Programma del corso di Analisi Matematica 1

Corso di Laurea in Matematica

Prof. A. Garroni - Canale Dl-Pa

1. Elementi di spazi metrici e di topologia

1.1 Completezza di $\mathbb{R}$. Richiami: Estremo superiore, proprietà Archimedea, Assioma degli intervalli incapsulati. Definizione di campo ordinato. Definizione e esempi di Coppie di Classi Separate (CCS). Elementi separatori di CCS. Definizione di completezza con le CCS. Equivalenza tra l'assioma delle CCS e l'assioma dell'esistenza dell'estremo superiore. Insiemi induttivi. Definizione di $\mathbb{N}$. Teorema: I campi ordinati completi sono archimedei. Completezza alla Cauchy in $\mathbb{R}$: le successioni convergenti sono di Cauchy; le successioni di Cauchy in $\mathbb{R}$ sono convergenti. Completamento dei razionali con il metodo di Cantor (cenni). Conseguenze: densità dei numeri razionali, identificazione degli allineamenti decimali.

1.2 Esempi di spazi metrici. I complessi. Richiami veloci sugli spazi vettoriali di dimensione finita (avendo in mente $\mathbb{R}^2$): prodotto scalare, proprietà. Definizione di norma (norma euclidea). Distanza indotta da una norma. Definizione di distanza. Spazio metrico. Esempio della metrica discreta. Definizione di sfera e intorno sferico. Altri esempi di metriche in $\mathbb{R}^2$. Il campo complesso. Introduzione delle operazioni di campo in $\mathbb{R}^2$. Unità immaginaria. Rappresentazione algebrica: parte reale e parte immaginaria. Identificazione dei reali come sottocampo dei complessi. Coniugato e modulo. Formula di Eulero. Interpretazione geometrica del prodotto tra numeri complessi. Potenze di numeri complessi. Radici di numeri complessi. Esempi.

1.3 Topologia in $\mathbb{R}^n$. Elementi di topologia in uno spazio metrico (avendo in mente $\mathbb{R}^n$, o meglio $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$). Definizione di punti interni, esterni e di frontiera. Punti isolati e punti di accumulazione. Gli insiemi con punti di accumulazione sono infiniti. Derivato di un insieme e insiemi perfetti. Aperti e chiusi (definizione e esempi). Chiusura e insiemi densi (densità degli irrazionale nei reali). Caratterizzazione dei chiusi. I perfetti sono chiusi, ma non è vero il viceversa. Unione e intersezione di chiusi e aperti. Teorema di Bolzano-Weierstrass. Ogni insieme chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ ammette massimo e minimo. Ricoprimenti di aperti. Definizione di insieme compatto. Teorema di Heine-Borel.

2. Successioni e serie

2.1 Successioni in uno spazio metrico. Esempi. Successioni convergenti in R^n. Equivalenza con la convergenza per componenti. Nozioni topologiche e successioni. Compattezza sequenziale. Heine-Borel per la compattezza sequenziale. Classe limite di una successione limitata. Cenni sulla definizione di classe limite nei reali estesi ($\mathbb{R}^*$). Ogni successione converge se e solo se tutte le sue sottosuccessioni convergono allo stesso limite. Chiusura della classe limite di una successione e conseguenze. Definizione e caratterizzazioni di limsup e di liminf di una successione in $\mathbb{R}$. Successioni di Cauchy in uno spazio metrico. Completezza alla Cauchy in uno spazio metrico. Completezza di $\mathbb{C}$ e in $\mathbb{R}^n$. Successioni definite per ricorrenza. Punto fisso. Definizione di contrazione. Teorema delle contrazioni.

