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta dalla matrice A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna (un **minore di ordine** $n-1$).

Esempio 92 Se prendiamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

allora la matrice M_{23} si ottiene cancellando da A la seconda riga e la terza colonna e quindi

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

Ora vogliamo definire il determinante di una matrice A $n \times n$ supponendo di saper già calcolare il determinante delle matrici $(n-1)\times(n-1)$. Chiameremo **complemento algebrico** di un elemento a_{ij} il numero A_{ij} dato da

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

ossia il determinante della matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna, cambiato di segno se la somma degli indici (i e j) è dispari ($(-1)^{i+j}$ è un modo "compatto" di dire questo - ci ricordiamo, ovviamente, che -1 elevato a un numero pari fa 1, mentre elevato a un numero dispari rimane -1).

Nell'esempio di sopra si ha $\det M_{23} = -3 - 4 = -7$ e quindi $A_{23} = 7$ (abbiamo cambiato il segno perchè "il posto" 2 3 è dispari, nel senso che $2 + 3 = 5$ è dispari).

Siamo pronti per la definizione del deteminante di una matrice $n \times n$.

Definizione 93 *Se A è una matrice* **quadrata** *il suo* **determinante** *è quel numero che si ottiene sommando gli elementi di una riga (o di una colonna) moltiplicati per il loro complemento algebrico.*

Prima di spaventarci, mettiamo subito in pratica questa definizione con una matrice 3×3. Possiamo, per esempio, calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sviluppiamolo per esempio usando la prima riga

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3(12+2) - 3(-1-8) = 42 + 27 = 69\,. \end{aligned}$$

Notate che è implicito nella definizione il fatto (che stiamo dando per buono, ma che può essere dimostrato) che per calcolare il determinante si possa usare una qualsiasi riga o una qualsiasi colonna (ottenendo sempre lo stesso risultato, ovviamente!). Per esempio il determinante che abbiamo appena calcolato poteva essere calcolato anche sviluppandolo rispetto alla seconda colonna, ottenendo

$$\begin{aligned} \det A &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \\ &= 0 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1) \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 4(9+6) + (6+3) = 60 + 9 = 69\,. \end{aligned}$$

Meno male! Viene lo stesso risultato.

È quindi chiaro che di volta in volta sceglieremo per calcolare il determinante, la riga o la colonna più conveniente, per esempio quella con il maggior numero di zeri.

Osservazione: Segue subito dalla definizione che il determinante di una matrice che ha una riga (o una colonna) di zeri è sempre uguale a zero (basta svilupparlo rispetto a quella riga o a quella colonna).

Come si diceva all'inizio, abbiamo ricondotto il calcolo del determinante di una matrice 3×3 al calcolo di 3 determinanti di matrici 2×2. E così per quelle di ordine superiore...

Attenzione: Il determinante è un'operazione che associa un numero a tutte le matrici **quadrate** e **solo per quelle quadrate** (inventarne una versione per le altre matrici è "un errore **grave**")

Per quanto riguarda il calcolo del determinante di matrici 3×3 (e **solo per queste**) vale la seguente *regola di Sarrus* (che tra gli studenti riscuote molto successo - perché meccanica - e che vi descrivo non perché la ritenga importante, ma per evitare che ne facciate un uso improprio). Questa è decritta dal seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ \left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right. & & \left.\right) & \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} & \\ - & - & - & & \end{array}$$

ATTENZIONE

Solo per le matrici 3×3 !!!

ossia si ripetono, a destra della matrice, le prime due colonne. Della tabella così ottenuta si sommano i prodotti degli elementi di ognuna delle tre diagonali discendenti e quindi si sottraggono i prodotti degli elementi di ognuna delle tre diagonali ascendenti, il risultato così ottenuto coincide con il determinante della matrice A di ordine 3. Provatelo con la matrice 3×3 dell'esempio precedente. Vedrete che se non sbagliate i conti anche così vi viene 69.

