Lezione 13: I sistemi di riferimento

Cambiamenti di coordinate

In questa lezione proveremo a vedere le trasformazioni lineari sotto un'altra luce.

Quando abbiamo visto l'esempio di un oggetto che, soggetto alla forza di gravità, si muove su un piano inclinato abbiamo notato che avremmo potuto studiare una situazione semplificata "mettendolo in orizzontale",

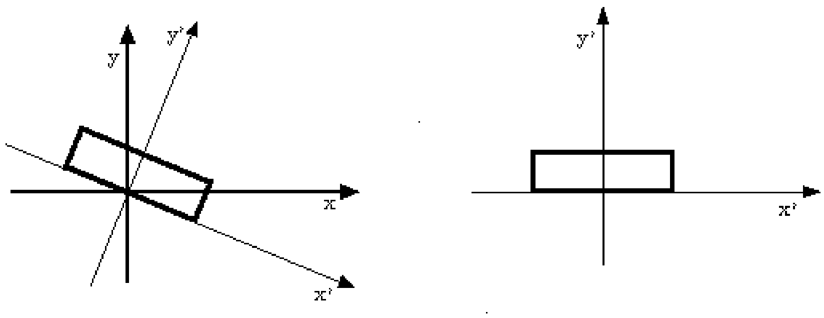


Figura 63:

cioè che si poteva usare un sistema di riferimento più comodo in cui la posizione dell'oggetto potesse essere descritta in modo più semplice.

Anche quando abbiamo introdotto le coordinate cartesiane, abbiamo visto che è possibile descrivere la posizione di tutti i punti del piano fissando comunque due rette (gli assi) non parallele e due unità di misura (eventualmente diverse) sui due assi:

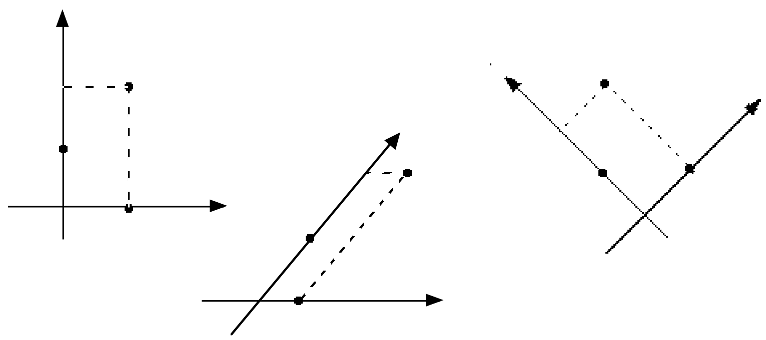


Figura 64: Punti di coordinate $(1, 2)$

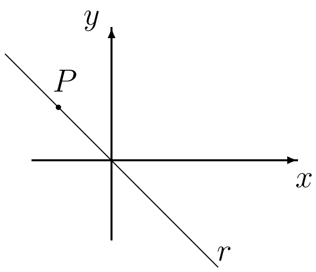
Come vedete dalla figura, a seconda di come scelgo le unità di misure e gli assi, alla stessa coppia di coordinate corrispondono punti diversi. Detto nel linguaggio degli spazi vettoriali (che spero abbiate in linea di massima acquisito), se scegliamo diversi vettori come base del piano, con la “combinazione lineare” di coefficienti 1 e 2 otteniamo vettori diversi. Analogamente nei tre riferimenti della figura uno stesso punto corrisponderà a coordinate diverse.

Domanda naturale: Supponiamo di avere una “configurazione” rappresentata in un certo sistema di riferimento (cioè sappiamo in quel sistema di riferimento quali sono le coordinate dei punti che stiamo studiando) e che, per qualche motivo, sarebbe più comodo usare un diverso sistema di riferimento. Sappiamo “trasformare” tutte le informazioni che abbiamo (nel primo sistema di riferimento) in termini del nuovo sistema di riferimento?