2.2 Serie reali o complesse. Carattere di una serie. Criterio di Cauchy per le serie. Condizione necessaria per la convergenza di una serie. Esempi. Serie armonica e serie armonica generalizzata. Serie telescopiche. Serie geometrica nei reali e nei complessi. Esempi relativi alla proprietà associativa e commutativa delle somme infinite. Linearità delle serie. Convergenza assoluta. Convergenza delle serie a segni alterni, e loro interpretazione come parte reale di una serie complessa di termine generico $a_n i^n$. Criterio di Leibniz (cenni di dimostrazione). Serie a termini non negativi. Criterio del confronto e criterio del confronto asintotico. Criterio della radice. Criterio del rapporto. Criterio integrale. Permutazioni e riordinamenti. Teorema di Riemann (sui riordinamenti delle serie convergenti assolutamente e semplicemente), dimostrazione della prima parte e cenni della dimostrazione della seconda parte. Somma e prodotto di serie. Enunciato del Teorema che assicura la convergenza della serie prodotto di due serie.

2.3 Applicazione agli integrali impropri. Integrale improprio su $[a, +\infty)$ e integrali impropri di funzioni illimitate in $(a, b]$. Esempi: la funzione $\frac{1}{x^\alpha}$; integrali divergenti, integrali oscillanti. Valore principale. Criterio integrale per le serie, formulato usando l'integrale improprio. Integrale di funzioni positive. Teorema del confronto. Teorema del confronto asintotico. Funzioni di segno variabile, integrale assolutamente convergente. Teorema: la convergenza assoluta dell'integrale implica l'integrabilità impropria. Integrale di Dirichlet, integrale di Fresnel. La funzione Gamma. Studi di funzioni integrali.

3. Continuità

3.1 Funzioni e limiti in spazi metrici. Funzioni su spazi metrici. Funzioni da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$, funzioni additive e omogenee, funzioni lineari e affini. Esempi di funzioni vettoriali di una variabile e loro interpretazione come parametrizzazioni di curve. Esempi di funzioni da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$. Funzioni complesse: coniugio, esponenziale. Definizione di limite per funzioni tra spazi metrici. Esempi. Teorema ponte per la caratterizzazione del limite attraverso il limite di successioni. Unicità del limite. Operazioni con i limiti. Definizione di continuità.

3.2 Continuità e topologia. Topologia relativa in un sottoinsieme E di uno spazio metrico. Caratterizzazioni di continuità: la controimmagine di un aperto è aperta, di un chiuso è un chiusa. L'insieme degli zeri di una funzione continua è chiuso, due funzioni continue che coincidono su un denso coincidono ovunque. Continuità e compattezza: L'immagine di compatti è compatta, esempi e contro esempi. Teorema di Weierstrass (dimostrazione topologica e dimostrazione metrica). Generalizzazioni del teorema di Weierstrass: semicontinuità inferiore e superiore, coercività. Teorema sulla continuità della funzione inversa di una funzione continua biettiva da un compatto. Omeomorfismi. Nozioni che si mantengono per omeomorfismi. Connessione: definizione di insiemi separati, definizione di connessi. Connessione per spezzate, cenni sulla connessione per archi. Teorema che generalizza il teorema dei valori intermedi. La connessione dell'immagine non è una caratterizzazione delle funzioni continue.

3.3 Uniforme continuità. Problema dell'estensione delle funzioni continue: esempio di estensione di funzioni lipschitziane. Definizione di funzione uniformamente continua in un insieme. Confronto tra continuità e uniforme continuità. Esempi. Teorema di Heine-Cantor sulle funzioni continue in un compatto. Esempi e controesempi. Estensione delle funzioni uniformemente continue. Applicazione del Teorema di Heine-Cantor per mostrare l'integrabilità delle funzioni continue.

4. Successioni e serie di funzioni

4.1 Successioni di funzioni Molti esempi. Convergenza puntuale. Proprietà che si mantengono con la convergenza puntuale: segno, monotonia, convessità. Proprietà che non si mantengono con la convergenza puntuale, esempi: limitatezza, continuità, integrabilità, integrabilità impropria, passaggio al limite sotto il segno di integrale, derivabilità. Il problema di invertire l'ordine con cui si fanno i limiti. Convergenza uniforme. Caratterizzazione della convergenza uniforme con la distanza dell'estremo superiore. Criterio di Cauchy. Proprietà che si mantengono con la convergenza uniforme: limitatezza, continuita', integrabilità e passaggio al limite sotto il segno di integrale. Enunciato del teorema di convergenza dominata. Cenni sulla norma del sup nello spazio delle funzioni continue su un compatto, teorema di Ascoli-Arzelà (enunciato e cenni di dimostrazione - facoltativo).

