TUTORAGGIO DI ANALISI MATEMATICA I
11 IV 2013

(1) Studiare il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{1 - \cos\frac{1}{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{n} \sin\frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{\sqrt{n}} \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n^3 \left(1 - \cos\frac{1}{n} - \log(1 + \frac{1}{2n^2})\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \left(\tan\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

(2) Determinare il carattere dei seguenti integrali

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^7 + 1}}\, \mathrm{d}x \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{1 + 8x^6}}\, \mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{\log x}\, \mathrm{d}x \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\log x}\, \mathrm{d}x$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(e^x - 1)}{x^{\frac{3}{2}}}\, \mathrm{d}x \qquad \int_0^{3} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3 - x}\right) \mathrm{d}x$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}\, \mathrm{d}x \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}\, \mathrm{d}x.$$

(3) Calcolare, se esistono, i seguenti integrali

$$\int_0^{1} \frac{1}{x \log x}\, \mathrm{d}x \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x \log x}\, \mathrm{d}x.$$

(4) Per $a \in \mathbb{R}$ si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x+3)^a (2 + \cos x)}{((x+1)^2 (x+2))^a}\, \mathrm{d}x.$$

(a) Discutere la convergenza dell'integrale per $a = 1$.
(b) Determinare tutti i valori di a per cui l'integrale converge.

(5) Si consideri la funzione $f(x) = 3 + \log(1 - 9x^2) - 3\sqrt{1 - 6x^2}$.
(a) Determinare il dominio di f.
(b) Determinare lo sviluppo di MacLaurin di ordine 4 di f.
(c) Stabilire se l'integrale $\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{f(x)}{3x\sqrt{x}\sin^2 x}\, \mathrm{d}x$ è improprio e, in caso affermativo, studiarne il carattere.
(d) Studiare la convergenza dell'integrale improprio $\int_{16}^{+\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sqrt{x}\, \mathrm{d}x$.

(6) Sia $f(x) = (4 - 3x^2)\sin(3x) - 2x^2 e^{2x} - 12x + 2x^2$.
(a) Determinare lo sviluppo di MacLaurin di ordine 3 di f.
(b) Studiare la convergenza dell'integrale improprio $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^4 \sqrt{sinx}}\, \mathrm{d}x$.

(7) Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ i seguenti integrali risultano convergenti

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sqrt{1+x^2}}{1+x^{2\alpha}}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_1^{+\infty} \left(\cos\frac{1}{x} - 1 - \frac{1}{2x^\alpha}\right)\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \frac{(1-\cos x)^\alpha}{\tan x - x}\,\mathrm{d}x.$$