TUTORAGGIO DI ANALISI MATEMATICA I
14 III 2013

(1) Si consideri uno spazio metrico (X, d). Dimostrare che i seguenti enunciati sono equivalenti:
   (i) (X, d) è completo;
   (ii) ogni successione di Cauchy in X ammette un'estratta convergente.

(2) Sia $\{x_n\}$ una successione reale con $x_n \to x$. Provare che $X := \{x_n | \, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ è chiuso.

(3) Sia $E \subset \mathbb{R}$ limitato e sia E' l'insieme dei punti limite delle successioni di E. Provare che E' è compatto.

(4) Sia $1 \leq p < \infty$ e si consideri in $\mathbb{R}^2 := \{x = (x_1, x_2) | \, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ la mappa $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ definita da

$$\|x\|_p := (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}} \, .$$

Si dimostri che $\|\cdot\|_p$ è una norma.

Hint: Dimostrare dapprima che per ogni $1 < p, q < \infty$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ valgono

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+ \quad \text{(Disuguaglianza di Young)}$$

$$\sum i = 1^2 |x_i y_i| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \quad \text{(Disuguaglianza di Hölder).}$$

(5) Sia $1 \leq p < \infty$. Si dimostri che le norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ in $\mathbb{R}^2$ sono equivalenti in $\mathbb{R}^2$ (ricordiamo che $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|\}$) e che

$$\lim_{p \to \infty} \|\cdot\|_p = \|\cdot\|_\infty \, .$$

(6) Si disegnino nel piano le palle unitarie rispetto alle norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$.

(7) Si dimostri che in $(\mathbb{R}^2, \|\|_2)$ vale l'identità del parallelogramma, ovvero che

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^2. \tag{0.1}$$

Si dia un'interpretazione geometrica di questo risultato (proprietà dei parallelogrammi).

Le proprietà (0.1) vale anche in $(\mathbb{R}^2, \|\|_p)$ con $1 \leq p \leq \infty$ e $p \neq 2$?

(8) Dire se le seguenti funzioni sono delle distanze in $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
d_1(x, y) &= |x^2 - y^2|; \\
d_2(x, y) &= \sqrt{|x - y|}; \\
d_3(x, y) &= |x - y|^2; \\
d_4(x, y) &= |x - 2y|; \\
d_5(x, y) &= \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}; \\
d_6(x, y) &= |e^x - e^y|; \\
d_7(x, y) &= |x + y|.
\end{aligned}$$

(9) Sia $\|\cdot\|$ una norma su $\mathbb{R}^2$ (non necessariamente una di quelle sopra indicate). Si dimostri che le palle in $(\mathbb{R}^2, \|\|)$ sono convesse.

Nel seguito, ove non specificato altrimenti, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$.

(10) Dimostrare che se $E \subset \mathbb{R}$ e $E \subset (m, +\infty)$ per $m \in \mathbb{R}$, allora $\partial E \neq \emptyset$.

(11) Dimostrare che se $E \subset \mathbb{R}$ e $E \neq \emptyset, \mathbb{R}$, allora $\partial E \neq \emptyset$.

(12) Disegnare i seguenti insiemi e determinarne interno, chiusura e frontiera

$$\begin{aligned} E_1 &:= \Big\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\ \|x\| < 1, x_2 \geq 0\Big\} \cup \{(0, -x_2) |\, x_2 \in [0,1]\}\,; \\ E_2 &:= \Big\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 |\, 2 < \|x\| < 3, x_2 \geq 0\Big\}\,; \\ E_3 &:= \bigcup_{n=1}^{+\infty} (2n, 2n+1). \end{aligned}$$

(13) Sia $E = \mathbb{Q} \cap (-1, \sqrt{2})$. Trovare ∂E e $\partial(\partial E)$. Dimostrare in generale che $\partial E \supseteq \partial(\partial E)$.

(14) Trovare i punti limite delle seguenti successioni

$$\begin{aligned} (x_n, y_n) &= \left((-1)^n, \sin n\frac{\pi}{2}\right); \\ (x_n, y_n) &= \left(2^{-n} \sin n\frac{\pi}{4}, 2^{-n} \cos n\frac{\pi}{4}\right); \\ (x_n, y_n) &= \left(\log(n+1) - \log n, \sin\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$