Osservazione 94 (Applicazione del determinante al calcolo del prodotto vettoriale) Il calcolo del determinante di una matrice 3×3 ci fornisce un buon modo di ricordare la regolare del calcolo del determinante. Infatti basta ricordarci che il prodotto vettoriale tra due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ nello spazio è il risultato del determinante "formale" della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix},$$

dove nella prima riga ho messo i tre vettori che fanno parte della base canonica di E^3. Dico che l'operazione è "formale" proprio perché questa non è propriamente una matrice, infatti nella prima riga non ci sono dei numeri ma dei vettori. Se però non teniamo conto di questo fatto e calcoliamo il determinante sviluppandolo lungo la prima riga ci viene

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \mathbf{e}_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

ma questo (tenendo conto che $\mathbf{e}_i$ sono i vettori della base canonica) non è altro che il vettore che ha per componenti i coefficienti dei vettori $\mathbf{e}_i$ (notate il meno davanti a $\mathbf{e}_2$, c'è perché nel calcolo del determinante corrisponde a un posto dispari sulla prima riga, il risultato è che la seconda componente del prodotto vettoriale ha l'ordine dei prodotti invertiti). Quindi ci possiamo ricordare che

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Esempio 95 Prendiamo tre vettori dello spazio $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Proviamo a calcolare il volume del parallelepipedo di lati paralleli a questi tre vettori mostrato nella figura. Per calcolare l'area basta fare base per altezza $A \cdot h$. Ma l'area di base A sappiamo quanto vale:

$$A = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|.$$

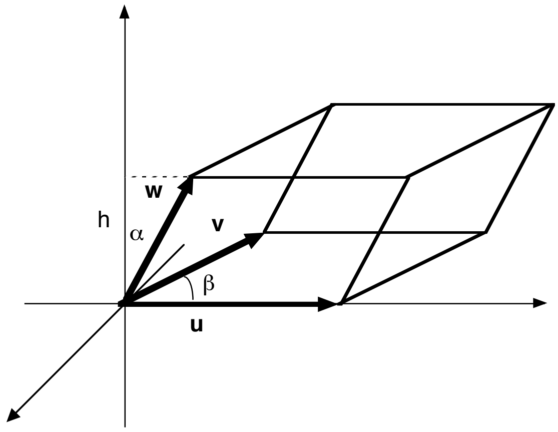

Figura 56:

Per calcolare l'altezza dovrei fare la proiezione di $\mathbf{w}$ sulla direzione ortogonale al piano che contiene $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Ma anche questo lo sappiamo fare, infatti questa proiezione è proprio data da

$$h = \|\mathbf{w}\| \cos \alpha \,.$$

Ma quindi se ci ricordiamo la definizione di prodotto scalare e il fatto che il prodotto vettoriale sta proprio sulla direzione "verticale" su cui proietto $\mathbf{w}$ per ottene l'altezza, otteniamo semplicemente che

$$\text{Volume} = A \cdot h = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \alpha = \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \times \mathbf{v} \rangle \,.$$

In conclusione il volume del parallelepipedo si ottiene facendo il prodotto scalare di $\mathbf{w}$ per il prodotto vettoriale di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ (questo si chiama **il prodotto misto** di $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$). Attenzione però: quello che ho detto è vero se i tre vettori sono messi come in figura (cioè con il vettore $\mathbf{w}$ che forma un angolo minore di 90 gradi con il vettore $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. In generale questo potrebbe non essere vero, quindi si deve tener conto che $h = \|\mathbf{w}\| |\cos \alpha|$ e quindi in generale

$$\text{Volume } = |\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \times \mathbf{v} \rangle| \,.$$

Vi chiederete, ma perchè ci parla di prodotto misto ora che stiamo facendo il determinante? Ecco se ripensate alla osservazione precedente a proposito del calcolo del prodotto vettoriale, vi accorgerete che

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \times \mathbf{v} \rangle = \det \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} ,$$

ossia che il prodotto misto si ottiene calcolando il determinante di una matrice che ha per righe le componente dei vettori $\mathbf{w}$, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Il determinante può essere usato per calcolare il rango di una qualsiasi matrice. Per farvelo vedere devo però introdurvi un po' di nomeclatura.

Definizione 96 *Chiameremo* **sottomatrice** *di una matrice data A una matrice ottenuta da A cancellando alcune righe e/o alcune colonne e chiameremo* **minore** *della matrice A una sua sottomatrice quadrata (diremo che un minore è di* **ordine k** *se è una sottomatrice $k \times k$).*

Esempio 97 Se A è la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

allora

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

è la una sua sottomatrice (ottenuta cancellando la seconda riga), mentre

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è la sottomatrice quadrata (ossia un minore di ordine 3) ottenuta cancellando la terza colonna.

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti per dare una definizione di rango che fa uso del determinante

Definizione 98 *Data una qualsiasi matrice A, $m \times n$ (ossia con m righe e n colonne), il* **rango** *di A è l'ordine del più grande minore (ossia del minore di ordine più grande) con determinante diverso da zero.*

In altre parole:

Il rango di una matrice è k se c'è un minore di ordine k, della matrice, con determinante diverso da zero e tutti i minori (eventuali) di ordine $k+1$ hanno determinante nullo.

