Lezione 7: Rette e piani nello spazio

In questa lezione ci metteremo in un riferimento cartesiano ortonormale dello spazio. I primi "oggetti" geometrici che individuiamo sono le **rette** e i **piani**.

Per quanto riguarda le rette e la loro rappresentazione parametrica la situazione non è molto diversa da quella vista per le rette dello spazio. Bisogna solo familiarizzare con il fatto che poichè siamo nello spazio abbiamo bisogno di tre coordinate (x, y, z) per individuare i punti, ma per il resto non c'è niente di nuovo: fissiamo un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e una direzione (un vettore dello spazio) $\mathbf{u}$. Esiste una sola retta che passa per P_0 e parallela a $\mathbf{u}$. Anche in questo caso i punti P della retta r sono quei punti per cui il segmento $\overline{P_0P}$ è parallelo al vettore $\mathbf{u}$ (cioè il vettore $\mathbf{P_0P}$ è multiplo del vettore $\mathbf{u}$), ossia

$$r = \{P \in \mathbf{R}^3 \ : \ \mathbf{P_0P} = \lambda\mathbf{u}\,, \text{ per qualche } \ \lambda \in \mathbf{R}\}\,.$$

Se $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, visto che il vettore $\mathbf{P_0P}$ è uguale a $\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$, la condizione di appartenenza alla retta può essere scritta equivalentemente come

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases}$$

che rappresentano le **equazioni parametriche** della retta passante per il punto P_0 e di direzione parallela al vettore $\mathbf{u}$, nello spazio.

Esempio 56 Determiniamo la retta passante per il punto $(1, 2, 3)$ e parallela al vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$. Anche qui non c'è molto da fare, basta applicare la formula appena vista e otteniamo

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - 5t \end{cases}$$

....come sapete ho una leggera preferenza per il parametro t piuttosto che λ.

Oppure potremmo domandarci: quali sono le equazioni parametrica della retta sempre passante per il punto $(1, 2, 3)$, ma ortogonale al piano xy?... Qui abbiamo il punto e ci serve la direzione. Abbiamo visto che date due direzioni nello spazio abbiamo uno strumento per determinare una direzione ortogonale ad esse (il prodotto vettoriale). Però in questo caso è piuttosto facile, si vede a occhio: la direzione ortogonale al piano xy è quella dell'asse z, cioè $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Allora le equazioni parametriche della retta in questione saranno

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases} \quad .$$

Anche in questo caso non c'è nessuna difficoltà a determinare le equazioni parametriche della retta passante per due punti, per esempio $P_1 = (2, 0, 4)$ e $P_2 = (1, -2, -3)$. Infatti i due punti ci bastano per individuare la direzione della retta e poi possiamo imporle di passare per uno dei due. Allora la direzione sarà parallela al vettore

$$\mathbf{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2 \\ -2 \\ -3 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

e quindi imponendo alla retta di passare per P_1 abbiamo

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -2t \\ z = 4 - 7t \end{cases} \quad .$$

Inutile dirlo, anche in questo caso non ci possiamo aspettare un solo modo di rappresentare parametricamente una retta dello spazio (qui avrei potuto scegliere il punto P_2 da cui partire piuttosto che P_1 e avrei ottenuto delle equazioni diverse).

Adesso proviamo a partire dalle equazioni parametriche della retta che abbiamo appena trovato e, così come avevamo fatto per le rette del piano, proviamo a cercare delle relazioni che coinvolgano solo x, y e z eliminando il parametro t. Possiamo esplicitare il parametro nella prima equazione e sostituirlo alle altre equazioni

$$\begin{cases} t = 2 - x \\ y = -2t \\ z = 4 - 7t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2 - x \\ y = -4 + 2x \\ z = -3 + 7x \end{cases} \implies \begin{cases} y - 2x + 4 = 0 \\ 7x - z - 3 = 0 \end{cases} \quad .$$

Che cosa rappresentano le ultime due equazioni trovate? Per esempio, che insieme è l'insieme dei punti dello spazio che verificano

$$y - 2x + 4 = 0\,?$$

Se questa fosse un'equazione nel piano, sarebbe una retta

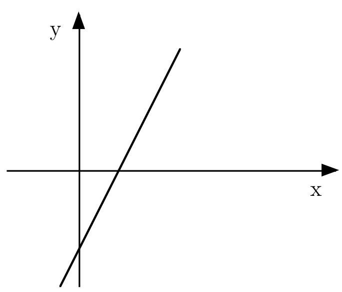

Figura 47: L'insieme dei punti $(x, y, 0)$ che soddisfano $y - 2x + 4 = 0$

ma noi stiamo cercando i punti dello spazio (x, y, z) che verificano l'equazione e il fatto che non compaia la variabile z nell'equazione ci dice solo che non stiamo imponendo