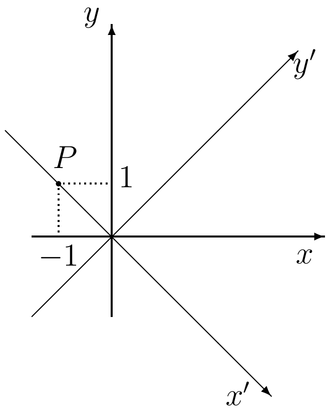
La risposta è ovviamente SI e lo facciamo con un “cambiamento di coordinate”.

Proviamo a partire con un esempio in cui il nuovo sistema di riferimento, rispetto al vecchio, ha la stessa origine e gli assi ruotati di uno stesso angolo (questi saranno i cambiamenti di riferimento che vedremo di più, le “rotazioni”).

Esempio 119 Torniamo al problema di un punto P, in un sistema di riferimento ortonormale, che si muove lungo una retta r, per esempio la bisettrice del secondo e quarto quadrante.



Evidentemente per descrivere la posizione di P usando le coordinate, sarebbe più comodo avere un sistema di riferimento in cui la retta r coincida con uno degli assi. Usiamo per esempio un sistema ortonormale di coordinate (x', y'), in modo che l'asse x' coincida con la retta r



Quali sono le coordinate di P nel nuovo riferimento, sapendo che nel vecchio sono $(-1, 1)$? È facile, basta guardare la figura! Nel nuovo riferimento il punto P sta sull'asse x' a sinistra dell'origine a distanza $\sqrt{2}$, quindi le sue “nuove coordinate” saranno

$$(-\sqrt{2}, 0) \qquad !!!$$

È altrettanto facile dedurre le nuove coordinate di un qualsiasi altro punto di quella retta, per esempio il punto che nel vecchio sistema di riferimento ha coordinate $x = 2$ e $y = -2$ (sta ancora sulla retta $y = -x$!). In questo caso le nuove coordinate saranno $x' = 2\sqrt{2}$ e $y' = 0$.

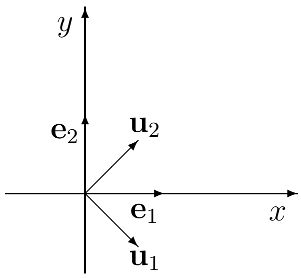
Vorremmo poter fare in generale quello che abbiamo visto in questo esempio.
In sostanza quello che stiamo facendo è la cosa seguente: nel primo riferimento usiamo la base canonica data dai vettori $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ per rappresentare tutti i vettori del piano

$$P = (x, y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \,.$$

Con il nuovo riferimento vogliamo usare una nuova base di vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ in modo che

$$P = (x', y') \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{OP} = x'\mathbf{u}_1 + y'\mathbf{u}_2 \,,$$

cioè le nuove coordinate non sono altro che i coefficienti che ci servono per ottenere $\mathbf{OP}$ come combinazione lineare dei nuovi vettori della base.



In particolare in questo caso conosciamo le coordinate dei vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ nella vecchia base (infatti l'angolo tra i vettori è di 45 gradi, quindi basta ricordarsi quanto fanno seno e coseno di 45 gradi e ...)

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2$$

e

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2$$

A questo punto è facile ricavare la relazione che c'è tra le coordiante (x, y) del vecchio sistema di riferimento e le coordinate (x', y'), infatti

$$\mathbf{OP} = x'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2\right) + y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2\right) = \left(\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{e}_1 + \left(-\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{e}_2$$

e quindi visto che sappiamo anche che

$$\mathbf{OP} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

possiamo facilmente dedurre

$$\begin{cases} x = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} \,. \end{cases}$$

Detto in forma matriciale deduciamo che il vettore $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ si trasforma nel vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con la seguente regola

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Quindi se sappiamo scrivere i nuovi vettori della base nel vecchio sistema di riferimento possiamo dedurre un sistema che ci da le vecchie coordinate (x, y) in funzione delle nuove. La matrice A che determina tale sistema ("matrice del cambiamento di coordinate"), come potete vedere, ha per colonne proprio le coordinate di $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$.

