Corso di Laurea in Tecniche per l'Architettura e la Costruzione

MATEMATICA 2 - Garroni

ESERCITAZIONE N.5

1. Calcolare i seguenti integrali doppi

   (a)
   $$\int\int_D (x^2 + yx)\,dx\,dy \qquad D = [1,2] \times [3,4]$$

   (b)
   $$\int\int_D \cos y \sin y\,dx\,dy \qquad D = [0,\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$$

   (c)
   $$\int\int_D \cos(x+y)\,dx\,dy \qquad D = [0,\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$$

   (d)
   $$\int\int_D \frac{1}{x+y+3}\,dx\,dy \qquad D = [0,1] \times [0,2]$$

2. Calcolare i seguenti integrali doppi

   (a)
   $$\int\int_D (2x+3y)\,dx\,dy \qquad D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ -1 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le x^2\}$$

   (b)
   $$\int\int_D xy\,dx\,dy \qquad D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 2\,,\ 0 \le y \le \mathrm{e}^x\}$$

   (c)
   $$\int\int_D \cos x^2\,dx\,dy \qquad D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 0 \le x \le \sqrt{\pi}\,,\ 0 \le y \le x\}$$

   (d)
   $$\int\int_D \mathrm{e}^{x+y}\,dx\,dy \qquad D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 3x\}$$

3. Determinare, usando gli integrali doppi, il baricentro del trapezio di estremi $P_1 = (1,2)$, $P_2 = (0,4)$, $P_3 = (2,1)$ e $P_4 = (3,2)$.

4. Senza calcolarli, esprimere i seguenti integrali doppi invertendo l'ordine d'integrazione

   (a)
   $$\int_0^1 \left(\int_y^1 f(x,y)\,dx \right) dy$$

   (b)
   $$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx$$

   (c)
   $$\int_0^3 \left(\int_{-x}^{x^2} f(x,y)\,dy \right) dx$$

   Suggerimento: Determinare i domini su cui si integra e poi esprimerli come domini normali rispetto a x e rispetto y.

5. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_S (x-y)\, dx\, dy$$

dove S è il semicerchio di centro l'origine e raggio r, contenuto nel semipiano delle y positive.

6. Determinare il volume contenuto tra i due paraboloidi $z = x^2 + y^2$ e $z = 1 - (x^2 + y^2)$.

Sia $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq r^2\}$, ossia il cerchio centrato nell'origine di raggio r. Calcolare usando un cambiamento di coordinate polari i seguenti integrali doppi

(a)
$$\int\int_D 2(x^2+y^2) dx\, dy$$

(b)
$$\int\int_D \sqrt{x^2+y^2} dx\, dy$$

(c)
$$\int\int_D 3|x| dx\, dy$$

(d)
$$\int\int_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\, dx\, dy$$

(e)
$$\int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx\, dy$$

7. (a) Disegnare il dominio

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 4\} \cap \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ y - |x| \leq 0\}$$

(b) Usando le coordinate polari terminare il baricentro del dominio D_1.

(c) Determinare il baricentro del dominio

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 4\} \cap \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 :\ y \leq \sqrt{2}\}$$

Suggerimento: Notare che il dominio D_2 si puo' ottenere come l'unione del dominio D_1 e di un triangolo isoscele di altezza $\sqrt{2}$ di cui e' facile calcolare il baricentro. Quindi usare la linearità dell'integrale.

8. Determinare il volume del tetraedro di estremi $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(0,3,0)$ e $(0,0,1)$.

9. Determinare il bacentro del tetraedro dell'esercizio precedente.

10. Determinare i seguenti integrali tripli

(a)
$$\int\int\int_V (x^2 + yzx)\, dx\, dy\, dz \qquad V = [1,2] \times [3,4] \times [0,1]$$

(b)
$$\int\int\int_V (2x + 3z)\, dx\, dy\, dz \qquad V = [-1,1] \times [0,2] \times [0,1]$$

11. Calcolare il seguente integrale triplo integrando per fette

$$\int\int\int_V (x - y + z)\, dx\, dy\, dz$$

con le seguenti scelte per il dominio V:

(a) $V = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ (sfera)

(b) $V = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leq 1\ ,\ -1 \leq z \leq 1\}$ (cilindro)

(c) $V = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 :\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\ ,\ 0 \leq z \leq 2\}$ (cono).