

**ESERCIZI DEL TUTORAGGIO DEL 25 MAGGIO 2012**  
**CANALE A-DI**

GIOVANNI SCILLA

**Esercizio 1.** Studiare la convergenza puntuale delle seguenti serie di funzioni e individuare i sottoinsiemi nei quali la convergenza è uniforme (studiando la convergenza totale).

$$\begin{aligned} \text{(i): } & \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)e^{-nx^2}; \\ \text{(ii): } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n+x^2}; \\ \text{(iii): } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(x\sqrt{n})}{n^2}; \\ \text{(iv): } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+x^{2n})}{n^2}. \end{aligned}$$

**Esercizio 2.** Determinare l'insieme di convergenza di ciascuna delle seguenti serie di potenze o riconducibili a serie di potenze.

$$\begin{aligned} \text{(i): } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} (x-1)^n; \\ \text{(ii): } & \sum_{n=1}^{\infty} (2^{3n} + 3^{2n})x^n; \\ \text{(iii): } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+4} e^{nx}; \\ \text{(iv): } & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+2}{x^2+1}\right)^n; \\ \text{(v): } & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n2^n} x^n. \end{aligned}$$

**Esercizio 3.** Dimostrare che le seguenti funzioni sono sviluppabili in serie di Taylor intorno ai punti indicati, determinare la serie corrispondente e il raggio di convergenza.

(i):  $f(x) = e^{1-x^2}$ ,  $x_0 = 0$ ;

(ii):  $f(x) = \frac{1}{2x-5}$ ,  $x_0 = 1$ .

**Esercizio 4.** Sia assegnata la funzione

$$f(x) = \int_0^x \log(1+t^2) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i): Sviluppala in serie di Mac-Laurin, precisando in quale intervallo sussiste lo sviluppo.

(ii): Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}.$$

GIOVANNI SCILLA: SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "G. CASTELNUOVO", PIAZZALE A. MORO 2, I-00185 ROMA, ITALY  
*E-mail address:* `scilla@mat.uniroma1.it`