ESERCIZI DEL TUTORAGGIO DEL 16 MAGGIO 2012
CANALE DL-PA

GIOVANNI SCILLA

Esercizio 1. Assegnata la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{se } \dfrac{1}{2n} \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

definita in $[0,1]$, dimostrare che:

(a): (f_n) converge verso la funzione $f(x) = 0$ puntualmente, ma non uniformemente, in $[0,1]$;

(b): Per $n \to +\infty$ l'integrale definito di $f_n(x)$ nell'intervallo $[0,1]$ converge a zero.

Esercizio 2. Posto $f_n(x) = n(x-1)x^{-n}$, verificare che:

(a): $f_n(x)$ converge a zero per ogni $x \geq 1$.

(b): $f_n(x)$ non converge uniformemente nell'intervallo $[1,+\infty)$.

(c): $f_n(x)$ non converge uniformemente nell'intervallo $[1,2]$.

(d): $f_n(x)$ converge uniformemente nell'intervallo $[2,+\infty)$.

Esercizio 3. Studiare la convergenza delle seguenti successioni di funzioni nei domini indicati, determinandone il limite puntuale, stabilendo se esso è uniforme ed, eventualmente, individuando i sottodomini in cui la convergenza è uniforme.

(i): $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}, \quad x > 0;$

(ii): $f_n(x) = \dfrac{n^2}{1+n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R};$

(iii): $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n, \quad x \geq 0;$

(iv): $f_n(x) = x^n \ln(x^n), \quad x \in (0,1];$

(v): $f_n(x) = (x^2 - x^4)^n, \quad x \in [0,1];$

(vi): $f_n(x) = e^{-1/(x^2+n)}, \quad x \in \mathbb{R};$

(vii):

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \le \dfrac{1}{n} \\ \\ 1 - x & \text{se } \dfrac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

Esercizio 4. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^2 \frac{1+x}{x^n + n^2}\, dx.$$

Esercizio 5. Assegnata la successione di funzioni

$$f_n(x) = \int_1^n \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt, \quad n \ge 1$$

studiare la convergenza puntuale ed uniforme di (f_n).

Giovanni Scilla: SAPIENZA Università di Roma, Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Piazzale A. Moro 2, I-00185 Roma, Italy
E-mail address: scilla@mat.uniroma1.it