

**ESERCIZI DEL TUTORAGGIO DEL 23 MARZO 2012
CANALE A-DI**

GIOVANNI SCILLA

Esercizio 1. Sia

$$x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- osservare che la successione è limitata;
- estrarre almeno due sottosuccessioni convergenti;
- determinare l'insieme dei punti limite della successione $\{x_n\}$;
- calcolare $\liminf x_n$ e $\limsup x_n$.

Esercizio 2. Sia

$$z_n = \cos\left(\frac{n\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- osservare che la successione è limitata nei complessi;
- disegnare nel piano complesso z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 ;
- estrarre almeno due sottosuccessioni convergenti;
- determinare l'insieme dei punti limite della successione $\{z_n\}$.

Esercizio 3. Calcolare i punti limite, il massimo e il minimo limite delle seguenti successioni:

(a): $x_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n^n}$;

(b): $x_n = ne^{(-1)^{n+1}n}$;

(c): $x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$;

(d): $x_n = \arctan(-2)^n$

Esercizio 4. Date due successioni reali $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, si dimostri che

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

purchè la somma a secondo membro non sia del tipo $\infty - \infty$. Dare un esempio per cui valga la disuguaglianza stretta.

Esercizio 5. Sia $E \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente. Dimostrare che esiste $\{x_n\} \subset E$ tale che $\lim_n x_n = \sup E$. Tale successione può essere sempre scelta monotona strettamente crescente?

Esercizio 6. Dimostrare o confutare con esempi le seguenti affermazioni:

- il prodotto di una successione di Cauchy per una limitata è una successione di Cauchy;
- se $\{x_{2n}\}$ e $\{x_{2n+1}\}$ sono di Cauchy, allora $\{x_n\}$ è di Cauchy.

Esercizio 7. Dimostrare che se (\mathbf{x}_k) e (\mathbf{y}_k) sono due successioni di Cauchy in \mathbb{R}^2 , allora la successione numerica $(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\|)$ è convergente.

GIOVANNI SCILLA: SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "G. CASTELNUOVO", PIAZZALE A. MORO 2, I-00185 ROMA, ITALY
E-mail address: `scilla@mat.uniroma1.it`