Tutoraggio di Analisi Matematica I

canale Pb-Z

Scheda 4 di esercizi, 27 marzo 2012

1) Sia
$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}\ ,\ a_0 = 0\,.$$
Verificare che
$$a_n < 2\,,\ \ a_n < a_{n+1}\ \ \forall\, n \in I\!N\,.$$
Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} a_n\,.$$

2) (i) Sia
$$a_{n+1} = a_n(1-a_n)\ ,\ a_0 = \frac{1}{5}\,.$$
Verificare che
$$a_{n+1} \le a_n\,,\ \ a_n > 0\ \ \forall\, n \in I\!N\,.$$
Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} a_n\,.$$
(ii) Sia
$$b_{n+1} = 2b_n(1-b_n)\ ,\ b_0 = \frac{1}{5}\,.$$
Verificare che
$$b_{n+1} \ge b_n\,,\ \ b_n \le \frac{1}{2}\ \ \forall\, n \in I\!N\,.$$
Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} b_n\,.$$

3) Calcolare massimo e minimo limite delle successioni
$$a_n = (-1)^n\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\ ,$$
$$b_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) n!\log\left(1+\frac{1}{n!}\right)\ ,$$
$$c_n = 2^{(-1)^n n^3}\ .$$

4) Determinare i punti limite delle successioni
$$a_n = \left(\frac{2+\cos(n\pi)n^2}{2+n^2}\ ,\ n^2\left[1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right)\ ,$$
$$b_n = \left(\sin(n\pi)n^2\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right)\ ,\ \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\ .$$

5) (i) Determinare una successione priva di punti limite finiti,
(ii) determinare una successione non convergente avente un unico punto limite finito,
(iii) mostrare che ogni successione limitata avente un unico punto limite finito è di Cauchy.

6) Dimostrare o confutare con un controesempio ciascuna delle seguenti affermazioni:
(i) una successione di Cauchy può avere più di un punto limite;
(ii) il prodotto di una successione di Cauchy per una successione limitata è di Cauchy;
(iii) ogni sottosuccessione di una successione di Cauchy è di Cauchy.

7) Dire quali dei seguenti insiemi sono compatti:
$$A = \{x \in I\!R\,:\,|x-2| \le 4\},$$
$$B = \{x \in I\!R\,:\,\log(x^3+1) \ge 1\}\,,$$
$$C = \{(x,y) \in I\!R^2\,:\,x^2 \le y \le x+2\ \}\,.$$