A questo punto forti della lezione precedente noi sappiamo anche "tornare indietro", cioè trovare il sistema il cui x' e y' sono date esplicitamente in funzione di x e y. Basta determinare l'inversa di A. In questo caso è molto facile, visto che $\det A = 1$ (ricordatevelo! Perchè non è un caso), e quindi

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x' = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} \\ y' = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Con una semplice verifica adesso potete confermare che il punto $x = -1$, $y = 1$, con il nuovo sistema di riferimento ha effettivamente coordinate $x' = -\sqrt{2}$, $y' = 0$.

O ancora...come si trasforma nel nuovo sistema il punto di coordinate $(1, 2)$? Basta sostituire questi due valori al posto di x e y nel sistema e si ottiene $x' = -1/\sqrt{2}$ e $y' = 3/\sqrt{2}$.

Chiaro?...proviamo a farlo in generale: se vogliamo usare come nuova base due vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ (che ovviamente dovranno essere indipendenti) di cui conosciamo le coordinate nel sistema "vecchio"

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

facendo esattamente gli stessi passaggi di prima possiamo dedurre come dato un qualsiasi punto del piano di coordinate (x, y) si passa alle sue nuove coordinate (x', y'):

$$\mathbf{OP} = x'\,(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2) + y'\,(a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2) = \underbrace{(a_{11}x' + a_{12}y')}_{=\ x}\,\mathbf{e}_1 + \underbrace{(a_{21}x' + a_{22}y')}_{=\ y}\,\mathbf{e}_2$$

Quindi in generale un **cambiamento di coordinate del piano** è dato dal sistema

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

dove la matrice A (**matrice del cambiamento di coordinate**) ha per colonne le coordinate della nuova base nel vecchio sistema di riferimento.

Ancora una volta: se vogliamo dedurre il sistema inverso possiamo, per esempio, calcolare A^{-1} e avere

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(vi faccio solo notare che questa esiste sempre perchè la condizione $\det A \neq 0$ è garantita dal fatto che in partenza $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ sono due vettori indipendenti, altrimenti non sarebbero una base).

Nota: Ogni volta che facciamo un **cambiamento di riferimento ortonormale** si ha $\det A = 1$ oppure $\det A = -1$.

Questo è molto facile da verificare e dipende dal fatto che i due nuovi vettori della base $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, in un cambiamento di base ortonormale devono essere tra loro ortogonali e devono essere due versori (cioè di norma 1). Se allora

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

si deve avere automaticamente $a^2 + b^2 = 1$ (perchè è un versore) e così è automaticamente determinato (a meno del verso!) anche $\mathbf{u}_2$ che deve essere

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} .$$

Allora la matrice del cambiamento di riferimento è

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

e quindi

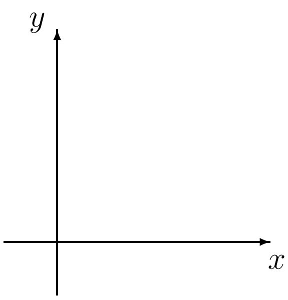
$$\det A = a^2 + b^2 = 1 \ !$$

Che vi avevo detto?

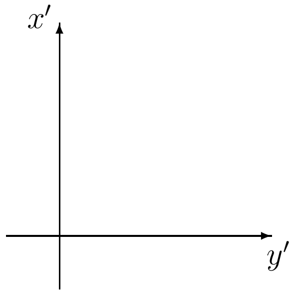
Se invece avessi preso $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ (cioè nell'altro possibile verso), avrei ottenuto $\det A = -a^2 - b^2 = -1$.

