Lezione 9: Le matrici

Ancora un po' di sistemi in generale: le notazioni

Nella lezione precedente abbiamo visto vari esempi di sistemi lineari in cui si verificavano i seguenti casi: una sola soluzione, infinite soluzioni o nessuna soluzione.

Noi considereremo i sistemi lineari in generale e cercheremo dei criteri per classificarne il comportamento (incompatibili o compatibili, ...). Per trattare le cose in generale ci servono un po' di notazioni. Preparatevi....arrivano molti simboli, ma non è niente di che, ci abitueremo presto.

Allora se vogliamo scrivere in generale un sistema lineare con n incognite e m equazioni (evidentemente sto sottointendendo che n e m siano due numeri naturali), lo scriveremo così:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = & b_2 \\ ..... & . \\ ... & . \\ ..... & . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = & b_m, \end{cases} \tag{7}$$

dove, come al solito, x_1, x_2, ...,x_n sono le incognite, a_{ij} con $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$, sono dei numeri reali fissati, *i coefficienti*, mentre b_i, $i = 1, ..., m$, sono i *termini noti.*

Anche se a prima vista possono intimorire, se ci pensate bene, questi simboli sono molto facili da interpretare: I coefficienti hanno due indici perchè ci dicono in quale equazione stanno (il primo indice) e di quale incognita sono coefficienti (il secondo indice). Quindi per esempio il coefficiente a_{34} è il coefficiente della variabile x_4 nella terza equazione. Mentre il termine noto b_2 sarà ovviamente quello della seconda equazione (così ognuno ha il suo posto).

Ovviamente una volta assegnati tutti i coefficienti, abbiamo automaticamente assegnato il sistema e viceversa.

Per esempio il sistema con due equazioni con due incognite

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

i coefficienti sono: $a_{11} = 2$, $a_{12} = -1$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 2$, mentre $b_1 = 3$ e $b_2 = 1$. Oppure... quanto vale il coefficiente a_{31} nell'ultimo sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Visto che sarebbe il coefficiente di x_1 nella terza equazione, chiaramente si ha $a_{31} = 0$!

Abbiamo visto nella lezione precedente che la compatibilità o meno dei sistemi può essere legata alla lineare dipendenza e indipendenza dei vettori costituiti dai coefficienti delle singole incognite. Cercheremo di studiare a fondo questa relazione. Ma visto che l'unica cosa che conta sono i coefficienti, incominciamo a rendere più leggera la notazione e riduciamo all'essenziale il numero di simboli che siamo "costretti" a scrivere. Per fare questo useremo il "linguaggio" delle *matrici.* Le matrici (che ora definiremo per bene e con le quali impareremo a fare varie operazioni) non sono nient'altro che delle "tabelle" di numeri.

Le matrici e i sistemi

Definizione 72 *Chiameremo* **matrice** $m \times n$ *(m righe e n colonne) una tabella di nm numeri reali che indichiamo con*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Nota: In generale, quando vorremo indicare una matrice senza scrivere tutti i suoi elementi, useremo delle lettere maiuscole (A, B, ...). Se poi vorremo indicare una matrice A i cui elementi sono a_{ij} o una matrice B i cui elementi vogliamo indicare con b_{ij}, senza però scrivere tutta la tabella come abbiamo fatto sopra, scriveremo più brevemente $A = (a_{ij})$ o $B = (b_{ij})$, $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$.

Esempi

1. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -7 \\ 4 & 210 & 2 \end{pmatrix}$$

   è una matrice 3×3 (3 per 3), cioè una matrice con 3 righe e 3 colonne.

2. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

   è una matrice 2×2 (2 righe e 2 colonne).

3. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   è una matrice 2×3 (2 righe e 3 colonne).

4. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

   è una matrice 1×5 (1 riga e 5 colonne).

5.
$$A = \begin{pmatrix} \pi \\ 3 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix}$$
è una matrice 4×1 (4 righe e 1 colonna).

Nota: Negli ultimi due esempi le matrici hanno solo una riga o solo una colonna. In questo caso le chiameremo anche *vettore riga* e *vettore colonna*. Ricordate che analogamente a quanto visto per i vettori del piano e dello spazio, possiamo anche considerare le operazioni tra vettori (riga o colonna) con più di 3 coordinate (come negli esempi 4 e 5 visti sopra) e per questi considerare la nozione di lineare dipendenza e indipendenza. Ma andiamo con ordine, questo lo capiremo più avanti.

