ESERCIZI ANALISI 1

30-05-2013

Dagli appunti del Prof. D'Ancona:

(1) Ridurre a sistemi del primo ordine le seguenti equazioni:

a.
$$y'' = a(x)y' + b(x)y + c(x)$$
b.
$$y''' = (y'')^2 + (y')^3 + y^4$$
c.
$$y^{(4)} = \frac{y'' + y'}{y^2 + 1}$$

(2) Ridurre a sistema del primo ordine i seguenti sistemi del secondo ordine

a.
$$y'' = a(x)y + b(x)z, \quad z'' = c(x)y + d(x)z$$
b.
$$y'' = (y')^2 + z^2, \quad z'' = (z')^2 - y^2$$

(3) Scrivere la soluzione generale delle seguenti equazioni e risolvere poi il problema di Cauchy con dato $y(x_0) = y_0$ al variare di x_0 e y_0:

a.
$$y' = ky \quad (k \in \mathbb{R}),$$
b.
$$y' = f(x)y$$
c.
$$y' = y^2$$
d.
$$y'' = 2y'$$

(4) Usare i risultati teorici studiati per stimare l'intervallo di esistenza della soluzione per le seguenti equazioni, con la condizione $y(0) = \alpha$, al variare di α:
$$y' = y^2 + xy^4, \quad y' = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, \quad y' = |y|^{2+\cos x}, \quad y' = \frac{y^3 + 2}{y^2 + 1}.$$

(5) Usare i risultati teorici studiati per dimostrare che il problema di Cauchy
$$y' = \sin(x^2 + y), \quad y(0) = \alpha$$
ha una soluzione definita si tutto $\mathbb{R}$. Stesso esercizio per il problema di Cauchy
$$y' = \sin(x^2 + y^2), \quad y(0) = \alpha.$$

(6) a) Risolvere i seguenti problemi di Cauchy a variabili separabili. (Può accadere che per alcuni valori di α il problema non sia definito). b) *Facoltativo*: prima di svolgere il punto a) disegnare le zone del piano dove il secondo membro $f(x, y)$ è definito, e dove è positivo, negativo e nullo. Tracciare quindi un grafico approssimativo delle soluzioni al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e poi risolvere.

a.
$$y' = -\frac{y}{x}, \quad y(1) = \alpha$$
b.
$$y' = \frac{y + y^3}{x}, \quad y(1) = \alpha$$
c.
$$y' = -\frac{\log(x)}{y}, \quad y(1) = \alpha$$
d.
$$y' = \sin(x)(1 + y^2), \quad y(0) = \alpha$$
e.
$$y' = \cos^2 y \sin x, \quad y(0) = \alpha$$

f.
$$y' = \frac{y - y^3}{\cos^2 x}, \quad y(0) = \alpha$$
g.
$$y' = (x + x^2)(y + y^2), \quad y(0) = \alpha$$
h.
$$e^x y' + xy^2 = 0, \quad y(0) = \alpha$$

(7) *Facoltativo:* Per i seguenti problemi, come nell'esercizio precedente, disegnare le zone del piano dove il secondo membro $f(x, y)$ è definito, e dove è positivo, negativo e nullo. Tracciare quindi un grafico approssimativo delle soluzioni. La condizione iniziale è sempre $y(0) = \alpha$. (Può accadere che per alcuni valori di α il problema non sia definito).

a.
$$y' = y^2 - 1$$
b.
$$y' = \sin x \sin y$$
c.
$$y' = x^2 + y^2 - 1$$
d.
$$y' = y - y^3$$
e.
$$y' = \frac{x - y}{x + y}$$
f.
$$y' = xy - y^2$$
g.
$$y' = \frac{y}{x - 1} + \frac{y^2}{x^2 - 1}$$
h.
$$y' = \sqrt{1 - y^2}$$
i.
$$y' = \frac{1}{y} - \frac{1}{x - 1}$$
j.
$$y' = \log \frac{1}{1 + |y|} + x$$
k.
$$y' = \sin(xy), \quad y' = \cos(xy), \quad y' = \tan(xy)$$
l.
$$y' = \frac{1}{\cos xy}, \quad y' = \frac{1}{y - x + 1}$$
m.
$$y' = \frac{1}{y^2 + x^2 - 1}, \quad y' = \frac{1}{1 - (x^2 + y^2)}$$
n.
$$y' = x + |y|, \quad y' = (y - |y|)x, \quad (y')^2 = (xy)^3$$
o.
$$y' = e^{xy} - 1, \quad y' = e^{(x^2)} - e^{(y^3)}, \quad y' = \sin \frac{1}{x + y}.$$

(8) Per i seguenti problemi di Cauchy lineari, con dato iniziale $y(x_0) = y_0$, a) determinare l'intervallo massimale contenente x_0 per cui i coefficienti $a(x)$ e $b(x)$ dell'equazione $y' = a(x)y + b(x)$ sono continui; b) determinare il dominio della soluzione; c) poi risolvere.

a. $x_0 = 1, y_0 = \alpha$,
$$y' = \frac{2y + x^5}{x}, \quad y' + (\log x)y = \sin(2x), \quad y' + \frac{2y}{x} = x^3, \quad y' + \frac{y}{x} - \frac{e^x}{x} = 0;$$
b. $x_0 = 0, y_0 = \alpha$,
$$y' - \frac{y}{1 - x^2} - 1 - x = 0, \quad y' + xy = \sin x, \quad y' = xy + x \sin x;$$
c. $x_0 = \frac{\pi}{4}, y_0 = \alpha$;
$$y' = \frac{y}{\tan x}$$