Nota Se una matrice A ha **rango massimo**, ossia $k = \min\{m, n\}$, allora i minori più grandi hanno ordine k, non ci sono minori di ordine $k+1$ (per questo c'è scritto "eventuali"). Quindi per verificare che il rango sia massimo basta trovare che uno di questi minori abbia di determinante non nullo.

Se volessimo quindi determinare il rango della matrice dell'esempio precedente bisognerebbe calcolare il determinante dei minori più grandi che essa contiene, in questo caso quelli di ordine 3 (essendo la matrice 4×3). Proviamo a calcolare il determinante del minore ottenuto, nell'esempio, cancellando la terza colonna. Si ha (e si verifica facilmente) che

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ma questo non basta per concludere che il rango sia inferiore a 3. Se calcoliamo infatti il determinante del minore ottenuto cancellando la prima colonna otteniamo

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0.$$

Questo basta per dedurre che il rango è 3 (ossia al primo minore a determinante non nullo che si trova, ci si può fermare e quello determina il rango). Se invece avessimo trovato che anche questo aveva determinante nullo e così anche gli altri minori di ordine 3, avremmo concluso che il rango era minore di 3.

Per esempio data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

si verifica che tutti i minori di ordine 3 hanno determinante nullo (fatelo per esercizio). Quindi per decidere se il rango sia 2 o 1, dobbiamo analizzare i minori di ordine 2. Se ne troviamo almeno uno a determinante diverso da zero possiamo concludere che il rango è 2. Per esempio il minore

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ottenuto cancellando la terza colonna e la terza e la quarta riga, ha determinante non nullo. Quindi il rango è 2.

È chiaro quindi che questa procedura può richiedere il calcolo di molti determinanti di minori, prima che si sia in grado di trovarne uno diverso da zero e poter concludere quanto vale il rango. Il teorema che segue, e che non dimostriamo, ci offre una procedura un po' semplificata.

Teorema 99 (di Kronecker) *Una matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}$ ha rango k se e solo se c'è un minore M di ordine k con determinante diverso da zero e se tutte le (eventuali) matrici $(k+1)\times(k+1)$ che si ottengono "orlando" M con un'ulteriore riga e un'ulteriore colonna hanno determinante nullo.*

Esempio 100 Applichiamo questo teorema alla matrice vista poco fa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per comcludere che il rango è 2 basta fissare un minore 2×2, per esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e invece di verificare che tutte le matrici 3×3 di A (che sono 4) hanno determinante nullo, basta calcolare il determinante di queste due matrici

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 0 \end{matrix} & 2 \end{pmatrix}.$$

Fate il conto e vedrete che vengono entrambi nulli.

Mi rendo conto che non è evidente che questa operazione ci restituisca proprio il numero delle colonne indipendenti (cioè il rango). È chiaro che vi sto chiedendo di credere che questo sia vero.

L'idea è che il determinante produce una "magica miscela" dei coefficienti di una matrice quadrata in modo che il risultato venga zero solo se le colonne (e quindi le righe) sono dipendenti. Questo è evidente per le matrici 2×2, più complicato da vedere per le altre.

Facciamo alcuni esempi per convincerci che questo è vero almeno in casi in cui possiamo individuare "ad occhio" il rango.

Come prima cosa torniamo all'Esempio 100. In quel caso è chiaro che l'ultima colonna è data dalla somma delle prime due e queste sono indipendenti. Quindi il rango è proprio 2, coerentemente con quanto otteniamo usando il determinante.

Esempio 101 Prendiamo la seguente matrice triangolare

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 2 & \sqrt{3} & 79 \\ 0 & 0 & 3 & 115 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ricordate? Abbiamo già osservato che una matrice così ha tutte le colonne indipendenti Ora calcoliamo il determinate di questa matrice usando la definizione. Evidentemente la cosa più conveniente è svilupparlo usando la prima colonna (in cui ci sono quasi tutti zeri)

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & \sqrt{3} & 79 \\ 0 & 3 & 115 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

Dobbiamo ora calcolare questo determinante 3×3 che, ancora una volta, ci conviene sviluppare lungo la prima colonna e quindi

$$\det A = 1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 115 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42\,.$$

Quindi il determinante è semplicemente dato dal prodotto di tutti gli elementi della diagonale. Ovviamente questo è vero per qualsiasi matrice triangolare (non importa di che ordine sia).

