ESERCIZI DEL TUTORAGGIO DEL 23 MAGGIO 2012
CANALE DL-PA

GIOVANNI SCILLA

Esercizio 1. Come applicazione del Teorema di Ascoli-Arzelà, dimostrare che, se (g_n) è una successione di funzioni continue ed equilimitate in $[a, b]$, allora la successione (f_n) definita da

$$f_n(x) = \int_a^x g_n(t)\, dt$$

ha un'estratta convergente uniformemente.

Esercizio 2. Assegnata la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^p(1 + nx^2)}, \quad p > 0$$

dimostrare che:

(a): converge puntualmente su $\mathbb{R}$ se $p > 0$;

(b): converge uniformemente su $\mathbb{R}$ se $p > \frac{1}{2}$.

Esercizio 3. Determinare l'insieme di convergenza puntuale E delle seguenti serie di funzioni e dire in quali sottoinsiemi di E c'è convergenza totale.

(i): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$;

(ii): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-nx}$;

(iii): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 x^n}$;

(iv): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + nx)}{n^3 x + n^2}$;

(v): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x + 1)^n}{n(n + 1)}$;

(vi): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{(x+n)^2}$;

(vii): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n \arcsin \frac{(x+1)^2}{n}$.

Esercizio 4. Calcolare il raggio di convergenza r di ciascuna delle seguenti serie di potenze.

(i): $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} x^n$;

(ii): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)5^{n+1} \log(n+1)}$.

Esercizio 5. Determinare l'insieme di convergenza di ciascuna delle seguenti serie di potenze.

(i): $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{2^n \sqrt{n+1}}$;

(ii): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n 2^n} x^n$;

(iii): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+2}{x^2+1}\right)^n$;

(iv): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{n+1}\right)^n x^{2n}$;

(v): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+4} e^{nx}$.

Giovanni Scilla: SAPIENZA Università di Roma, Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Piazzale A. Moro 2, I-00185 Roma, Italy
E-mail address: scilla@mat.uniroma1.it