I cambiamenti di base ortonormali con determinante uguale a 1 sono **rotazioni**, quelli con determinante uguale a -1 "includono" anche un **ribaltamento** (cioè cambiano l'ordine degli assi rispetto al sistema di partenza).

L'esempio più semplice di ribaltamento è il cambiamento di riferimento in cui si scambia l'asse x con l'asse y, cioè



$$\begin{cases} x = y' \\ y = x' \end{cases}$$



In questo caso la matrice di cambiamento di riferimento è semplicemente

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che quindi ha determinante uguale a -1.

In generale, soprattutto nelle applicazioni "tecniche", vi capiterà più spesso di avere a che fare con cambiamenti di riferimento ortonormali (cioè delle rotazioni degli assi), però è anche chiaro che possono essere molti gli esempi di problemi in cui si debba fare

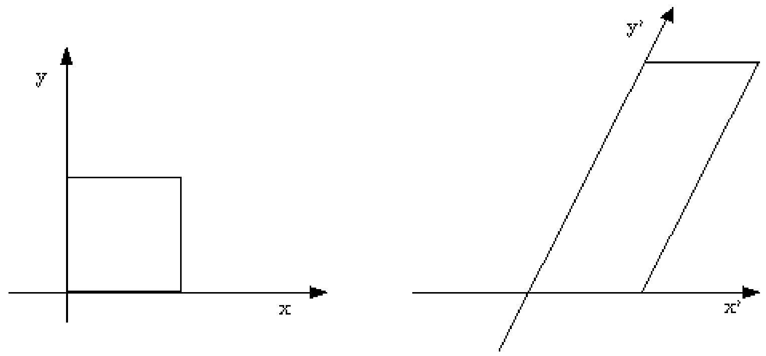


Figura 65: Pensate alla seconda figura, come all'ombra della prima

un cambiamento di riferimento con assi non ortogonali e magari con unità di misura diverse sui due assi. Per esempio quando si devono descrivere delle figure geometriche che vengono proiettate su un piano lungo una direzione non ortogonale (ovviamente questo deforma gli angoli e le lunghezze)

Osservazione: È chiaro che il sistema

$$A\mathbf{x}' = \mathbf{x}$$

può essere pensato come un cambiamento di riferimento che descrive con coordinate diverse gli stessi punti dello spazio, oppure come una trasformazione dei vettori $\mathbf{x}'$ nei vettori $\mathbf{x}$.

Esempio 120 Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Il parallelogramma P (che trovate nella figura)

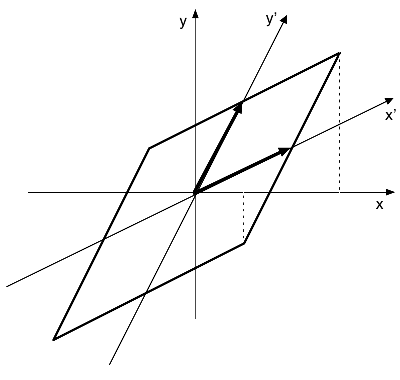


Figura 66: Stesso parallelogramma visto in due sistemi di riferimento

che nel sistema di riferimento xy ha vertici di coordinate $(3, 3)$, $(1, -1)$, $(-3, -3)$ e $(-1, 1)$, nel sistema di riferimento $x'y'$ dove i vettori della base sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ossia dato dal cambiamento di coordinate $A\mathbf{x}' = \mathbf{x}$) ha vertici di coordinate $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ e $(1, -1)$.

Analogamente possiamo pensare $A\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ come la trasformazione di $\mathbf{x}'$ nel vettore $A\mathbf{x}'$ (che rappresentiamo sempre con lo stesso sistema di riferimento). Quindi in questo caso il quadrato di vertici $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ e $(1, -1)$ si trasforma nel parallelogramma.

