TUTORAGGIO DI ANALISI MATEMATICA I
2 V 2013

(1) Si dimostri che la successione

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < n \\ 1 & \text{se } x \geq n, \end{cases}$$

converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione nulla ma non uniformemente.

(2) Si consideri la seguente successione

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \geq \dfrac{1}{n} \\ 1 - |nx| & \text{se } |x| < \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Si calcoli il limite puntuale di f_n e si studi la convergenza uniforme della successione.

Si definisca, inoltre, la successione

$$a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, \mathrm{d}x$$

e si dimostri che $a_n \to 0$; si studi, infine, il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(3) Studiare la convergenza puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$ della successione

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -\dfrac{1}{n} \\ nx & \text{se } -\dfrac{1}{n} \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 1 & \text{se } x > \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

In particolare studiare la continuità delle funzioni f_n e $\lim_{n\to\infty} f_n$.

(4) Studiare la convergenza puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$ della successione

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } |x| > \dfrac{1}{n} \\ n^2 x & \text{se } |x| \leq \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

In particolare studiare la continuità delle funzioni f_n e $\lim_{n\to\infty} f_n$.

(5) Studiare la convergenza puntuale e uniforme in $[0, 1]$ della successione $f_n(x) = nx(1 - x^2)^n$.

Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\ \mathrm{d}x$, confrontarlo con $\displaystyle\int_0^1 \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\ \mathrm{d}x$ e interpretare il risultato.

(6) Si dimostri che la successione

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx}$$

converge a 0 uniformemente in $[0,1]$.

(7) Si dimostri che la successione
$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$$
converge puntualmente a 0 in $(0,1)$, ma non uniformemente.

(8) Si studi la convergenza puntuale ed uniforme in $[0,1]$ della successione
$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}.$$

(9) Si studi la convergenza puntuale ed uniforme in $[0,1]$ della successione
$$f_n(x) = \frac{n^2}{1+n^2x^2}.$$

(10) Si studi la convergenza puntuale ed uniforme in $[0,1]$ della successione
$$f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}.$$

(11) Si consideri la successione
$$f_n(x) = nxe^{-n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Provare che:
a) $f_n \to 0$ puntualmente in $\mathbb{R}$;
b) f_n non converge uniformemente in $[0,1]$;
c) $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \to 0$.
Infine, caratterizzare tutte e sole le coppie $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ tali che f_n converga uniformemente in $[a,b]$.

(12) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione
$$f_n(x) = 2n^2xe^{-n^2x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$
Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$, confrontarlo con $\displaystyle\int_0^1 \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\,\mathrm{d}x$ e interpretare il risultato.

(13) Si dimostri che la successione
$$f_n(x) = \frac{x}{n^2}e^{-\frac{x}{n}}$$
converge uniformemente alla funzione nulla in $[0,+\infty)$. Cosa si può dire del limite dell'integrale improprio
$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x?$$

(14) Sia dato linsieme $E_n := \{1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $f_n := 1 - \chi_{E_n}$, dove χ_E denota la funzione caratteristica del generico insieme $E \subset \mathbb{R}$:
$$\chi_E(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin E \\ 1 & \text{se } x \in E. \end{cases}$$

(15) (i) Studiare la convergenza puntuale e uniforme in $\mathbb{R}$ della successione $f_n(x) = \chi_{[n,n+1)}(x)$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$.

(ii) Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{[n,n+1)}(x) \qquad (x \in \mathbb{R});$$

dire se la serie converge uniformemente.

(16) Si consideri la seguente successione (detta *macchina da scrivere*)

$$f_1 = \chi_{[0,1]},\ f_2 = \chi_{[0,\frac{1}{2}]},\ f_3 = \chi_{[\frac{1}{2},1]},\ f_4 = \chi_{[0,\frac{1}{4}]}, \dots, f_7 = \chi_{[\frac{3}{4},1]},\ f_8 = \chi_{[0,\frac{1}{8}]}, \dots.$$

Si studi la convergenza puntuale ed uniforme di f_n su $[0,1]$. Posto, inoltre,

$$a_n = \int_0^1 f_n(x)\, \mathrm{d}x,$$

si calcoli il limite della successione a_n.

(17) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right), \quad x \in [-1,1].$$

(18) Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni limitate su $[a,b]$, uniformemente convergente nell'intervallo $[a,b]$. Si dimostri che la successione è equilimitata, cioè che esiste $M > 0$ tale che

$$|f_n(x)| \leq M, \text{ per ogni } x \in [a,b], n \in \mathbb{N}.$$