Definizione 73 *Le matrici che hanno lo stesso numero di righe e di colonne si dicono* **matrici quadrate**.

Le prime due matrici dell'esempio precedente sono quadrate!

Vediamo finalmente cosa c'entrano le matrici con i sistemi lineari. Prendiamo per esempio il sistema lineare
$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + 2z = 1 \\ -x - y + 3z = 2\,. \end{cases}$$
A questo sistema associamo due matrici che ci serviranno per dedurne il "comportamento":
La **matrice dei coefficienti**
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
e la **matrice completa**
$$A_b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
La matrice dei coefficienti è ottenuta mettendo nella prima riga i coefficienti della prima equazione, nella seconda riga i coefficienti della seconda equazione e così via. La matrice completa è ottenuta dalla precedente aggiungendo la colonna dei termini noti.

Attenzione: Perchè sia chiaro qual'è la matrice associata a un certo sistema e viceversa bisogna stare attenti all'ordine con cui si mettono i coefficienti. Quindi si deve decidere un ordine per le incognite e in quell'ordine assegnare gli elementi della matrice (nella prima colonna si metteranno i coefficienti della prima incognita, nella seconda colonna i coefficienti della seconda incognita e così via). Per esempio al sistema
$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2y - x = 1 \end{cases}$$
è associata la matrice dei coefficienti
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\ !$$

E **non** la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

che invece è la matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x - y = 1\,. \end{cases}$$

Se fate una prova questi due sistemi sono molto diversi (hanno diverse soluzioni). Analogamente bisogna fare attenzione a come si sceglie la colonna dei termini noti. Per evitare ambiguità dobbiamo scegliere una regola e poi seguirla. Seguendo la regola che qui abbiamo scelto (implicitamente scrivendo il sistema in forma generale così come abbiamo fatto all'inizio della lezione) per il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x + 3y + \sqrt{2} = 0\,. \end{cases}$$

la matrice completa è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e non

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

che invece è la matrice completa del sistema

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x + 3y = \sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = -1 \\ x + 3y - \sqrt{2} = 0\,. \end{cases}$$

Quindi, più in generale, a un sistema di m equazioni e n incognite della forma data in (7) si associa la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e la matrice completa

$$A_b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ . & & & . & . \\ . & & & . & . \\ . & & & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Vedremo come studiando alcune "proprietà" della matrice dei coefficienti e della matrice completa di un dato sistema e seconda della "relazione" in cui queste stanno il sistema avrà diversi comportamenti, per esempio dedurremo un criterio per stabilire la compatibilità o meno di un sistema.

Ma prima impariamo ad usare le matrici.

Un po' di algebra delle matrici

Abbiamo introdotto le matrici per rendere più "snelle" le notazioni nello studio dei sistemi. Allora andiamo fino in fondo e cerchiamo di imparare a "fare i conti" con le matrici. Vedrete che definere un "po' di operazione" tra le matrici ci permetterà di manipolare sistemi complicati senza "scrivere troppo".

Notazione: In seguito indicheremo l'insieme delle matrici $m \times n$ con il simbolo $\mathcal{M}_{mn}$.

La prima operazione che definiamo è:

La somma tra matrici: Sommiamo due matrici $m \times n$ (cioè due matrici che hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne) "componente per componente", nel senso che la matrice ottenuta facendo la somma avrà per elemento della prima riga e prima colonna, la somma dell'elemento della prima riga e prima colonna della prima matrice più l'elemento della prima riga e prima colonna della seconda matrice e così per tutti gli altri "posti". Insomma se ho due matrici $m \times n$, $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ (quindi $A, B \in \mathcal{M}_{mn}$) la matrice "somma", $C = A + B$ è ancora una matrice $m \times n$ (ossia appartiene a $\mathcal{M}_{mn}$) i cui elementi sono $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Esempio 74 Consideriamo le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 4 \\ 1 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo la matrice somma $A + B$. Questa sarà ancora una matrice 2×3 e facendo la somma componente per componente si ha

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 3+\sqrt{3} & -1+4 \\ 5+1 & -2+9 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3+\sqrt{3} & 3 \\ 6 & 7 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}.$$

È altrettanto naturale introdurre

La moltiplicazione di una matrice per uno scalare: Così come facevamo per i vettori, se moltiplichiamo una matrice $A \in \mathcal{M}_{mn}$ per uno scalare λ, il risultato sarà la matrice $m \times n$, λA, ottenuta da A moltiplicando tutti i suoi elementi per λ. È più facile a farsi che a dirsi...

