ESERCIZI DEL TUTORAGGIO DELL' 8 MARZO 2012 CANALE DL-PA

GIOVANNI SCILLA

Esercizio 1. Se r è razionale ($r \neq 0$) e x è irrazionale, si dimostri che rx e $r + x$ sono irrazionali.

Esercizio 2. Si dimostri che non esistono numeri razionali il cui quadrato è 12.

Esercizio 3. Trovare gli estremi inferiore e superiore dei seguenti insiemi. Dire se l'estremo inferiore è un minimo e l'estremo superiore un massimo.

(1): $\left\{ x = \dfrac{3n-2}{2n}; n \in \mathbb{N} \right\}$

(2): $\left\{ x = \dfrac{t+1}{t-2}; t \in \mathbb{R}, t > 2 \right\}$

(3): $\left\{ x = n^2 + 3n - 1; n \in \mathbb{N} \right\}$

(4): $\{|x| : x^2 + x < 2\}$

Esercizio 4. Verificare che le seguenti coppie di classi numeriche sono separate e determinarne il numero reale separatore:

(1): $\left(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n+1} \right)$;

(2): $\left(\dfrac{n-1}{n}, \dfrac{n+1}{n} \right)$;

(3): $\left(\dfrac{4n-2}{n}, \dfrac{4n+1}{n} \right)$;

(4): $\left(\log_{10} \dfrac{2n}{n+4}, \log_{10} \dfrac{2n+10}{n+4} \right)$.

Esercizio 5. Verificare che vale la condizione di Cauchy per le seguenti successioni:

(1): $\left\{ 1 + \dfrac{1}{n^2} \right\}$

(2): $\left\{ \cos \dfrac{1}{n} \right\}$

Esercizio 6. Dimostrare o confutare con esempi le seguenti affermazioni:

- il prodotto di una successione di Cauchy per una limitata è una successione di Cauchy;
- ogni sottosuccessione di una successione di Cauchy è ancora una successione di Cauchy;
- se $\{x_{2n}\}$ e $\{x_{2n+1}\}$ sono di Cauchy, allora $\{x_n\}$ è di Cauchy.

Esercizio 7. Date due successioni reali $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, si dimostri che

$$\limsup_{n\to+\infty}(a_n+b_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} a_n + \limsup_{n\to+\infty} b_n$$

purchè la somma a secondo membro non sia del tipo $\infty - \infty$. Dare un esempio per cui valga la disuguaglianza stretta.

Esercizio 8. Sia a_n una successione limitata, costituita da numeri positivi. Verificare che

(a): $\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} a_n}$;

(b): $\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\liminf_{n\to+\infty} a_n}$.

Giovanni Scilla: SAPIENZA Università di Roma, Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Piazzale A. Moro 2, I-00185 Roma, Italy

E-mail address: `scilla@mat.uniroma1.it`