TUTORAGGIO DI ANALISI MATEMATICA I
14 III 2013

(1) Risolvere in campo complesso le seguenti equazioni

$$z^6 - 6z^3 + 5 = 0 \qquad z^3 - z^2 + z = 0,$$
$$z|z|^2 - (1 + 4\sqrt{3})i\bar{z} = 0, \qquad z^2 - 3iz - 2 = 0,$$
$$z^2 + iz + i\frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \quad z^2 - (2 + i)z + 3i - 3 = 0.$$

(2) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'equazione $z^2 - az + a^2 - 1 = 0$ ha radici reali?
(3) Per quali valori di $a \in \mathbb{C}$ l'equazione $z^2 - az + a^2 = 0$ ha radici reali?
(4) Calcolare $\sqrt{1-2i}$, $\sqrt[3]{\rho(\cos\theta - i\sin\theta)}$, $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[5]{-i}$ e darne un'interpretazione grafica.
(5) Trovare tutti i numeri complessi z che soddisfano il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} z^2\bar{z} - \bar{z}z = -\bar{z} \\ (z^3 + \bar{z})^3 = 1 \end{cases}$$

(6) Siano $a, b \in \mathbb{C}$ e consideriamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} (az - b\bar{z})(bz - a\bar{z}) = 4 \\ z^2 - |z|^2 = 0 \end{cases}$$

nell'incognita z. Sotto quali condizioni su a e b il sistema ha almeno una soluzione $z \in \mathbb{C}$.
(7) Risolvere il sistema

$$\begin{cases} |z| = |w| \\ z^2 + w^2 = 0 \\ z + w = 1 \end{cases}$$

nelle incognite $z, w \in \mathbb{C}$.
(8) Sia z un numero complesso tale che

$$0 \le \mathrm{Im} z \le \frac{1}{4}.$$

Provare che il numero $z^3 - 3z + i$ non è reale.
(9) (*Successione di Fibonacci*) Si consideri la successione $\{F_n\}$ così definita

$$\begin{cases} F_0 & = 0 \\ F_1 & = 1 \\ F_{n+2} & = F_{n+1} + F_n. \end{cases}$$

Si trovi una formula chiusa per $\{F_n\}$ e se ne calcoli il limite.
(10) (*Successione di Lucas*) Si consideri la successione $\{L_n\}$ così definita

$$\begin{cases} L_0 & = 1 \\ L_1 & = 2 \\ L_{n+2} & = L_{n+1} + L_n. \end{cases}$$

Si trovi una formula chiusa per $\{L_n\}$ e se ne calcoli il limite.

(11) Si consideri la successione $\{x_n\}$ definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} x_0 & = 0 \\ x_1 & = 1 \\ x_{n+2} & = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n). \end{cases}$$

Dimostrare che $\{x_n\}$ è di Cauchy.

(12) Studiare la successione $\{x_n\}$ definita per ricorrenza da

$$x_0 = 0,\ x_1 = a > 0,\ x_{n+1} = x_n + x_{n-1}^2,$$

e calcolarne, se esiste, il limite.

(13) Studiare, al variare del parametro reale $a \in [0,1]$, il comportamento della successione definita da

$$\begin{cases} x_0 & = a \\ x_{n+1} & = x_n - x_n^3. \end{cases}$$

(14) Si consideri la successione $\{x_n\}$ definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} x_0 & = \alpha \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} & = 2x_n - 3; \end{cases}$$

si studi il comportamento di $\{x_n\}$, per $n \to \infty$, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

(15) Siano $\tilde{P} \in \mathbb{R}^2$ e $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ diagonale e sia $\{P_n\} \subset \mathbb{R}^2$ la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} P_0 & = \tilde{P} \\ P_{n+1} & = AP_n. \end{cases}$$

Si trovi una formula chiusa per $\{P_n\}$ e se ne studi il comportamento al variare di $\tilde{P}$ e A.

(16) Si consideri una mappa $f : [0,1] \to [0,1]$ che soddisfi la seguente proprietà:

$$\exists\, \theta \in (0,1) \text{ tale che } |f(x) - f(y)| \leq \theta|x - y| \quad \text{per ogni } x, y \in [0,1].$$

(Una tale mappa si dice *contrattiva*). Dimostrare che, per ogni $\tilde{x} \in [0,1]$, la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} x_0 = \tilde{x} \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

è di Cauchy per qualunque dato iniziale $\tilde{x}$.

(17) Sia $\{a_n\}$ una successione reale, e siano $\Lambda_n := \sup\{a_k, k \geq n\}$ e $\lambda_n := \inf\{a_k, k \geq n\}$. Mostrare che $\{\Lambda_n\}$ è decrescente, $\{\lambda_n\}$ è crescente e

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

(18) Date due successioni reali $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, si dimostri che

$$\limsup_{n\to+\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n + \limsup_{n\to+\infty} b_n,$$
$$\liminf_{n\to+\infty}(a_n + b_n) \geq \liminf_{n\to+\infty} a_n + \liminf_{n\to+\infty} b_n,$$

se la somma a destra non dà luogo alla forma indeterminata $[\infty - \infty]$. Dare un esempio per cui vale la disuguaglianza stretta.

(19) Sia $\{a_n\}$ una successione limitata definitivamente positiva. Verificare che

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty}a_n}\qquad \liminf_{n\to+\infty}(-a_n)=-\limsup_{n\to+\infty}a_n$$

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\liminf\limits_{n\to+\infty}a_n}\qquad \limsup_{n\to+\infty}(-a_n)=-\liminf_{n\to+\infty}a_n.$$

(20) Si consideri la seguente successione

$$x_0=0,\quad x_{2n}=\frac{x_{2n-1}}{2},\quad x_{2n+1}=x_{2n}+\frac{1}{2}.$$

Calcolare $\limsup\limits_{n\to+\infty}x_n$ e $\liminf\limits_{n\to+\infty}x_n$.

(21) Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n^2}+i(e^{\frac{1}{n}}-1)}{2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)+i\left(\log(1+\frac{1}{n})\right)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n^2}+i(e^{\frac{1}{n}}-1)}{\log(1+\frac{1}{n})+2i\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}.$$

(22) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5\log n+n^4+n^3}{(\sqrt{n}+in)^n}.$$

(23) Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n=e^i\qquad \lim_{n\to\infty}ne^{\frac{i}{n^2}}=+\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{ia_n}-1}{a_n}=i\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{e^{ia_n}-e^{-ia_n}}{a_n}=2i,$$

dove $\{a_n\}$ è una successione infinitesima reale.

(24) Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{n\to\infty}\left(2-i(1-\cos\frac{1}{n^2})\right)\left(\frac{1}{10}+\frac{i}{4}\right)^n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\log n+i\sin\log n}{(3+4i)^{2n}},$$

$$\lim_{n\to\infty}2n^2\left(\log(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}\right)+i\cos(n\pi)\frac{n+2}{n^2-1}.$$

(25) Siano $\{a_n\},\{b_n\}\subset\mathbb{C}$ due successioni convergenti. Dimostrare che la successione reale $\{\langle a_n,b_n\rangle\}$ è convergente.