

ESERCIZI DEL TUTORAGGIO DEL 9 MARZO 2012
CANALE A-DI

GIOVANNI SCILLA

Esercizio 1. Trovare gli estremi inferiore e superiore dei seguenti insiemi. Dire se l'estremo inferiore è un minimo e l'estremo superiore un massimo.

(1): $\left\{ x = \frac{3n-2}{2n}; n \in \mathbb{N} \right\}$

(2): $\left\{ x = \frac{t+1}{t-2}; t \in \mathbb{R}, t > 2 \right\}$

(3): $\{x = n^2 + 3n - 1; n \in \mathbb{N}\}$

(4): $\{|x| : x^2 + x < 2\}$

Esercizio 2. Dimostrare che $\sqrt{2}$ è l'estremo superiore dell'insieme

$$\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2, x > 0\}.$$

Esercizio 3. Dimostrare che nell'intervallo (α, β) , con α, β reali, c'è un numero irrazionale c .

Esercizio 4. Se r è razionale ($r \neq 0$) e x è irrazionale, si dimostri che rx e $r + x$ sono irrazionali.

Esercizio 5. Si dimostri che non esistono numeri razionali il cui quadrato è 12.

Esercizio 6. Dimostrare che l'insieme dei numeri irrazionali non è numerabile. È numerabile l'intervallo $(0, 1]$?

Esercizio 7. Calcolare i seguenti limiti:

(1): $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n!}$

(2): $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt{n^2 + n} - n)$

(3): $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n^3}{\ln(n^3 + 3n^2)}$

(4): $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{n!}$

Esercizio 8. Dire per quali valori reali di α esistono finiti i limiti

(1): $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n^2 + 1}{n^\alpha}\right)^n$

(2): $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha^n + n^\alpha)$

GIOVANNI SCILLA: SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "G. CASTELNUOVO", PIAZZALE A. MORO 2, I-00185 ROMA, ITALY
E-mail address: `scilla@mat.uniroma1.it`