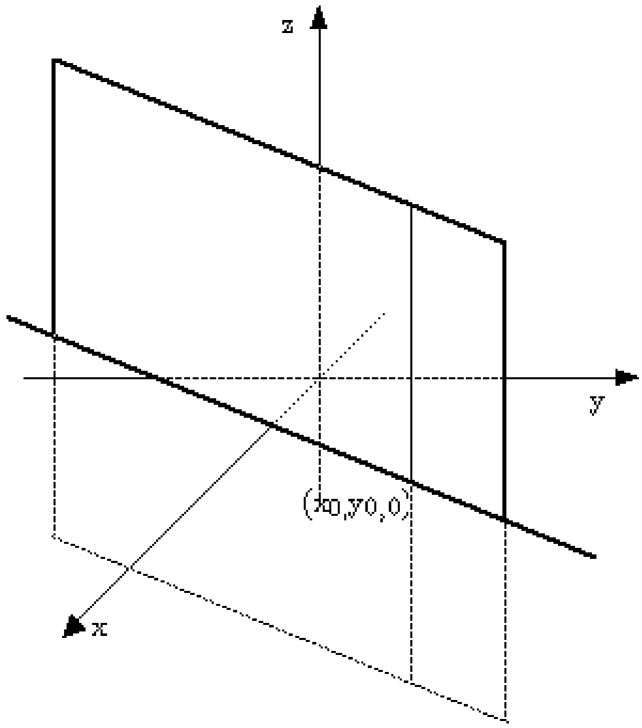

Figura 48: È un piano!

alcun vincolo su z. Cioè se prendo un punto $(x_0, y_0, 0)$ che sta sulla retta del piano xy appena disegnata (per cui $y_0 - 2x_0 + 4 = 0$), qualunque altra terna (x_0, y_0, z) continua a verificare l'equazione e così, quindi, tutti i punti della retta ortogonale al piano xy che passa per il punto $(x_0, y_0, 0)$

Esattamente! Otteniamo il piano ortogonale al piano xy che interseca il piano xy nella retta che abbiamo disegnato nella Figura 47.

Analogamente per ciò che riguarda l'equazione $7x - z - 3 = 0$, è l'equazione di un piano ortogonale al piano xz.

In conclusione per descrivere una retta nello spazio senza far uso di un parametro devo necessariamente usare due equazioni cartesiane e metterle a sistema, in altre parole devo ottenere la retta come intersezione di due piani.

Attenzione! Anche se in un'equazione non ci sono esplicitamente tutte le variabili, per poterla interpretare geometricamente, bisogna sempre tener conto di qual'è "l'ambiente" in cui siamo (retta, piano, spazio,...). Più è "grande" il nostro ambiente più "libertà di movimento" abbiamo.

Esempio 57 L'equazione $x = 3$ può essere interpretata in diversi modi:

1. In $\mathbf{R}$ è un punto

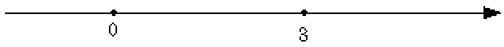

Figura 49: È un punto!

2. In $\mathbf{R}^2$ è una retta

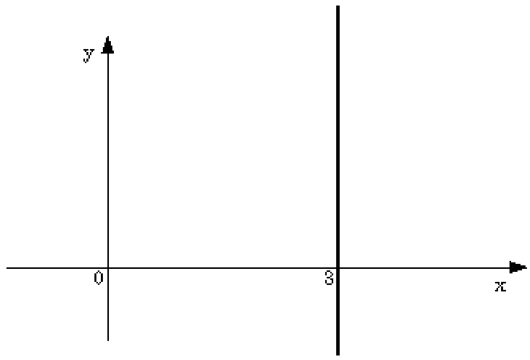

Figura 50: È una retta!

3. In $\mathbf{R}^3$ è un piano

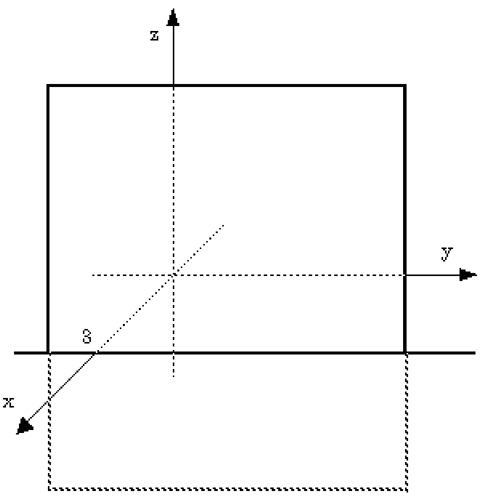

Figura 51: È un piano!

