ESERCIZI DEL TUTORAGGIO DEL 30 MARZO 2012
CANALE A-DI

GIOVANNI SCILLA

Esercizio 1. Sia $E = [0, 1]$ e siano

$$\forall n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} : \quad A_{n,k} = \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k+1}{n} \right);$$

dimostrare che

- gli $A_{n,k}$ sono aperti;
- gli $A_{n,k}$ costituiscono un ricoprimento di $\mathbb{R}$;
- E è contenuto nell'unione di un numero finito di tali $A_{n,k}$;
- indicare esplicitamente quali $A_{n,k}$ bastano per ricoprire E.

Esercizio 2. Si consideri il sottoinsieme A di $\mathbb{R}^2$ definito da

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

dove

$$A_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 < 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

(a): A è aperto in $\mathbb{R}^2$;
(b): A è compatto;
(c): non esistono ricoprimenti aperti di A da cui si possa estrarre un sottoricoprimento finito;
(d): la famiglia di insiemi $B_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ è un ricoprimento aperto di A.

Esercizio 3. Stabilire se esiste, ed eventualmente calcolarlo, il limite delle seguenti successioni definite per ricorrenza:

(a): $\begin{cases} x_{n+1} = \log(1 + x_n) \\ x_0 = 1 \end{cases}$

(b): $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{3}{2} - 2^{-x_n} \\ x_0 = 0 \end{cases}$

(c): $\begin{cases} x_{n+1} = \arctan x_n \\ x_0 = a \in \mathbb{R} \end{cases}$

(d): $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{n x_n}{n+1} \\ x_0 = a \in \mathbb{R} \end{cases}$

(e): $\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \\ x_0 = 1 \end{cases}$

(f): $\begin{cases} x_{n+1} = \max\{1, x_n^2\} \\ x_0 = a \in \mathbb{R} \end{cases}$

(g): $\begin{cases} x_{n+1} = \cos x_n \\ x_0 = a \in \mathbb{R} \end{cases}$

Giovanni Scilla: SAPIENZA Università di Roma, Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Piazzale A. Moro 2, I-00185 Roma, Italy

E-mail address: scilla@mat.uniroma1.it