TUTORAGGIO DI ANALISI MATEMATICA I
7 MARZO 2013

(1) Verificare, usando la definizione che le successioni x_n e y_n definite da

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{n^k}, \quad k \in \mathbb{N} \\ y_n &= \sin\frac{1}{n} \end{aligned}$$

(con $n \in \mathbb{N}$) sono di Cauchy.

(2) Usando la definizione, verificare che, per ogni $q \in (-1, 1)$, la successione x_n definita da

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$$

è di Cauchy e calcolarne il limite per $n \to +\infty$.

(3) Una mappa $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *Lipschitziana* se esiste una costante $L > 0$ per cui si abbia

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y| \qquad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

Considerate una mappa $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitziana ed una successione reale x_n, dimostrare che

$$x_n \text{è di Cauchy} \Rightarrow \phi(x_n) \text{ è di Cauchy.}$$

Esibire, inoltre, una successione di Cauchy x_n ed una mappa $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che la successione $\varphi(x_n)$ non sia di Cauchy.

(4) Dimostrare o confutare con degli esempi le seguenti affermazioni
- il prodotto di una successione di Cauchy per una successione limitata dà una successione di Cauchy;
- ogni sottosuccessione di una successione di Cauchy è ancora di Cauchy;
- se a_{2n} e a_{2n+1} sono di Cauchy, allora a_n è di Cauchy;
- se $a_n + b_n$ è di Cauchy, allora a_n e b_n sono di Cauchy.

(5) Mostrare che gli assiomi di campo totalmente ordinato del libro di Rudin (Def 1.5 e 1.7 capitolo 1) sono equivalenti a quelle del libro di Cecconi-Stampacchia (Proprietà 8.6 i e ii capitolo 1)

(6) Siano a_n e b_n due successioni reali di Cauchy. Dimostrare che le successioni x_n e y_n definite da

$$x_n := a_n + b_n, \quad y_n := a_n \cdot b_n,$$

sono di Cauchy.

(7) Siano a_n a b_n due successioni reali tali che $|a_n - b_n| \to 0$ e $b_n \neq 0$ definitivamente. Si dimostri che $\frac{a_n}{b_n} \to 1$.

(8) Siano a_n e b_n due successioni reali di Cauchy. Dimostrare che la successione x_n definita da

$$x_n := |a_n - b_n|$$

è di Cauchy.

(9) Sull'insieme delle successioni reali di Cauchy, si definisca la relazione $\sim$ nel modo seguente

$$a_n \sim b_n \text{ se } x_n \to 0,$$

dove la successione x_n è definita come nell'esercizio precedente. Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

(10) Una successione r_n a valori in $(\mathbb{Q}, \leq)$ si dice infinitesima razionale se
$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ si ha $|r_n| < \varepsilon$ definitivamente.
Mostrare che le successioni $\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{2^n}$ sono infinitesime razionali.
Considerare l'immersione canonica $i : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Mostrare che r_n è infinitesima razionale se e solo se $i(r_n)$ è infinitesima nel senso usuale. Quale proprietà è stata rilevante? Si può dimostrare questa proprietà senza usare nessuna proprietà di completezza (o continuità) di $\mathbb{R}$, ma solo la definizione di $\mathbb{R}$ data nell'esercizio successivo?

(11) Formulare la definizione di successione di Cauchy razionale.
Sia $\mathcal{C}$ l'insieme delle successioni di Cauchy razionali e $\simeq$ la relazione di equivalenza in $\mathcal{C}$ definita ponendo $r_n \simeq s_n$ se $r_n - s_n$ è infinitesima razionale. Sia $[r_n]$ la classe di equivalenza di r_n. Definire nell'insieme quoziente $\mathbb{R} := \mathcal{C}/\simeq$ somma e prodotto:

$$[r_n] + [s_n] := [r_n + s_n]$$
$$[r_n] \cdot [s_n] := [r_n \cdot s_n].$$

Mostrare che queste operazioni sono indipendenti dalla scelta del rappresentante e godono delle proprietà associativa, commutativa, distributiva e rendono $\mathbb{R}$ un campo.

(12) Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dei seguenti insiemi di numeri reali

$$\begin{aligned}
E_1 &= \left\{\frac{3n-2}{2n}, \quad n \in \mathbb{N}\right\} \\
E_2 &= \left\{\frac{t+1}{t-2}, \quad t \in \mathbb{R}, t > 2\right\} \\
E_3 &= \left\{3n^2 + 3n - 1, \quad n \in \mathbb{N}\right\} \\
E_4 &= \left\{3n^2 - n - 1, \quad n \in \mathbb{N}\right\} \\
E_5 &= \left\{|x|, \quad x^2 + x < 2\right\}.
\end{aligned}$$

(13) Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme di numeri reali

$$E = \left\{x + \frac{1}{x^n}, \quad x > 0,\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$