ESERCIZI DEL TUTORAGGIO DEL 21 MARZO 2012
CANALE DL-PA

GIOVANNI SCILLA

Esercizio 1. Se $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ poniamo

(1): $||\mathbf{x}||_1 := |x_1| + |x_2|$,

(2): $||\mathbf{x}||_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

Mostrare che (1) e (2) sono norme su $\mathbb{R}^2$ e che vale la seguente relazione

$$2^{-1}||\mathbf{x}||_1 \leq ||\mathbf{x}||_\infty \leq ||\mathbf{x}|| \leq ||\mathbf{x}||_1, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,$$

in cui $||\mathbf{x}||$ è la norma euclidea di $\mathbf{x}$. Disegnare le corrispondenti sfere unitarie.

Esercizio 2. Disegnare i seguenti insiemi e determinarne interno, chiusura, frontiera e derivato:

(a): $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y)|| < 1, y \geq 0\} \cup \{(0, -y) : y \in [0, 1]\}$;

(b): $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < 2, 0 \leq y < 1\}$;

(c): $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y)|| < 1\} \cup \{(x, y) : y = 0, -2 < x < 2\}$;

(d): $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < -x\}$;

(e): $E = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} (2n, 2n + 1)$.

Esercizio 3. Stabilire se le seguenti successioni in $\mathbb{R}^2$ convergono e calcolarne l'eventuale limite.

(a): $\mathbf{x}_n = (2^{-n} \sin(n\pi/4), 2^{-n} \cos(n\pi/4))$;

(b): $\mathbf{x}_n = \left(\ln(n + 1) - \ln n, \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$;

(c): $\mathbf{x}_n = \left(\sqrt[n]{n!}, \frac{n^2 - 3n}{5n^2 + 1}\right)$;

(d): $\mathbf{x}_n = \left(\left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{n!}, \frac{\ln(5n^2 + 1)}{\ln(3n^2 + n + 2)}\right)$;

(e): $\mathbf{x}_n = (\sqrt[n]{3n^2 + 1}, \sqrt[2n+1]{(-n)})$;

(f): $\mathbf{x}_n = (\sin(n\pi/3), \cos(n\pi/3))$;

(g): $\mathbf{x}_n = (\sin n, (-1)^n)$.

Esercizio 4. Se $z = (1/2)i$, $z = 1 + i$ e $z = i$ calcolare i seguenti limiti:

(a): $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|z|^n}$;

(b): $\lim_{n\to+\infty} \frac{z^n}{1+z^n}$.

Esercizio 5. Dimostrare che se $E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$ e $E \neq \mathbb{R}$, allora $\partial E \neq \emptyset$.

Esercizio 6. Sia $E = (0, 1/2]$ e siano

$$A_n = (1/2n, 3/2n), \quad n = 2, 3, \ldots$$

dimostrare che

- gli A_n sono aperti;
- gli A_n costituiscono un ricoprimento di E;
- E non è contenuto nell'unione di un numero finito di tali A_n.

Giovanni Scilla: SAPIENZA Università di Roma, Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Piazzale A. Moro 2, I-00185 Roma, Italy

E-mail address: scilla@mat.uniroma1.it