

**ESERCIZI DEL TUTORAGGIO DEL 9 MARZO 2012**  
**CANALE A-DI**

GIOVANNI SCILLA

**Esercizio 1.** Trovare gli estremi inferiore e superiore dei seguenti insiemi. Dire se l'estremo inferiore è un minimo e l'estremo superiore un massimo.

(1):  $\left\{ x = \frac{3n-2}{2n}; n \in \mathbb{N} \right\}$

(2):  $\left\{ x = \frac{t+1}{t-2}; t \in \mathbb{R}, t > 2 \right\}$

(3):  $\{x = n^2 + 3n - 1; n \in \mathbb{N}\}$

(4):  $\{|x| : x^2 + x < 2\}$

**Esercizio 2.** Dimostrare che  $\sqrt{2}$  è l'estremo superiore dell'insieme

$$\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2, x > 0\}.$$

**Esercizio 3.** Dimostrare che nell'intervallo  $(\alpha, \beta)$ , con  $\alpha, \beta$  reali, c'è un numero irrazionale  $c$ .

**Esercizio 4.** Se  $r$  è razionale ( $r \neq 0$ ) e  $x$  è irrazionale, si dimostri che  $rx$  e  $r + x$  sono irrazionali.

**Esercizio 5.** Si dimostri che non esistono numeri razionali il cui quadrato è 12.

**Esercizio 6.** Dimostrare che l'insieme dei numeri irrazionali non è numerabile. È numerabile l'intervallo  $(0, 1]$ ?

**Esercizio 7.** Calcolare i seguenti limiti:

(1):  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n!}$

(2):  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt{n^2 + n} - n)$

(3):  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n^3}{\ln(n^3 + 3n^2)}$

(4):  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{n!}$

**Esercizio 8.** Dire per quali valori reali di  $\alpha$  esistono finiti i limiti

(1):  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n^2 + 1}{n^\alpha}\right)^n$

(2):  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha^n + n^\alpha)$

GIOVANNI SCILLA: SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "G. CASTELNUOVO", PIAZZALE A. MORO 2, I-00185 ROMA, ITALY  
*E-mail address:* `scilla@mat.uniroma1.it`