**TUTORAGGIO DI ANALISI MATEMATICA I**
**18 IV 2013**

(1) Sia $f(x) = \frac{\arctan x}{x}$, $x \in ]0, +\infty[$. Dimostrare che $f$ è prolungabile con continuità in 0 e che $f$ è uniformemente continua in $]0, +\infty[$.
(2) Sia $f(x) = xe^{-\frac{1}{|x|}}$. Dimostrare che $f$ è prolungabile con continuità in 0 e che $f$ è uniformemente continua in $] - \infty, +\infty[$.
(3) Sia $f$ una funzione reale uniformemente continua in $[a, b]$ e $[b, c]$. Dimostrare che $f$ è uniformemente continua in $[a, c]$.
(4) Dimostrare che se $f$ è una funzione reale continua e periodica in $\mathbb{R}$, allora $f$ è uniformemente continua.
(5) Sia $f$ una funzione reale continua in $[a, b]$. Dimostrare che la funzione integrale $F(x)$ definita da $F(x) = \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$ è Lipschitziana in $[a, b]$.
(6) Dimostrare che la funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ è 1/2-Hölderiana ma non è Lipschitziana.
(7) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1 + t^2}\, \mathrm{d}t.$$

 (a) Dimostrare che $f$ è una funzione pari, non negativa ed uniformemente continua su tutto $\mathbb{R}$.
 (b) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x^2}.$$

 (c) Provare che per ogni numero reale $x$ sussiste la disuguaglianza

$$f(x) \leq \frac{x^2}{2}.$$

(8) Si consideri la funzione $f(x) = 2x$. Si dimostri che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq b$ si ha

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = a + b.$$

Esistono altre funzioni continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la stessa proprietà? E discontinue?
(9) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+1} f(t)\, \mathrm{d}t = a.$$

Vale anche il viceversa?
(10) Definiamo le funzioni $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ con

$$g(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ 1 & \text{se t=0} \end{cases} \qquad f(x) = \frac{1}{x} \int_{-x}^x g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Dimostrare che $f$ è estendibile con continuità a tutto $\mathbb{R}$.

(11) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che
$$|f(x)| \leq x^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R};$$
 (a) $f$ è continua nel punto $x = 0$?
 (b) $f$ è continua in un intorno del punto $x = 0$?
 (c) $f$ è derivabile nel punto $x = 0$?

(12) Consideriamo la funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da
$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2 - \bar{z}^2}{|z|} & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0. \end{cases}$$
 (a) Qual è l'immagine di $f$?
 (b) La funzione $f$ è iniettiva?
 (c) La funzione $f$ è continua?

(13) Studiare la successione $\{x_n\}$ definita per ricorrenza da
$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = 4 \int_0^{x_n} \frac{e^{2t}}{(e^{2t}+1)^2}\, \mathrm{d}t,$$
con $a \in \mathbb{R}$.

(14) Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n^6}{\arctan n} \log \cos n^{-3}.$$

(15) Studiare la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$$
tracciandone un grafico approssimativo.

(16) Determinare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0^+$ della funzione
$$f(x) = \cos x - \frac{1}{2}\sin x - \log(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

(17) Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x \sin x}}.$$

(18) Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} x(\arctan \log x - \arctan x).$$

(19) Calcolare i due limiti
$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^x \frac{\arctan t}{x+t^2}\, \mathrm{d}t \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\arctan t}{x+t^2}\, \mathrm{d}t.$$

(20) Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+\sin n)^{\frac{1}{n}}(2+\sin n)^n}{n!}.$$

(21) Studiare, al variare del parametro reale $a$, il comportamento della successione definita da
$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = 1 - x_n + x_n^2. \end{cases}$$