TUTORAGGIO DI ANALISI MATEMATICA I
7 III 2013

(1) Verificare, usando la definizione che le successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ definite da

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{n^k}, \quad k \in \mathbb{N} \\ y_n &= \sin \frac{1}{n} \end{aligned}$$

(con $n \in \mathbb{N}$) sono di Cauchy.

(2) Usando la definizione, verificare che, per ogni $q \in (-1, 1)$, la successione $\{x_n\}$ definita da

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$$

è di Cauchy e calcolarne il limite per $n \to +\infty$.

(3) Una mappa $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *Lipschitziana* se esiste una costante $L > 0$ per cui si abbia

$$|\phi(x) - \phi(y)| \le L|x - y| \qquad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

Considerate una mappa $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitziana ed una successione reale $\{x_n\}$, dimostrare che

$$\{x_n\} \text{ è di Cauchy } \Rightarrow \ \{\phi(x_n)\} \ \text{ è di Cauchy.}$$

Esibire, inoltre, una successione di Cauchy $\{x_n\}$ ed una mappa $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che la successione $\{\varphi(x_n)\}$ non sia di Cauchy.

(4) Dimostrare o confutare con degli esempi le seguenti affermazioni
- il prodotto di una successione di Cauchy per una successione limitata dà una successione di Cauchy;
- ogni sottosuccessione di una successione di Cauchy è ancora di Cauchy;
- se $\{a_{2n}\}$ e $\{a_{2n+1}\}$ sono di Cauchy, allora $\{a_n\}$ è di Cauchy;
- se $\{a_n + b_n\}$ è di Cauchy, allora $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono di Cauchy.

(5) Mostrare che gli assiomi di campo totalmente ordinato del libro di Rudin (Def 1.5 e 1.7 capitolo 1) sono equivalenti a quelle del libro di Cecconi-Stampacchia (Proprietà 8.6 i e ii capitolo 1)

(6) Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni reali di Cauchy. Dimostrare che le successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ definite da

$$x_n := a_n + b_n, \quad y_n := a_n \cdot b_n,$$

sono di Cauchy.

(7) Siano $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ due successioni reali tali che $|a_n - b_n| \to 0$ e $b_n \neq 0$ definitivamente. Si dimostri che $\frac{a_n}{b_n} \to 1$.

(8) Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni reali di Cauchy. Dimostrare che la successione $\{x_n\}$ definita da

$$x_n := |a_n - b_n|$$

è di Cauchy.

(9) Sull'insieme delle successioni reali di Cauchy, si definisca la relazione $\sim$ nel modo seguente
$$\{a_n\} \sim \{b_n\} \text{ se } x_n \to 0,$$
dove la successione $\{x_n\}$ è definita come nell'esercizio precedente. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

(10) Una successione $\{r_n\}$ a valori in $(\mathbb{Q}, \leq)$ si dice infinitesima razionale se
$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ si ha $|r_n| < \varepsilon$ definitivamente.
Mostrare che le successioni $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ e $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ sono infinitesime razionali.
Considerare l'immersione canonica $i : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Mostrare che $\{r_n\}$ è infinitesima razionale se e solo se $\{i(r_n)\}$ è infinitesima nel senso usuale. Quale proprietà è stata rilevante? Si può dimostrare questa proprietà senza usare nessuna proprietà di completezza (o continuità) di $\mathbb{R}$, ma solo la definizione di $\mathbb{R}$ data nell'esercizio successivo?

(11) Formulare la definizione di successione di Cauchy razionale.
Sia $\mathcal{C}$ l'insieme delle successioni di Cauchy razionali e $\simeq$ la relazione di equivalenza in $\mathcal{C}$ definita ponendo $\{r_n\} \simeq \{s_n\}$ se $\{r_n - s_n\}$ è infinitesima razionale. Sia $[\{r_n\}]$ la classe di equivalenza di $\{r_n\}$. Definire nell'insieme quoziente $\mathbb{R} := \mathcal{C}/\simeq$ somma e prodotto:
$$[\{r_n\}] + [\{s_n\}] := [\{r_n + s_n\}]$$
$$[\{r_n\}] \cdot [\{s_n\}] := [\{r_n \cdot s_n\}].$$
Mostrare che queste operazioni sono indipendenti dalla scelta del rappresentante e godono delle proprietà associativa, commutativa, distributiva e rendono $\mathbb{R}$ un campo.

(12) Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dei seguenti insiemi di numeri reali
$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{\frac{3n-2}{2n} \,|\, n \in \mathbb{N}\right\} \\ E_2 &= \left\{\frac{t+1}{t-2} \,|\, t \in \mathbb{R}, t > 2\right\} \\ E_3 &= \left\{3n^2 + 3n - 1 \,|\, n \in \mathbb{N}\right\} \\ E_4 &= \left\{3n^2 - 1000n - 1 \,|\, n \in \mathbb{N}\right\} \\ E_5 &= \left\{|x| \,|\, x^2 + x < 2\right\}. \end{aligned}$$

(13) Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme di numeri reali
$$E = \left\{x + \frac{1}{x^n} \,|\, x > 0,\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

(14) Sia $K \subset \mathbb{R}$ limitato. Dimostrare che esiste una successione $\{x_n\} \subset K$ tale che
$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \sup K.$$

(15) Si disegni il seguente sottoinsieme del piano, al variare di $a \in \mathbb{R}$
$$E_a := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x_1| \leq 1,\, |x_2| \leq a\right\}.$$

(16) Si disegni il seguente sottoinsieme del piano
$$E := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x_2| \leq 1,\, |x_1| + |x_2| - 2 \leq 0\right\}.$$

(17) Scrivere una formula per rappresentare rispettivamente un segmento "verticale", un quadrato centrato nell'origine, una "striscia" orizzontale di altezza uno e lunghezza "infinita".