

**ESERCIZI DEL TUTORAGGIO DEL 28 MARZO 2012
CANALE DL-PA**

GIOVANNI SCILLA

Esercizio 1. Sia

$$x_n = \frac{3n^2 + 1}{2n + 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- la successione è limitata?
- se sì, estrarre almeno una sottosuccessione convergente;
- determinare l'insieme dei punti limite della successione $\{x_n\}$;
- calcolare $\liminf x_n$ e $\limsup x_n$.

Esercizio 2. Assegnato il numero complesso $w = 4 + 3i$, sia

$$z_n = \frac{w^n}{|w|^n},$$

- stabilire se la successione è limitata nei complessi;
- la successione è di Cauchy?
- determinare l'insieme dei punti limite della successione $\{z_n\}$.

Esercizio 3. Stabilire se esiste il limite, ed eventualmente calcolarlo, delle seguenti successioni definite per ricorrenza:

$$(1): \begin{cases} x_{n+1} = \log(1 + x_n) \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

$$(2): \begin{cases} x_{n+1} = \frac{3}{2} - 2^{-x_n} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$(3): \begin{cases} x_{n+1} = \arctan x_n \\ x_0 = a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(4): \begin{cases} x_{n+1} = \frac{nx_n}{n+1} \\ x_0 = a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Esercizio 4. Stabilire il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$(1): \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n};$$

$$(2): \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n};$$

$$(3): \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2 + 1)}{2^n};$$

$$(4): \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n};$$

$$(5): \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + \cos n}{n^3};$$

$$(6): \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 9};$$

$$(7): \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

$$(8): \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n^3}\right).$$

Esercizio 5. Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ convergono le seguenti serie:

$$(1): \sum_{n=0}^{\infty} 5^{nx};$$

$$(2): \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2 + x^{2n}};$$

$$(3): \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(1/n)}{(\log n)^x}.$$

GIOVANNI SCILLA: SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "G. CASTELNUOVO", PIAZZALE A. MORO 2, I-00185 ROMA, ITALY

E-mail address: `scilla@mat.uniroma1.it`