Teorema 58 *Al variare di a,b,c e d in* $\mathbf{R}$*, con la condizione che a, b e c non siano tutti nulli, le equazioni*

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{3}$$

rappresentano tutti i piani di $\mathbf{R}^3$*.*

Infatti fissiamo a,b,c e d in $\mathbf{R}$, con $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e prendiamo un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ che verifica l'equazione (3). Abbiamo già potuto osservare che un'equazione lineare di una sola incognita ha una sola soluzione, mentre non appena le incognite sono più di una è molto facile trovare molte soluzioni, anzi infinite. In questo caso che ci sono 3 incognite, basta dare due valori arbitrari a due di esse e si trova di conseguenza la terza in modo che l'equazione sia verificata. Allora, visto che P_0 è soluzione, questo significa che

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)\,.$$

Se quindi sostituiamo d nell'equazione si ha equivalentemente

$$ax+by+cz+d = 0 \iff a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0 \iff \langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \rangle = 0\,.$$

In conclusione l'equazione (3) è semplicemente la condizione che il vettore $\mathbf{P_0P}$ sia ortogonale al vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Ossia non è altro che **l'equazione cartesiana del piano** passante per il punto P_0 e ortogonale al vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Allora sappiamo determinare l'equazione cartesiana di un piano ogni volta che conosciamo un vettore ad esso ortogonale e un punto per cui deve passare.

Esempio 59 Determiniamo l'equazione cartesiana del piano passante per il punto $P_0 = (0,1,0)$ e ortogonale al vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le componenti del vettore ortogonale ci determinano i coefficienti di x, y e z e poi gli imponiamo di passare per il punto P_0:

$$2x - 5(y-1) + z = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x - 5y + z + 5 = 0\,.$$

Attenzione: L'unica direzione che determina univocamente un piano è quella ad esso ortogonale. Mentre, ovviamente, se prendiamo una direzione parallela a un piano e fissiamo un punto di questo piano, ci sono infiniti altri piani che passano per questo punto e paralleli a questa direzione, tutti i piani che hanno in comune una retta.

Per la stessa ragione è anche chiaro che se devo dire qual'è "l'angolo tra due piani", la cosa più semplice è quella di guardare l'angolo tra i due vettori ad essi ortogonali.

Domanda: Come faccio a stabilire se due piano sono paralleli?...Ma è chiaro, basta che abbiano la stessa direzione ortogonale. Essenzialmente basta che i coefficienti delle variabili x, y e z nelle due equazioni siano proporzionali.

Per esempio i piani di equazioni cartesiane $2x-y+z+1 = 0$ e $-6x+3y-3z+5 = 0$ sono **piani paralleli**. Ma sono solo paralleli o sono addirittura coincidenti?... È facile vedere che sono paralleli (ossia hanno la stessa direzione ortogonale), ma non sono coincidenti! Per esempio il punto $(0,1,0)$ appartiene al primo piano, ma non al secondo.

Allora? Come dovrebbero essere i termini noti perché le due equazioni ci diano lo stesso piano?...I due termini noti devono essere proporzionali con la stessa costante di proporzionalità che c'è tra i coefficienti! Per esempio le due equazioni $2x-y+z+1=0$ e $-6x+3y-3z-3=0$ rappresentano lo stesso piano ($-6x+3y-3z-3=-3(2x-y+z+1)=0$).

Nota: Così come per l'equazione cartesiana di una retta nel piano, anche nel caso dei piani dello spazio, l'equazione cartesiana è unica a meno di un fattore di proporzionalità.

Esercizio 60 Dato il piano π di equazione cartesiana

$$x-y+3=0$$

determinare il valore del parametro α in modo che il piano π' di equazione cartesiana

$$\alpha x+2y+10z=0$$

sia ortogonale a π.

Chiaramente il modo più efficiente di imporre l'ortogonalità tra π e π' è quello di imporla sulle rispettive direzioni ortogonali.

Va bene, quindi basta imporre che i vettori $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}\alpha\\2\\10\end{pmatrix}$ siano ortogonali e questo, ovviamente, lo facciamo imponendo che sia zero il loro prodotto scalare:

$$\langle\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\alpha\\2\\10\end{pmatrix}\rangle=\alpha-2=0$$

da cui segue che α deve essere 2.