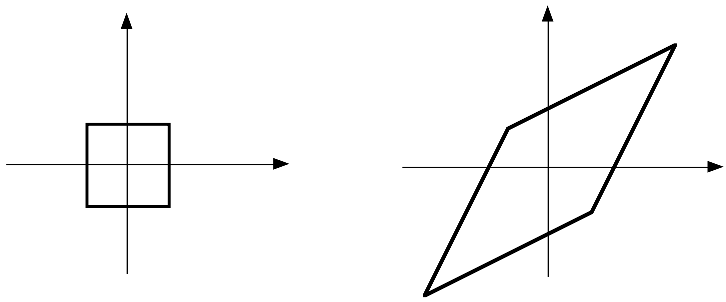


Figura 67: Il quadrato si trasforma nel parallelogramma

Vediamo come si ottiene una **rotazione** del sistema di riferimento in generale. Abbiamo detto che se dobbiamo solo ruotare il sistema di riferimento (lasciandolo quindi ortonormale), basta fissare l'angolo che, per esempio, l'asse x' dovrà avere con l'asse x, che la rotazione è automaticamente determinata.

supponiamo di voler ruotare il sistema di riferimento in senso antiorario di un angolo α

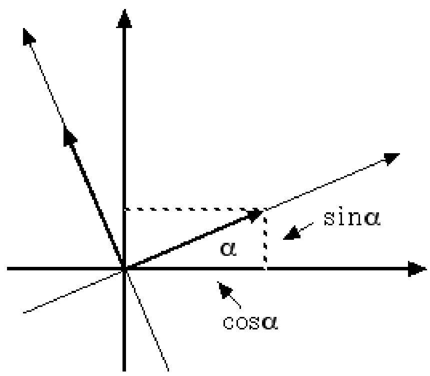


Figura 68: La rotazione degli assi di un angolo α

Allora il primo versore della nuova base dovrà essere

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

mentre il secondo, dovendo essere ad esso ortogonale e sempre di norma 1, sarà

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} .$$

Allora a questo punto il cambiamento di riferimento è dato da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

e di conseguenza il cambiamento di riferimento inverso sarà

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(provate adesso a calcolare il determinante di queste matrici di cambiamento di riferimento e vi convincerete definitivamente che è uguale a 1). Vi ricordate? Abbiamo già visto questa matrice come la trasformazione che fa ruotare gli oggetti di un angolo $-\alpha$.

Esercizio 121 Dato un riferimento ortonormale xy. Determinare una rotazione $x'y'$ in cui l'asse x' coincide con la retta r di equazione cartesiana $2x - y = 0$.

La soluzione di questo esercizio è facile. Aiutiamoci con un disegno

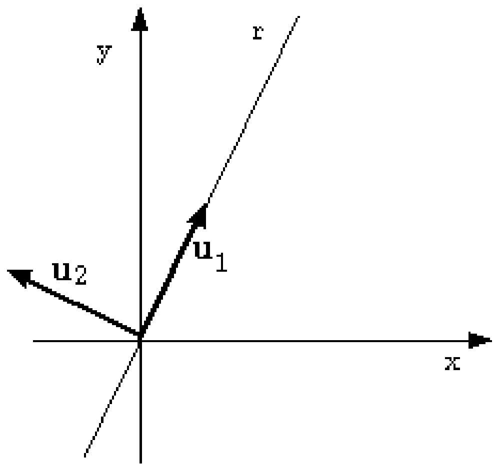


Figura 69: Scegliamo il primo versore della base sulla retta r

La direzione della retta è $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, quindi il primo versore dell base sarà

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Quindi, saltando qualche passaggio, determino le coordinate dell'altro versore ortogonale a $\mathbf{u}_1$ e il cambiamento di coordinate è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

A questo punto: siete di in grado di dirmi quali sono le nuove coordinate del punto che nel vecchio sistema di riferimento aveva coordinate $(2, 3)$? ...Spero di si, basta sostituire questi due valori nel cambiamento inverso. Fatelo!

