ESERCIZI ANALISI 1

21-03-2013

Questo foglio vale per le prossime due settimane.

(1) Calcolare massimo e minimo limite di $a_n = (-)^n \frac{n^2}{2n^2+1}$ e $\frac{n+1}{n} \sin \frac{n\pi}{10}$.

(2) Discutere il carattere delle serie:

a.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n^2}}{n^{2n}}$$

b.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{x^2}{\sqrt{n}}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

c.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{n}$$

d.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^{2n}}$$

e.
$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-4}}$$

f.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{e^{(n+1)^2}}$$

g.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n!}{\pi^n}$$

h.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\ln n}$$

i.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2}$$

j.
$$\sum_{n=6}^{\infty} (-)^n \left(\frac{n^2}{n-5} - n\right)$$

k.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - n^3 \sin \frac{1}{n})^n$$

(3) Discutere al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ il carattere delle serie:

a.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n} 2^n (n+2)^n}{n^n}$$

b.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{tn}}{n}$$

c.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln(t+10)}{2}\right)^n$$

d.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(t^2-3)^n$$

(4) Calcolare la somma delle serie:

a.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n+1}}{3^{2n}}$$

b.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

c.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-)^{n+1}\left(\frac{2n+1}{n(n+1)}\right)$$

d.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-(-2)^n}{6^n}$$

(5) Calcolare il raggio di convergenza delle seguenti serie:

a.

$$\sum_n n^3 z^n$$

b.

$$\sum_n \frac{2^n}{n!}z^n$$

c.

$$\sum_n \frac{2^n}{n^2}z^n$$

d.

$$\sum_n \frac{n^3}{3^n}z^n$$

(6) Mostrare che se $\sum_n a_n$ è una serie complessa convergente e se b_n è una successione reale monotona e limitata allora $\sum_n a_n b_n$ è convergente.

(7) Mostrare che il prodotto di Cauchy di due serie assolutamente convergenti è assolutamente convergente.

(8) (Questo esercizio è guidato al fine di indicare un metodo generale per ricorrenze non lineari, basato sul principio di induzione. Nel caso in questione, si vuole mostrare, svolgendo l'esercizio, un buon algoritmo per il calcolo della radice quadrata di un numero positivo.) Sia $\alpha > 0$ e $x_1 > \alpha$ fissato. Poniamo

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{\alpha}{x_n}).$$

a.

Mostrare, in ordine, le seguenti tre proprietà per ogni $n : x_n > 0, x_n^2 > \alpha; x_n$ è decrescente, quindi convergente ad un limite, chiamato ℓ

b.

$$\text{mostrare che } \ell \geq \sqrt{\alpha} \text{ e verifica } \ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{\alpha}{\ell});\ \text{dedurre che } \ell = \sqrt{\alpha}.$$

c.

$$\text{(Stima dell'errore) Sia } \varepsilon_n := x_n - \sqrt{\alpha}. \text{ Mostrare che } \varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2x_n} < \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{\alpha}}$$

d.

$$\text{Dedurre che se } \varepsilon_{n+1} < \beta(\frac{\varepsilon_1}{\beta})^{2^n} \text{dove } \beta := 2\sqrt{\alpha}.$$

e.

Approssimare $\sqrt{3}$ con $x_1 = 2$ tenendo conto della stima $\varepsilon_1/\beta < 1/10$ stimando l'errore commesso per qualche valore di n.

(9) Sia $a > 1$. Ossevare che $\sum_n a^n$ diverge. Mostrare che il prodotto di Cauchy di $a + \sum_{n\geq 1} a^n$ con $(1-a) + \sum_{n\geq 1}(a-1)^n$ converge assolutamente.

(10) Considerate la funzione

$$f(x) = \sqrt{1-x}$$

.

a.

$$\text{Mostrare che } f \text{ è infinitamente derivabile in} \quad (-1,1).$$

b.

$$\text{Mostrare che f è sviluppabile in serie di Taylor } \sum_{n\geq 0} c_n x^n \text{ in } (-1,1)$$

c.

$$\text{Calcolare } c_n, \text{ mostrare che } c_n < 0 \text{ per } n \geq 1,$$

d.

$$\text{Mostrare che il raggio di convergenza della serie è } 1, \text{quindi la serie converge assolutamente in } (-1,1).$$

e.

$$\text{Dedurre da c. che per ogni} \quad x \in (0,1), \quad \sqrt{1-x} < \sum_{n=0}^{N} c_n x^n \quad \text{per ogni } N,$$

f.

$$\text{Calcolare il limite della disuguaglianza in e. per } x \to 1 \text{ e dedurre che } \sum_{0}^{\infty} |c_n| < +\infty.$$

g.

$$\text{Dedurre che la serie converge assolutamente anche per } x = \pm 1 \quad (\text{ a } f(x)).$$

(11) *Definiamo* la funzione

$$\exp(x) := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} x^n$$

per $x \in \mathbb{R}$.

a.

Se non lo avete già fatto, verificate che questa serie di potenze ha raggio di convergenza infinito.

b.

$$\text{Mostrare che } \exp(0) = 1, \quad \exp(x)\exp(y) = \exp(x+y).$$

c.

$$\exp(x) > 0, x \in \mathbb{R},$$

d.

$$(\text{monotonia}) \quad x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y),$$

e.

$$\text{Osservare che (Rudin Theorem. 3.31)} \exp(1) = e$$

f.

$$\text{Dedurre che se} \quad r \in \mathbb{Q}, \quad \exp(r) = e^r.$$

(12) Rappresentare l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 - y^2 < 1\}$ e verificare che è un insieme aperto di $\mathbb{R}^2$ (riferirsi alla metrica euclidea di $\mathbb{R}^n$).

(13) Sia E un sottoinsieme di uno spazio metrico S. Provare che l'insieme $E^0 = \{x \in E \, : \, x \text{ è interno ad } E\}$ costituito dai punti interni ad E è un sottoinsieme aperto di S.

(14) Verificare che $\mathbb{R}^2$ con la metrica:

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \begin{cases} |y_1| + |y_2| + |x_1 - x_2| & \text{se } x_1 \neq x_2 \\ |y_1 - y_2| & \text{se } x_1 = x_2 \end{cases}$$

è uno spazio metrico. Rappresentare qualche intorno $B_{(x,y)}(r)$ per questa metrica.

(15) Dimostrare che se E ed F sono due insiemi con E chiuso e F compatto allora $E \cap F$ è compatto.

(16) Siano $E_1, \ldots, E_n$ sottoinsiemi compatti di uno spazio metrico S, dimostrare che $E = \cap_{i=1}^n E_i$ e $F = \cup_{i=1}^n E_i$ sono compatti.