È possibile verificare, usando la definizione, che nel calcolo del determinante valgono le seguenti proprietà:

1. Il **determinante è nullo** se ci sono due righe o due colonne uguali (o proporzionali)
2. Il **determinante non cambia** se a una riga (o colonna) si somma un'altra riga (o colonna) moltiplicata per uno scalare non nullo;
3. Se si scambiamo due righe il **determinante cambia segno**.

Esempio 102 Calcoliamo il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

per esempio sviluppandola lungo la prima colonna

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 3 + 4 - 9 = -12\,.$$

Ora proviamo a semplificare la matrice usando le operazioni 1) e 2). Sommando alla seconda riga la prima si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

e quindi scambiando la seconda con la terza riga si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ora questa è anche una matrice triangolare e quindi il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi della diagonale, cioè

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 4 = 12!$$

Bene! Come deve essere. Viene lo stesso valore, cambiato di segno perchè abbiamo anche scambiato l'ordine di due righe.

Notate che la proprietà di invarianza 2) è molto utile per semplificare il calcolo del determinante.

Esempio 103 Calcoliamo il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & -7 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Piuttosto che applicare direttamente a questa matrice il calcolo del determinante osserviamo che se sommo la terza riga moltiplicata per 2 alla prima riga la matrice si semplifica molto. Quindi

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & -7 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -7 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

ci è basta una sola operazione per rendere il calcolo del determinante molto facile!

Per concludere vediamo come il determinante è utile nel caso in cui si debba discutere il comportamento di un sistema (e quindi della sua matrice associata) al variare di un parametro.

Esercizio 104 Dire per quali valori del parametro k il seguente sistema ammette soluzioni non banali

$$\begin{cases} -3x + ky + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 2kx + y + 4kz = 0 \end{cases} .$$

L'idea è che stiamo intersecando tre piani passanti per l'origine (le equazioni sono omogenee) e il primo e il terzo piano sono diversi per ogni scelta del parametro k. Quindi l'intersezione tra questi piani dipenderà dalla scelta di k. La domanda è allora: per quali valori di k questi piani si incontrano in una retta? (o eventualmente coincidono?)
Svolgimento (un po' prolisso): Sappiamo che un sistema omogeneo non ha mai il problema di essere compatibile, infatti ha sempre almeno la soluzione nulla (quella banale appunto). Qui la richiesta è: per quali valori di k questo sistema invece di avere una sola soluzione, ne ha infinite? Il Teorema di Rouchè-Capelli ci dice che un sistema compatibile ha infinite soluzione se il rango della matrice dei coefficienti è minore del numero delle incognite. In questo caso le incognite sono 3 a la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} -3 & k & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2k & 1 & 4k \end{pmatrix}$$

è una matrice 3×3. È chiaro che le diverse matrici che noi otteniamo se scegliamo diversi valori del parametro k potranno avere ranghi diversi. Noi stiamo cercando quei valori di k per cui la matrice corrispondente abbia rango minore di 3.

Per quello che abbiamo visto finora (la definizione di rango tramite il determinante dei minori) è chiaro che una matrice quadrata non ha rango massimo se il suo determinante è nullo. Allora in questo caso basta cercare i valori di k per cui il determinante della matrice dei coefficienti viene uguale a zero. Calcoliamo il determinante (usando per esempio la prima colonna), imponiamogli di essere zero e vediamo che condizione questo ci dà su k:

$$\det A = -3 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 4k \end{vmatrix} + 2k \begin{vmatrix} k & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3(-4k+2) + 2k(-2k+1) = -4k^2 + 14k - 6\,,$$

quindi il determinante sarà nullo per i valor di k per cui $-4k^2 + 14k - 6 = 0$. Questa è una semplice equazione di secondo grado che voi sapere risolvere (vero?). Applicando la formula di risoluzione (è consigliabile prima dividere tutta l'equazione per 2), si ottiene che i due valori di k che cerchiamo sono $1/2$ e 3. In conclusione per $k = 1/2$ e per $k = 3$ il determinante della matrice dei coefficienti è nullo, quindi il rango è minore di 3 e quindi il sistema omogeneo corrispondente ha infinite soluzioni.

