ESERCIZI ANALISI 1

14-03-2013

(1) Siano $a_0 = 1$, $a_1 = 1 + \frac{1}{2}$, $a_k = a_{k-1} + \frac{1}{2}(a_{k-1} - a_{k-2})$, scrivere l'espressione esplicita del termine generale e calcolarne il limite.

(2) Siano $a_0 = 4$, $a_1 = \frac{k}{3}$, $a_2 = \frac{3}{8} + \frac{k^2}{9}$ e $a_n = (\frac{k}{3} + \frac{1}{4})a_{n-1} - (\frac{k}{12} - \frac{1}{8})a_{n-2} - \frac{k}{24}a_{n-3}$ con $k \in \mathbb{R}$, trovare l'espressione esplicita del termine generale della successione, per quali valori di k esiste finito il limite e calcolarlo.

(3) Scrivere in forma trigonometrica i numeri: $1 - i$, $1 + \sqrt{3i}$, $1 + i$, $\rho(\cos\theta - i\sin\theta)$, -4, $-\sqrt{3} - i$.

(4) Si provi che:

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}\theta \sin^{2k}\theta$$

$$\sin(n\theta) = \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1}\theta \sin^{2k+1}\theta$$

(5) Calcolare $\sqrt[4]{1-i}$, $\sqrt{\rho(\cos\theta - i\sin\theta)}$, $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{-1}$, $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[4]{-1}$ e cercare di darne un'interpretazione grafica.

(6) Risolvere nel campo complesso le equazioni:

$$z^4 - 3z^2 + 2 = 0 \quad z^4 - z^3 + z^2 = 0 \quad z^2 - 3iz - 2 = 0 \quad z^2 - (2+i)z + 3i - 3 = 0.$$

(7) Per quali valori di a reale l'equazione $z^2 - az + (a^2 - 1) = 0$ ha radici reali?

(8) Esistono valori di a complesso per cui l'equazione $z^2 - az + a^2$ ha radici reali?

(9) (Successione di Fibonacci) Sia F_n così definita: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ per $n = 0, 1, 2 \ldots$. Calcolare F_n esplicitamente e calcolarne il limite.

(10) Calcolare il massimo limite e il minimo limite di $a_n = n^2(1 + (-)^n))$, $a_n = 3 - n^{-1}$, $a_n = 2 + n^{\cos\pi n}$.

(11) Sia a_n una successione reale. Mostrare che a_n e la sua traslata a_{n+1} hanno lo stesso massimo e minimo limite.

(12) Sia a_n una successione reale definitivamente positiva. Mostrare che

$$\limsup \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\liminf a_n}, \quad \liminf \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\limsup a_n}$$

(13) Sia a_n una successione reale, $\Lambda_n := \sup\{a_k,\ k \geq n\}$ e $\lambda_n := \inf\{a_k,\ k \geq n\}$. Mostrare che Λ_n è decrescente, λ_n è crescente e

$$\lim_n \Lambda_n = \limsup a_n, \quad \lim_n \lambda_n = \liminf a_n.$$

(14) Esercizi 1, 2, 3, 4 pag. 100 del libro di Cecconi-Stampacchia.

(15) (Rudin) Considerare la serie:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

e sia a_n il termine generale. Calcolare $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $\limsup {a_n}^{1/n}$. Mostrare che il criterio del rapporto è inconclusivo, ma quello della radice non lo è.

Il seguente esercizio si può svolgere, fino a e), senza trovare esplicitamente l'espressione della successione, data per ricorrenza. Si può procedere usando il principio di induzione. Se si fa così l'esercizio può essere più difficile, ed è facoltativo.

(16) (Formula Clebsh-Gordan per le dimensioni delle irriducibili di SU(2)) Considerare la seguente definizione ricorsiva di d_n:

$$d_0 = 1 \quad d_1 = d, \quad dd_n = d_{n-1} + d_{n+1},$$

con $d \geq 2$.
a) Mostrare che $d_{n+1} \geq d_n$ e quindi che $d_n > 0$ per ogni n.
b) Usare la relazione di ricorrenza per mostrare che $a_n := \frac{d_{n+1}}{d_n}$ è limitata da $0 < a_n < d$.
c) Mostrare che $d_{n+1} \geq (d-1)d_n$ per ogni n, e quindi d_n ha crescita almeno esponenziale: $d_n \geq (d-1)^n$ se $d > 2$.
d) Sia $x = \liminf a_n$ oppure $x = \limsup a_n$. Mostrare che entrambi coincidono con la più grande radice dell'equazione $x^2 - dx + 1 = 0$. Dedurre che a_n è convergente.
e) Calcolare $\lim d_n^{1/n}$, mostrare è ≥ 1 e che vale 1 se e solo se $d = 2$.
f) Mostrare che $d_n = n + 1$ se $d = 2$.
g) Calcolare d_n per $d > 2$.