Tutoraggio di Analisi Matematica I

canale Pb-Z

Scheda 10 di esercizi, 29 maggio 2012

1) Verificare che le seguenti funzioni sono sviluppabili in serie di Taylor di punto iniziale $x_0 = 0$ nell'intervallo indicato, e scrivere le relative serie di Taylor:

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right),\ x \in [0, \pi]\,; \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1, 1)\,; \quad h(x) = \arcsin x,\ x \in (-1, 1).$$

2) Calcolare, per serie, gli integrali:

$$\int_0^x \sin(t^2)dt\,, \quad \int_0^x \cos(t^2)dt \quad (x \in I\!R).$$

3) Determinare il raggio di convergenza di ciascuna delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4 e^n}{(n+1)!} z^n \ (z \in \mathbb{C}), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n}{e^n} \log^n\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) \ (x \in I\!R)\,.$$

4) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-n\sqrt{x}} \quad (x \geq 0)\,.$$

5) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme in $[0, 1]$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = (x^2 - x)^n\,.$$

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx\,.$$

6) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme in $[0, 2]$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -n^2 x + 2n & \text{se } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{2}{n} \leq x \leq 2\,. \end{cases}$$

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)dx\,, \quad \int_0^2 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]dx\,.$$