La domanda successiva potrebbe essere: come trovo tutte le soluzioni per esempio nel caso $k = 3$? Beh, intanto bisogna capire in questo caso quale sia il rango della matrice corrispondente e quindi quante siano le soluzioni che ci aspettiamo di trovare. Se $k = 3$ la matrice dei coefficienti è

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 6 & 1 & 12 \end{pmatrix}.$$

Si vede subito che il rango di questa matrice è 2, infatti ha determinante uguale a zero (non c'è bisogno di verificarlo, abbiamo scelto $k = 3$ proprio in modo che ciò accadesse) e il minore

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ha determinante diverso da zero. Allora come troviamo le ∞^1 soluzioni? Basta prendere le due equazioni corrispondenti al minore che determina il rango (in questo caso le prime due equazioni che sappiamo essere indipendenti) e portare a termine noto tutte le incognite che non corrispondono al minore in questione (in questo caso l'ultima incognita). Quindi ci siamo ridotti a studiare il sistema

$$\begin{cases} -3x + 3y = -z \\ y = -2z \end{cases} .$$

È chiaro che questo sistema ha una soluzione per ogni scelta di z ed è facile trovarla, basta sostituire $-2z$ nella prima equazione al posto di y. In conclusione abbiamo trovato che tutte le terne del tipo $(-5z/3, -2z, z)$ sono soluzione (in altre parole sono tutti i punti della retta per l'origine di direzione $(-5/3, -2, 1)$.

Ci ritorneremo, ma quello che abbiamo imparato da questo esempio è che per trovare le soluzioni di un sistema, bisogna sempre ridursi a studiare un sistema quadrato di rango massimo, per il quale sappiamo che c'è un'unica soluzione e per la quale troveremo una "formula".

Esercizio 105 Determinare il comportamento del seguente sistema al variare del parametro k

$$\begin{cases} -x + ky + 2z = 1 \\ y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = -1 \end{cases} .$$

Quindi in questo caso vogliamo sapere per quali k questi piani si incontrano in un punto, per quali k in una retta (o eventualmente coincidono) e per quali k non hanno intersezioni comuni. Io in questo caso mi aspetterei che per molti valori di k succede la situazione "generica" e i piani si incontrano in un punto (cioè ci sarà una sola soluzione), mentre per pochi valori di k non si incontrano o si incontrano in una retta (ossia non ci sono soluzioni oppure ce mne sono infinite).

Svolgimento (sintetico): Consideriamo le due matrici associate al sistema (dei coefficienti e completa)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_b = \begin{pmatrix} -1 & k & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Il sistema è compatibile se il rango di queste due matrici coincide. Incominciamo con il determinare il rango della matrice dei coefficienti (è quadrata, quindi è la cosa più facile da cui cominciare) e sviluppiamola lungo la prima colonna (che ha uno zero)

$$\det A = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} k & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 + 2(2k - 2) = 4k - 1 .$$

Quindi il determinante di A è uguale a $4k - 1$. Questo numero è uguale a 0 solo se $k = 1/4$. Da questo già possiamo concludere qualcosa:

$$\text{se } k \neq \frac{1}{4} \text{ allora rango}\,(A) = 3 \text{ (ossia ha rango massimo)} .$$

Ma allora per tutti i valori di $k \neq 1/4$ si ha anche che rango$\,(A_b) = 3$ (perchè questo è il rango di una sua sottomatrice ed è il massimo possibile perché A_b è una matrice 3×4).

In conclusione possiamo già dire che se $k \neq 1/4$, rango$\,(A)$ = rango$\,(A_b) = 3$ e quindi, per quei valori di k c'è solo una soluzione (come ci aspettavamo ci sono molti valori del parametro, quasi tutti, per cui i piani corrispondenti si incontrano in un punto).

Ci rimane da vedere cosa succede se $k = 1/4$. La prima cosa che notiamo è che il rango di A non è 3 perché il suo determinante si annulla (ricordate? $\det(A) = 4k - 1$). Per verificare se il rango è 2 basta trovare un minore 2×2 con determinante non nullo. Ma questo è facile si vede a occhio. Per esempio quello che si ottiene cancellando la prima riga e la terza colonna, ossia

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow \operatorname{rango}(A) = 2 \,.$$

Infine dobbiamo capire se il rango di A_b è anche 2 (questo implicherebbe che il sistema è compatibile e che ci sono ∞^1 soluzioni - rango $2 < 3$ incognite) oppure se il rango di A_b è 3 (questo ci direbbe che non ci sono soluzioni). Se $k = 1/4$ la matrice completa è

$$A_b = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} .$$

La domanda si è quindi ridotta a: qual'è il rango di questa matrice? Basterebbe controllare il determinate delle orlate di

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} ,$$

ossia delle due matrici

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Ma si vede a occhio che la seconda matrice ha determinante diverso da zero. Sviluppatelo secondo la seconda riga e ottenete che il determinate è -1.

In conclusione se $k = 1/4$ $\operatorname{rango}(A) = 2 < \operatorname{rango}(A_b) = 3$, quindi il sistema è incompatibile!