Esempio 75 Se A è la matrice dell' esempio precedente, la matrice $2A$ sarà

$$2A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 5 & 2 \cdot (-2) & 2 \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 10 & -4 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

oppure

$$-3A = \begin{pmatrix} -6 & -9 & 3 \\ -15 & 6 & -3\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Osservazione Se ci pensate, fin qui è tutto già stato fatto. Infatti l'insieme $\mathcal{M}_{mn}$ non è altro che un ulteriore esempio di spazio vettoriale. Di che dimensione? Beh, basta far mente locale e decidere uanti sono i numeri che mi servono per scrivere una matrice $m \times n$.... Ma ovviamente ce ne servono $m \cdot m$, questa è proprio la dimensione di questo spazio vettoriale.

Domanda Secondo voi quali matrici (e quante) formano la base canonica delle matrici 3×4?

Scrivetele e fate la prova che con quelle che avete scritto potete scrivere tutte le altre.

Vediamo finalmente un'operazione nuova... e piuttosto utile.

Prodotto righe per colonne: Date due matrici, la matrice A $m \times n$ e la matrice B $n \times h$ (la prima con un numero di colonne uguale al numero delle righe della seconda), il prodotto righe per colonne è la matrice che si ottiene

mettendo nel "posto ij" il "prodotto scalare" tra la i-esima riga della prima per la j-esima colonna della seconda

Il risultato è una matrice $m \times h$.

Proviamo a fare un esempio di come si fa questo prodotto.

Esempio 76

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

A è una matrice 3×2 e B una matrice 2×2. Il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di B, allora posso fare il prodotto AB, mentre secondo questa definizione non è possibile fare B per A (adesso capirete perché). Facciamo il prodotto righe per colonne. La regola ci dice che la matrice prodotto $C = AB$ avrà come elemento della prima riga e prima colonna (il "posto 1 1", cioè c_{11}) il prodotto scalare della prima riga di A e la prima colonna di B,

$$c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 7\,.$$

Così, per esempio, il "posto 2 1" (c_{21}) è dato dal prodotto (scalare, cioè "somma dei prodotti delle componenti") della seconda riga di A con la prima colonna di B, ossia

$$c_{21} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 = -1\,.$$

Continuando così si ottiene la seguente matrice 3×2

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ -1 & -2 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Vi torna? Facciamo un controllo. Per esempio verifichiamo che sia giusto il $c_{32} = 12$. Dovrebbe essere il risultato del prodotto scalare della terza riga di A con la seconda colonna di B. Infatti: $12 = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 6$.

Capite? Il fatto che le due matrici siano in questa relazione, la prima con un numero di colonne uguale al numero delle righe della seconda, assicura che nel fare questi prodotti scalari le righe e le colonne che si considerano (si moltiplicano) abbiano lo stesso numero di elementi. Questa è la ragione per cui non possiamo fare il prodotto di B per A. In questo caso infatti se cercassimo di fare questo prodotto (righe per colonne) e considerassimo per esempio la prima riga di B e la prima colonna di A avremmo per una due elementi mentre per l'altra tre elementi.

Esempio 77 Facciamo ora il prodotto righe per colonne di

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \pi \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Questa volta le due matrici sono quadrate quindi non c'è alcun vincolo che ci costringa a fare il prodotto con un certo ordine. Facciamoli entrambi, sia AB sia BA.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & \pi \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + \pi \cdot 3 & 2 \cdot 7 + \pi \cdot 3 \\ (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 3 & (-1) \cdot 7 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 + 3\pi & 14 + 3\pi \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$$

mentre

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \pi \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) & 4 \cdot \pi + 7 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) & 3 \cdot \pi + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4\pi \\ 3 & 3\pi \end{pmatrix}.$$

Come vedete i due prodotti si possono fare ma i risultati sono diversi.

Attenzione: In "generale" il prodotto righe per colonne tra matrici **NON è commutativo**.

Dico "in generale" perchè ovviamente ci saranno dei casi in cui questo prodotto sarà commutativo, ma questo quando le due matrici avranno una struttura particolare (mentre se un operazione è commutativa lo deve essere su qualunque coppia di elementi).

