

**ESERCIZI DEL TUTORAGGIO DEL 23 MARZO 2012  
CANALE A-DI**

GIOVANNI SCILLA

**Esercizio 1.** Sia

$$x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- osservare che la successione è limitata;
- estrarre almeno due sottosuccessioni convergenti;
- determinare l'insieme dei punti limite della successione  $\{x_n\}$ ;
- calcolare  $\liminf x_n$  e  $\limsup x_n$ .

**Esercizio 2.** Sia

$$z_n = \cos\left(\frac{n\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- osservare che la successione è limitata nei complessi;
- disegnare nel piano complesso  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$ ;
- estrarre almeno due sottosuccessioni convergenti;
- determinare l'insieme dei punti limite della successione  $\{z_n\}$ .

**Esercizio 3.** Calcolare i punti limite, il massimo e il minimo limite delle seguenti successioni:

(a):  $x_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^n}$ ;

(b):  $x_n = ne^{(-1)^{n+1}n}$ ;

(c):  $x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ ;

(d):  $x_n = \arctan(-2)^n$

**Esercizio 4.** Date due successioni reali  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$ , si dimostri che

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

purchè la somma a secondo membro non sia del tipo  $\infty - \infty$ . Dare un esempio per cui valga la disuguaglianza stretta.

**Esercizio 5.** Sia  $E \subset \mathbb{R}$  limitato superiormente. Dimostrare che esiste  $\{x_n\} \subset E$  tale che  $\lim_n x_n = \sup E$ . Tale successione può essere sempre scelta monotona strettamente crescente?

**Esercizio 6.** Dimostrare o confutare con esempi le seguenti affermazioni:

- il prodotto di una successione di Cauchy per una limitata è una successione di Cauchy;
- se  $\{x_{2n}\}$  e  $\{x_{2n+1}\}$  sono di Cauchy, allora  $\{x_n\}$  è di Cauchy.

**Esercizio 7.** Dimostrare che se  $(\mathbf{x}_k)$  e  $(\mathbf{y}_k)$  sono due successioni di Cauchy in  $\mathbb{R}^2$ , allora la successione numerica  $(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\|)$  è convergente.

GIOVANNI SCILLA: SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "G. CASTELNUOVO", PIAZZALE A. MORO 2, I-00185 ROMA, ITALY  
*E-mail address:* `scilla@mat.uniroma1.it`