Tutoraggio di Analisi Matematica I

canale Pb-Z

Scheda 3 di esercizi, 20 marzo 2012

1) Determinare interno, esterno, frontiera e chiusura dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

$$I = [0,1) \times (0,1]\,,$$

$$J = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \geq 1\Big\}\,.$$

2) Dire per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ se è aperto o chiuso:

$$A = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |y| < 1\Big\}\,,$$

$$B = \Big([0,1] \times [0,1]\Big) \cup \{(1,q) \,:\, q \in \mathbb{Q} \cap [2,3]\}\,,$$

$$C = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-2)^2 + y^2 \leq 4\Big\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = 1\}\,.$$

Determinare $\partial A, \partial B$ e ∂C.

3) Consideriamo la successione $\{P_n\} \subset \mathbb{R}^2$ definita da:

$$P_n = \left(\frac{1}{n}\,,\ \arctan\big[(-1)^n n^2\big]\right) \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

(i) Verificare che $\{P_n\}$ è limitata e che non è convergente.
(ii) Trovare tutti i punti $P \in \mathbb{R}^2$ per cui esiste una sottosuccessione di $\{P_n\}$ che converge a P.
(iii) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \|P_n\|\,.$$

4) (i) Sia

$$Q_n = \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\,,\ n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Verificare che $\{Q_n\}$ non è limitata.
$\{Q_n\}$ ammette sottosuccessioni convergenti?
(ii) Sia

$$R_n = \left(e^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\,,\ n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Verificare che $\{R_n\}$ non è limitata.
$\{R_n\}$ ammette sottosuccessioni convergenti?

5) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n} + n\,i}{n + \sqrt{n}\,i}\,.$$

6) Sia $z = 3 + 4i$. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|z|^n}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{z^n}{1 + z^n}\,.$$