Osservazione: Quello che abbiamo visto per i sistemi di riferimento nel piano si può ripetere nello spazio e non è difficile immaginare che, se pur a costo di notazioni molto più pesanti, fissando una nuova base nello spazio, si può costruire la matrice di cambiamento di coordinate che mi metterà in relazione le "vecchie coordinate" (x, y, z), con le "nuove" (x', y', z'). Anche questa sarà ottenuta prendendo per colonne le coordinate dei vettori che scegliamo come nuova base e sarà quindi una matrice 3×3.

Le traslazioni

È chiaro che quello che abbiamo visto non sono tutti i possibili modi di cambiare sistema di riferimento. Se un punto si muove parallelo all'asse x e parte dal punto $P_0 = (1000, 1)$ per descrivere il suo spostamento sarebbe più conveniente avere un sistema di riferimento in cui l'origine dei nuovi assi coincide con il punto P_0, in modo che le nuove coordinate di P_0 siano $(0, 0)$.

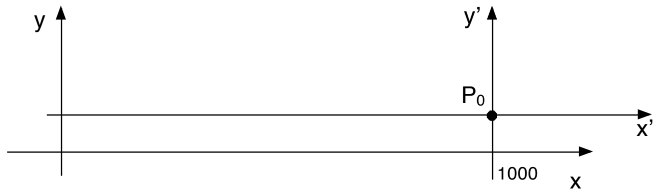


Figura 70: C'è un sistema più comodo per descrivere P_0

Ossia è comodo traslare gli assi.

Domanda: Dato un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e trasliamo gli assi (x e y) in modo che il nuovo riferimento $x'y'$ abbia la sua origine in P_0, quale sarà la relazione tra le coordinate x e y e le coordinate x' e y'?

È facile

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases} .$$

Guardate la figura e ve ne convincerete.

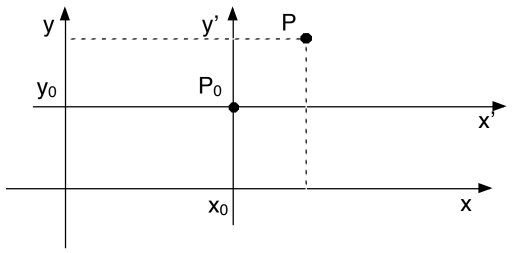


Figura 71: Adesso mettiamo l'origine in P_0...

Esempio 122 Trasliamo gli assi in modo che il sistema $x'y'$ abbia origine nel punto $(3, 2)$. Si avrà

$$\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y - 2 \end{cases} .$$

Notate che la vecchia origine nel nuovo sistema ha coordinate $(-3, -2)$.

Ora cerchiamo di capire, per esempio, quale sarà l'equazione della retta $x = y$ nelle nuove coordinate. Basta notare che

$$\begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' + 2 \end{cases}$$

e quindi la retta avrà equazione $x' + 3 = y' + 2$, ossia

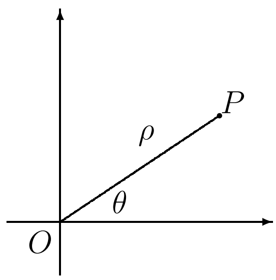
$$y' = x' + 1$$

Fate un "disegnino" e ve ne convincerete.

Per concludere questa parte sui "sistemi di riferimento" vediamo un altro modo "classico" di rappresentare tutti i punti del piano.

Coordinate polari

Dato un qualunque punto P del piano, individuo univocamente la sua posizione se specifico a che distanza (ρ) sta dall'origine e qual'è l'angolo (θ) che il segmento OP ha con il l'asse x.



$$\begin{cases} \rho > 0 \\ \theta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

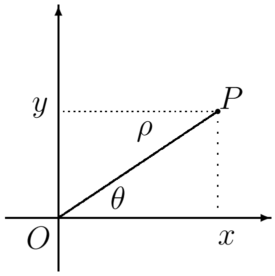
Quindi la coppia (ρ, θ) al variare di ρ tra i numeri reali positivi (è una distanza!), e θ tra i numeri maggiori o uguali a zero e minori di 2π (un intero giro!), rappresenta tutti i punti del piano (tranne l'origine). In questo caso stiamo rappresentando il piano in **coordinate polari**.

