TUTORAGGIO DI ANALISI MATEMATICA I
4 IV 2013

(1) Sia $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ una successione; confutare le seguenti affermazioni
 (a) $\limsup_{n\to\infty} a_n > \liminf_{n\to\infty} a_n$;
 (b) $\liminf_{n\to\infty} a_n^2 \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$;
 (c) $\liminf_{n\to\infty} |a_n| = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

(2) Trovare $\liminf$ e $\limsup$ delle seguenti successioni

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \left(7 - \frac{2}{n}\right) \arctan n; \\ a_n &= (\cos(2n\pi) + 3) \arcsin 1n^2 + (-1)^n \frac{\log(1+e^{-n}) + n}{n}; \\ a_n &= n \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right). \end{aligned}$$

(3) Si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \sin\frac{2}{n^2}\right)^{n^3 \log(1+\frac{1}{2n})}.$$

(4) Si consideri la successione $\{a_n\}$ definita da

$$a_{2n} = \sin\frac{(-1)^n}{n^2}, \quad a_{2n+1} = (2n+1)\log(1 + \frac{1}{2n+1}).$$

Calcolare $\liminf a_n$ e $\limsup a_n$.

(5) Si consideri la successione $\{b_n\}$ definita da

$$b_{2n} = \frac{n+1}{n}, \quad b_{2n+1} = -\frac{n}{n+1}.$$

Si definisca $a_n := \arctan b_n$. Calcolare $\liminf a_n$, $\limsup a_n$, $\inf a_n$ e $\sup a_n$ e dire se gli estremi inferiore e superiore sono raggiunti o meno.

(6) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(a + \frac{1}{n}\right)^k$$

al variare del parametro $a > 0$.

(7) Dire per quali valori del parametro reale t la serie $\displaystyle\sum_{\substack{n\geq 0\\ n>-t}} \frac{(n+t)^{nt}}{n!}$ è convergente.

(8) Dire per quali valori del parametro reale x la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{x}{2}+nx^3}$ è convergente e, per tali valori, calcolarne la somma.

(9) Dimostrare che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-3)^n}{n^{n+1}}$ è divergente.

(10) Dire per quali valori del parametro reale t la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(t^n + n^{-3t})$ è convergente.

(11) Discutere il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2}}{n^{2n}}; \tag{0.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{x^2}{\sqrt{n}}\right) \qquad x \in \mathbb{R}; \tag{0.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{n}; \tag{0.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^{2n}}; \tag{0.4}$$

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-4}}; \tag{0.5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{e^{(n+1)^2}}; \tag{0.6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n!}{\pi^n}; \tag{0.7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\ln n}; \tag{0.8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2}; \tag{0.9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - n^3 \sin\frac{1}{n})^n. \tag{0.10}$$

(12) Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n - \sqrt[3]{n^3 - 2n}).$$

(13) Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3n - \sqrt[3]{27n^3 - 3}).$$

(14) Studiare il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{nx}}{(n!)^{\alpha}},$$

al variare di $\alpha, x \in \mathbb{R}$.

(15) Trovare il raggio di convergenza di ciascuna delle seguenti serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} z^n.$$

(16) Si consideri l'insieme H degli interi n nella cui scrittura in base 10 manca la cifra 7. Si dimostri che

$$\sum_{n \in H} \frac{1}{n} < \infty$$

e si dia una stima per tale somma.

(17) Sia $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, con $n \geq 1$una successione; la successione delle medie aritmetiche è definita da

$$\sigma_n = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

dimostrare che, se $\{x_n\}$ è convergente, allora σ_n converge allo stesso limite e mostrare una successione $\{x_n\}$, non convergente, per la quale $\sigma_n \to 0$.

(18) (*Insieme di Cantor*) Si associ a ciascuna successione $a = \{\alpha_n\}$ in cui α_n è 0 o 2 il numero reale

$$x(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n}.$$

Dimostrare che l'insieme di tutti i numeri $x(a)$ coincide con l'insieme di Cantor.