Esempio 78 Prendiamo le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Due matrici fatte così si dicono **diagonali** (cioè tali che gli unici elementi non nulli sono quelli della diagonale). Se avete capito come si fa questa operazione di prodotto righe per colonne non vi sarà difficile verificare che

$$AB = \begin{pmatrix} 3\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi & 0 \\ 0 & 0 & 7\sqrt{2} \end{pmatrix} = BA$$

cioè che in questo caso (e per tutte le coppie di matrici diagonali) il prodotto è commutativo.

Pur non essendo in generale commutativo questo prodotto righe per colonne verifica alcune proprietà utili nel fare i conti. Ve ne cito intanto alcune.

1. Se $A \in \mathcal{M}_{nk}$, $B \in \mathcal{M}_{km}$ e $C \in \mathcal{M}_{mh}$ (ossia posso calcolare AB e BC), allora

$$A(BC) = (AB)C$$

   (ossia il prodotto righe per colonne è **associativo**)

2. $A \in \mathcal{M}_{nk}$, $B, C \in \mathcal{M}_{km}$, allora

$$A(C + B) = AC + AB$$

   (ossia è **distributivo rispetto alla somma**)

3. Se $A \in \mathcal{M}_{nk}$, $B \in \mathcal{M}_{km}$ e $\alpha \in \mathbf{R}$, allora
$$(\alpha A)B = A(\alpha B)\,.$$

Le altre proprietà verranno a tempo debito.

Esempio 79

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ancora una volta possiamo fare il prodotto righe per colonne di A per B perché le righe A (matrice 3×4) e la colonna di B (matrice 4×1) hanno lo stesso numero di elementi, 4. Il risultato del prodotto sarà una matrice 3×1 i cui elementi (i 3 elementi dell'unica colonna) si otterranno facendo il prodotto scalare di ciascuna delle righe di A per la colonna di B. Calcoliamo il prodotto scalare usando la "regola" che conosciamo per calcolare il prodotto scalare tra vettori con le componenti, estesa in modo ovvio se si hanno più di tre componenti, come in questo caso. Quindi

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 9 + 4 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 3 + (-4) \cdot (-2) + 3 \cdot 9 + 1 \cdot (-2) \\ (-2) \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 0 \cdot 9 + 5 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 33 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Vi torna?

Quest'ultimo esempio mi da lo spunto per farvi capire perché abbiamo introdotto questa operazione e in che occasione la userete.

Guardate questo sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -17 \\ -4x_2 + 3x_3 + x_4 = 33 \\ -2x_1 + 5x_4 = -16 \end{cases}$$

È un sistema con quattro incognite, la cui matrice dei coefficienti (se ci fate caso) è proprio la matrice A dell'esempio precedente, mentre la colonna dei termini noti è data dal vettore

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -17 \\ 33 \\ -16 \end{pmatrix}\,.$$

Se ora indichiamo con $\mathbf{x}$ una colonna con 4 componenti formata dalle quattro incognite, cioè

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\,,$$

possiamo riscrivere questo sistema in modo molto più sintetico usando le "matrici" come segue

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

(diremo che in questo modo il sistema è dato in "forma matriciale"), vedete quanto è più veloce?.

Forse, però, ancora non ci credete. Facciamo la verifica. Calcoliamo (usando il prodotto righe per colonne) il prodotto tra A e $\mathbf{x}$

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \\ -4x_2 + 3x_3 + x_4 \\ -2x_1 + 5x_4 \end{pmatrix}.$$

Ma allora vedete che richiedere che l'equazione $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sia soddisfatta, equivale a chiedere che il vettore qui sopra coincida (componente per componente) con il vettore $\mathbf{b}$, ossia che il sistema da cui siamo partiti sia soddisfatto.

Domanda: Sapreste dirmi senza esitazioni qual'è una soluzione del sistema appena considerato? .... riguardate il prodotto che abbiamo calcolato nell'ultimo esempio della pagina precedente!....Il risultato di AB è proprio la colonna $\mathbf{b}$ dei termini noti del sistema. Ma allora, ovviamente, i valori della colonna B sono una soluzione del sistema (l'ho scelto apposta!). Cioè la quaterna

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

è una soluzione (poi noi sappiamo che in questo caso ce ne sono infinite altre perchè il rango del sistema è minore del numero delle incognite, ma questa è un'altra storia).

Conclundendo. Il sistema generale che abbiamo scritto all'inizio, potrà essere scritto in forma matriciale come

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

dove A è la matrice dei coefficienti, $\mathbf{b}$ la colonna dei termini noti e $\mathbf{x}$ il vettore delle incognite

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$