Notate che per insieme in cui far variare l'angolo abbiamo scelto l'intervallo $[0, 2\pi)$ (vi ricordate cosa significa? $0 \leq \theta < 2\pi$) in modo che in un giro completo includiamo il punto di partenza, $\theta = 0$, e non includiamo il punto di arrivo, $\theta = 2\pi$, (altrimenti lo contiamo due volte).

La rappresentazione in coordiante polari è spesso utile. Per esempio se dobbiamo descrivere i punti di una circonferenza centrata nell'origine e di raggio 2, sarà ovviamente più facile usare le coordinate polari (saranno tutti i punti del tipo $(2, \theta)$). Ma vedremo anche altri esempi.

Attenzione: Dalla rappresentazione in coordiante polari escludiamo l'origine. Infatti non sarebbe chiaro quale angolo associare all'origine, mentre noi vogliamo che a ogni punto corrisponda una sola coppia (ρ, θ) e viceversa.

Ci rimane solo da dire quale relazione c'è tra le coordiante polari e le cartesiane. In un verso è chiaro: se di un punto P conosciamo la distanza dall'origine e l'angolo, con un po' di trigonometria, deduciamo subito che le sue coordinate (x, y) saranno



$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \, . \end{cases}$$

Mentre per ottenere la relazione inversa chiaramente $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ (distanza di $P = (x, y)$ dall'origine) e il rapporto tra y e x è uguale alla tangente di θ, quindi

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

(La quantità $\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ non ci deve spaventare, è solo "l'arco la cui tangente è uguale al rapporto tra y e x". Per esempio se $x = y$, il loro rapporto è 1 e l'arco la cui tangente è 1 è semplicemente $\pi/4$, ma su questo torneremo...).

Voglio concludere questa lezione con qualche esempio di curve non tutte "ovvie" che in coordinate polari hanno equazioni molto semplici.

Dalla più semplice

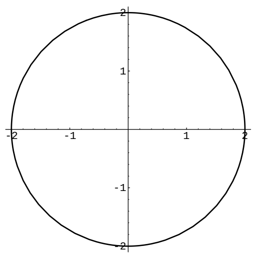


Figura 72: In coordinate polari ha equazione semplicemente: $\rho = 2$

...alla spirale

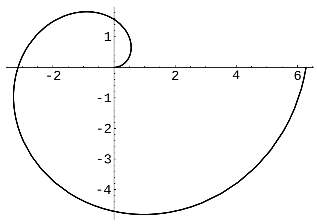


Figura 73: La relazione tra ρ e θ è addirittura lineare: $\rho = \theta$

...fino a cose più strane

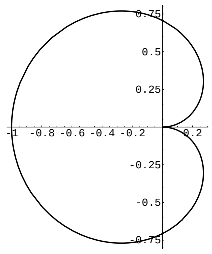


Figura 74: Questa curva si chiama il cardioide e ha equazione: $\rho = \sin(\theta/2)$

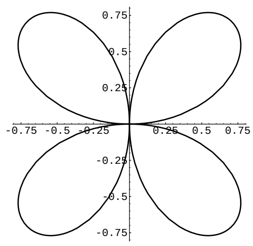


Figura 75: Questa ha equazione: $\rho = \sin(2\theta)$

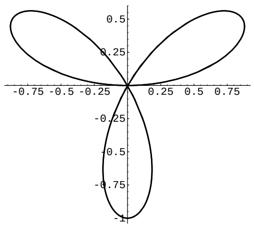


Figura 76: Questa ha equazione: $\rho = \sin(3\theta)$

...e se ne volessi una con otto petali...o cinque?