E se io vi domandassi se c'è un valore di α per cui il piano di equazione cartesiana

$$x+2y+\alpha z+3=0 \tag{4}$$

è ortogonale al piano

$$x-y+3=0?$$

La risposta è NO! Infatti il prodotto scalare tra i due vettori ortogonali ai piani ($\begin{pmatrix}1\\2\\\alpha\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$) è uguale -1 qualunque sia α, quindi non c'è alcun valore di α per cui i due vettori ortogonali ai piani siano tra di loro ortogonali e quindi i due piani non sono mai ortogonali qualunque sia la scelta di α che facciamo.

Esercizio 61 Determinare le equazione parametriche della retta r passante per i punti $P_1=(1,2,5)$ e $P_2=(2,3,4)$. Quindi determinare il punto di intersezione tra la retta e il piano π di equazione $x+y+3z-2=0$.

Questa domanda in termini meno formali avrei potuto farla anche nel seguente modo: se nel punto P_1 c'è un faretto e nel punto P_2 c'è un oggetto, determinatemi il punto in cui questo proietta l'ombra sul piano π.

Comunque: dobbiamo determinare le equazioni parametriche della retta per P_1 e P_2, e questo lo sappiamo fare. La direzione della retta sarà

$$\mathbf{P_1P_2}=\begin{pmatrix}2-1\\3-2\\4-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

e quindi le equazioni parametriche saranno

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 5 - t \end{cases} .$$

Quindi rimane solo da intersecare la retta con il piano. Le equazioni parametriche della retta ci dicono che, qualsiasi sia il valore del parametro t, le terne $(1 + t, 2 + t, 5 - t)$ appartengono alla retta, quindi dobbiamo vedere se c'è, e qual'è, una terna così che appartiene anche al piano. La sostituiamo a x, y e z nell'equazione del piano e abbiamo

$$(1 + t) + (2 + t) + 3(5 - t) - 2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = 16\,,$$

cioè solo in corrispondenza di tale valore la retta tocca il piano e il punto di intersezione lo troviamo cercando il punto della retta corrispondente al valore del parametro uguale a 16, ossia il punto $(17, 19, -11)$ ottenuto sostituendo $t = 16$ nelle equazioni della retta.

Il seguente esercizio è una buona applicazione del prodotto vettoriale alla geometria analitica.

Esercizio 62 Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per i punti $P_1 = (2, 1, 0)$, $P_2 = (-3, 2, -1)$ e $P_3 = (4, 6, 2)$.

Svolgimento: Sappiamo che per tre punti non allineati passa un solo piano. Quindi la domanda è posta bene e sarà possibile trovare la soluzione.

Noi abbiamo capito che c'è un metodo piuttosto rapido ed efficiente che ci permette di dedurre l'equazione cartesiana di un piano una volta che conosciamo il vettore ad esso ortogonale e un punto per cui questo passa. La prima informazione in questo caso non ci viene data esplicitamente, quindi dovremo fare un paio di passaggi per dedurla. È presto fatto. Il vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ortogonale al piano sarà ovviamente ortogolale a tutte le direzioni parallele al piano. In particolare se conosciamo un segmento sul piano questo starà su una direzione ortogonale a $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Ma noi conosciamo dei segmenti appartenenti al piano: i segmenti che uniscono i tre punti P_1, P_2 e P_3. Allora basta determinare, per esempio i due vettori $\mathbf{P_1P_2}$ e $\mathbf{P_1P_3}$ e cercare un vettore ad essi ortogonale.

Ricordiamoci che dati due punti (dello spazio) possiamo determinare il vettore parallelo al segmento che li unisce semplicemente facendo la differenza delle coordinate dei due punti

$$\mathbf{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} .$$

In questo caso particolare abbiamo

$$\mathbf{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -3 - 2 \\ 2 - 1 \\ -1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 4 - 2 \\ 6 - 1 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Come dicevamo questi due vettori sono paralleli al piano. Non rimane che applicare il prodotto vettoriale per ottenere un vettore che sia ortogonale a entrambi, da scegliere quindi come vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{P_1P_2} \times \mathbf{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5 \\ -2+10 \\ -25-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -27 \end{pmatrix}.$$

A questo punto la direzione ortogonale al piano è trovata e basta usarla imponendo anche il passaggio per uno dei tre punti (per esempio P_1)

$$7(x-2) + 8(y-1) - 27z = 0 \quad \Longleftrightarrow 7x + 8y - 27z - 22 = 0$$

questa è l'equazione del piano che stavamo cercando!