4.1 Serie di funzioni La serie geometrica. Definizione di convergenza puntuale e uniforme di una serie. Criterio di Cauchy per le serie. Richiamo della stabilita' della continuità, limitatezza e integrabilità delle serie rispetto alla convergenza uniforme. Derivazione termine a termine di una serie di funzioni (condizioni sufficienti). Convergenza totale. La convergenza totale implica quella uniforme, ma non è vero il viceversa (esempio).

4.1 Serie di funzioni Serie di potenze nei complessi: definizione di convergenza totale e puntuale. Risultati sulla convergenza e non delle serie di potenze complesse. Definizione di raggio di convergenza. Caratterizzazione del raggio di convergenza con il criterio della radice. Criterio del rapporto. Esempi per illustrare il comportamento al bordo dell'insieme di convergenza. Serie di potenze reali. Teorema di convergenza delle serie di potenze reali, raggio di convergenza, continuità della somma. Osservazioni sul raggio di convergenza. Esempio di $\frac{1}{1+x^2}$. Teorema sul raggio di convergenza della serie di potenze delle derivate. Conseguenza: le somme di serie di potenze sono funzioni C^∞ nell'insieme di convergenza. Serie di Taylor di una funzione centrata in un punto. Funzioni analitiche. Esempio che mostra che non tutte le funzioni C^∞ sono analitiche. Analiticità dell'esponenziale, del coseno e del seno e relative serie di Taylor. Definizione di esponeziale complesso e formula di Eulero.

5. Equazioni differenziali

5.1 Generalità. Introduzione alle equazioni differenziali. Esempi. Equazioni differenziali di ordine n, equazioni in forma normale. Definizione di soluzione e integrale generale. Problema di Cauchy. Teorema (di Cauchy) di esistenza e unicità per le equazioni (sistemi) differenziali del primo ordine. Formulazione integrale. Dimostrazione del teorema di Cauchy attraverso le approssimazioni successive. Dimostrazione con il teorema delle contrazioni. Esempi di soluzioni non prolungabili. Enunciato del teorema di Peano per l'esistenza delle soluzioni. Esempio di non unicità. Alcuni esempi di equazioni a variabili separate.

5.2 Equazioni differenziali lineari del primo ordine. Equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti: omogenee, costruzione dell'integrale generale. L'integrale generale è uno spazio vettoriale di dimensione 1. Equazioni lineari del primo ordine non omogenee a coefficienti costanti.

L'integrale generale è uno spazio affine. Variazione delle costanti (facoltativo). Soluzione particolare. Soluzione per le equazioni del primo ordine lineari in generale.

5.2 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Esempi: l'oscillatore armonico, l'oscillatore armonico smorzato. Equazioni di ordine n e sistemi di equazioni del primo ordine. Equazioni lineari del secondo ordine omogenee. Struttura di spazio vettoriale delle soluzioni, dipendenza e indipendenza lineare. Il wronskiano. Caratterizzazione del wronskiano di una coppia di soluzioni. Identità di Abel. Teorema sulla caratterizzazione dello spazio delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea, come spazio vettoriale. Equazioni lineari a coefficienti costanti omogenee. Soluzioni complesse esponenziali. Polinomio caratteristico. Equazione caratteristica. Determinazione delle soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea a partire dalle soluzione dell'equazione caratteristica. Motivazione attraverso un argomento di fattorizzazione dell'operatore differenziale (facoltativo). Generalizzazione alle equazioni di ordine n omogenee. Equazioni con termine forzante. Struttura generale, l'integrale generale è uno spazio affine. Principio di sovrapposizione. Il caso del termine noto oscillante. La risonanza. Metodo della somiglianza per tutti i termini noti che sono soluzioni di una qualche equazione differenziale a coefficienti costanti. Motivazioni attraverso la decomposizione degli operatori lineari a coefficienti costanti (facoltativo).